2023

Szakdolgozat

Stirling Anna Krisztina
matematikatanár – fizikatanár
osztatlan tanári mesterszak

2023

A feladatot megoldani nem kell félnetek jó lesz ha mindnyájan megértitek én nem bonyolítanám tovább

Quaestiones mathematicas solvere nolite timere bonum est si omnes intelligunt ego non impedio.

Szakdolgozat

Írta: Stirling Anna Krisztina

Matematika-fizika osztatlan tanárszak

Témavezető:

Szabó Csaba, egyetemi tanár
Algebra és Számelmélet Tanszék

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
2023

Nyilatkozat

Név: Stirling Anna Krisztina
NEPTUN azonosító: SJPUQV
Szakdolgozat címe: A feladatot megoldani nem kell félnetek jó lesz ha mindnyájan megértitek én nem bonyolítanám tovább

A szakdolgozat szerzőjeként kijelentem, hogy a dolgozatom önálló szellemi alkotásom, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam. A dolgozatban felhasználom a Csehné Szenderák Júliával, Czeglédi Csabával, Rékasi Annával és Szörényi Sárával közösen írt TDK dolgozataink egyes részleteit, valamint Szabó Csabával, Zámbó Csillával, Csehné Szenderák Júliával és Szörényi Sárával közös közleményünket. Ezekből a dolgozatokból a saját munkáim eredményeit kiemelve mutatom be a szakdolgozatomban.

Budapest, 2023

Stirling Anna Krisztina

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Egyetemi tanulmányaim során a reguláris tanórák mellett nagy hatással voltak rám a *Módszertani Mesék* tudományos diákköri műhely keretében meghallgatott matematika tanulás- és tanításmódszertani előadások. Ennek hatására kezdtem el először Rékasi Anna, majd Csehné Szenderák Júlia és Szörényi Sára évfolyamtársaimmal Szabó Csaba Tanár Úrnál kutatni a ***Matematika Tanuláselméleti és -pszichológiai Kutatócsoport***ban.

Rékasi Annával közösen négy TDK dolgozatot írtunk problémafelvetés és feladatkészítés témakörében:

- *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési és problémamegoldási készségeinek összehasonlítása* (2018: Kari TDK 1. díj, 2019: OTDK 3. díj). [23]
- *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési képességeinek vizsgálata fejlesztési céllal* (2019: Kari TDK 1. díj) [24]
- *Közoktatásban tanuló diákok feladatkészítési képességének vizsgálata* (2020: Kari TDK 1. díj). [25]
- *Problémafelvetés és feladatkészítés egy lehetséges megjelenítése matematikaórán* (2020: Kari TDK 1. díj, 2021: OTDK különdíj). [26]

Vásárhelyi Éva Tanárnő felkérésére Csehné Szenderák Júlia és Szörényi Sára szaktársaimmal és Zámbó Csilla doktorandusz hallgatóval közösen, Szabó Csaba Tanár Úr témavezetésével az akkor készülő *Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken* tanulmánykötetbe írtunk egy szaktanulmányt *Geometric representations of irrational algebraic numbers in Hungarian high school mathematics education* címmel [34]. Majd ennek kibővítéseként 2021-ben TDK dolgozatot írtunk *Kell-e félnünk a* $\cos 15°$*-tól? Ha igen, bizonyítsd, ha nem, mutass ellenpéldát!* [7] címmel, mellyel szintén első díjat nyertünk az intézményi kari TDK-n.

Szakdolgozatomban néhány korábbi TDK munkám részleteit fogom felhasználni és kiegészíteni. Bár mindegyik munka társszerzős, a dolgozatban a közös kutatásokból a saját munkám eredményeit fogom kiemelni. A dolgozat első fejezete elsősorban matematikai, második fejezete szakmódszertani jellegű.

1. fejezet

$\cos 75^\circ$: hogyan védekezzünk a szögfüggvények ellen?

1.1. Bevezetés: Racionális és irracionális problémák

1.2. $\cos 15^\circ$ és $\cos 75^\circ$

Kell-e félnünk a $\cos 15^\circ$*-tól? Ha igen, bizonyítsd, ha nem, mutass ellenpéldát!* című TDK dolgozatunkban [7], melyet Csehné Szenderák Júliával és Szörényi Sárával írtunk, bemutatunk olyan, legfeljebb két gyökjellel kifejezhető irracionális számokat, melyeket szemléltethetünk (megszerkeszthetünk) geometriailag. Ezek olyan számok, amelyek Galois-csoportjának elemszáma kettőhatvány (ebből következik a szerkeszthetőségük) és legfeljebb negyedfokúak (így legfeljebb két gyökjel szerepel a felírásukban). Számunkra most a legérdekesebb algebrai számok a szabályos n-szögek középponti szögeinek koszinuszai. Ebben a dolgozatban elsősorban a szabályos huszonnégyszög középponti szögének (15°) és kiegészítő szögének (75°) koszinuszával fogok foglalkozni.

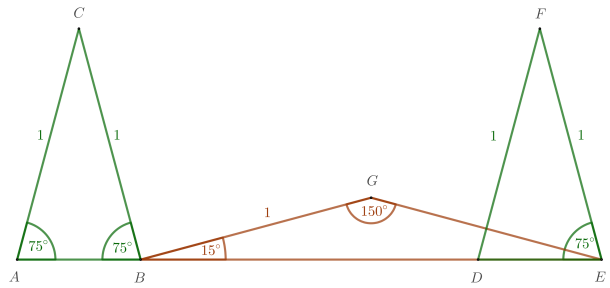
1.3. Elemi számolási módszerek

A következő alfejezetekben meg fogom mutatni, hogyan konstruálhatunk olyan geometriai feladatokat, melyek segítségével elemi módszerekkel, középiskolás szinten mutathatunk geometriai reprezentációkat kevés gyökjellel kifejezhető irracionális számokra. Az itt bemutatott feladatok célja elsősorban a $\cos 15^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\cos 75^\circ$ és $\sin 75^\circ$ számok geometriai reprezentációja, de mellettük meg fog jelenni a $\sqrt{2}$, a $\sqrt{3}$ és a $\sqrt{6}$ is.

1.3.1. Építkezzünk!

Legelőször nézzük meg, milyen alakzatokat használjunk fel a geometriai konstrukciók elkészítéséhez. A 15° és a 75° szögfüggvényeit kézenfekvő olyan háromszögek segítségével kiszámolni, melyekben szerepelnek ezek a szögek. Építkezhetünk 15°–75°–90° szögű derékszögű háromszögekből, vagy akár olyan egyenlőszárú háromszögekből, melyek alapon fekvő szögei 15° vagy 75° fokosak.

Pusztán azzal, hogy egymás mellé szerkesztünk ilyen egyenlőszárú háromszögeket, ahogyan az 1.1 ábra mutatja, máris megjeleníthatjük a $\cos 15°$ és $\cos 75°$ számokat szakaszhosszként.



1.1. ábra. $\cos 15°$ és $\cos 75°$ reprezentációja 15°-os és 75°-os alapon fekvő szögű egyenlőszárú háromszögekkel.

A 75°-os alapon fekvő szögű egyenlőszárú háromszögek (1.2 ábrán $ABC\Delta$ és $DEF\Delta$) alapjának hossza legyen $2y$, a 15°-os egyenlőszárú háromszög ($DEG\Delta$) alapjának hossza pedig legyen $2x$.

$$x = \cos 15° = \sin 75°$$

$$y = \cos 75° = \sin 15° \tag{1.1}$$

Az addíciós tételek segítségével kiszámolhatjuk ezek értékét:

$$\cos 75° = \cos (30° + 45°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15° = \cos (45° - 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \tag{1.2}$$

Tehát az 1.1 és az 1.2 egyenletekből megkaptuk x és y szakaszhoszokat:

$$x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$y = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \tag{1.3}$$

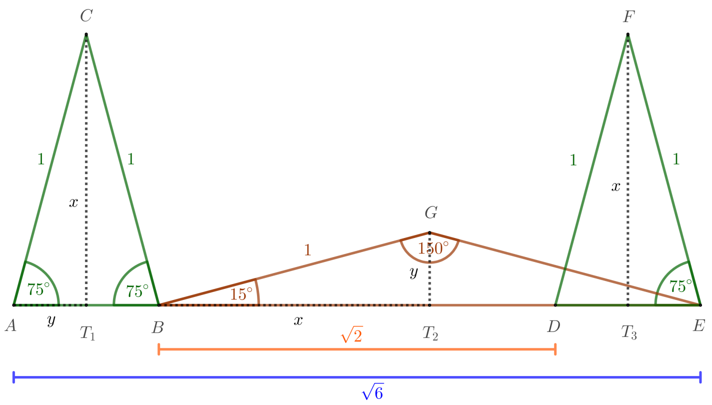
Sikerült tehát legfeljebb két-két gyökjel használatával megadnunk $\cos 15°$ és $\cos 75°$ pontos értékét.

Most pedig számítsuk ki az AE és BD szakaszhosszokat! Látható, hogy $AE = 2x + 2y$ és $BD = 2x - 2y$ teljesül. Így a két szakasz hossza:

$$AE = 2x + 2y = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$

$$BD = 2x - 2y = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \tag{1.4}$$

Találtunk tehát egy példát középiskolai módszerekkel is megoldható geometriai problémára, melynek segítségével reprezentálhatóak nemcsak a $\sqrt{2}$ és $\sqrt{6}$ számok – melyeket ennél elemibb módon is könnyen reprezentálhatunk – hanem a $\cos 15°$, $\sin 15°$, $\cos 75°$ és $\sin 75°$ számok értéke is. Kereshetünk azonban ennél a konstrukciónál "szebbet" is, azaz vagy olyan konstrukciót, ami egy beöltöztetett probléma felvetésére ad lehetőséget, vagy olyat, aminek még ennél is több irracionális szám megjelenik.



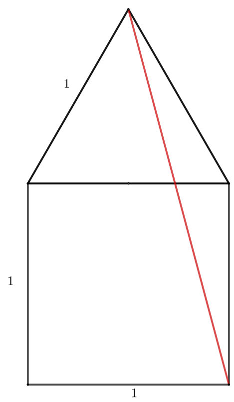
1.2. ábra. $\sqrt{6}$ és $\sqrt{2}$ reprezentációja 15°-os és 75°-os alapon fekvő szögű egyenlőszárú háromszögekkel.

1.3.2. "Ha egy téglám van, abból nem lehet házat építeni"

Az itt bemutatott feladat egy könnyebben beöltöztethető konstrukció segítségével mutatja be a $\cos 15°$ értékét.

Vegyünk egy egység oldalú négyzetet és az egyik oldalára szerkesszünk egy egység oldalú szabályos háromszöget! Így az 1.3 és 1.4 ábrákon látható alakzatot kapjuk. A konstrukcióhoz felvethető probléma:

> **Feladat:** *Matematikakedvelő Állampolgár mézeskalácsházat készített egy 1 dm oldalú négyzet és 1 dm oldalú szabályos háromszög egybeillesztésével. A házikót azonban sütés után véletlenül eltörte, így most kíváncsi arra, hogy vajon az összeragasztáshoz milyen hosszan kell húznia a cukormázat?* (Az 1.3 ábrán a piros szakasz jelöli a törés vonalát.)



1.3. ábra. Matematikakedvelő Állampolgár mézeskalács házikója.

Megoldás: (A megoldás során az 1.4 ábra jelöléseit fogjuk használni.) Először is húzzuk be az $ABCD$ négyzet és az $ADE\Delta$ háromszög közös szimmetriatengelyét! Így kapjuk az EF szakaszt, ami az $ABCD$ négyzet és az $ADE\Delta$ háromszög közös AD oldalát a T pontban metszi. Az ET szakasz az egységoldalú szabályos háromszög magassága, így a hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}$. A TF szakasz hossza pedig nyilván megegyezik a négyzet oldalhosszával, tehát 1.

Tekintsük az $EFC\Delta$ derékszögű háromszöget! Abból, hogy $ADE\sphericalangle = 60°$ és $ADC\sphericalangle = 90°$ következik, hogy $EDC\sphericalangle = 150°$. Innen könnyen belátható, hogy $DEC\sphericalangle = ECD\sphericalangle = 15°$, $FCE\sphericalangle = 75°$ és $CEF\sphericalangle = 15°$. Tudjuk, hogy az $EFC\Delta$ derékszögű háromszög két befogójának hossza:

$$FC = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2}$$

$$EF = ET + TF = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \tag{1.5}$$

Ebből a Pitagorasz-tétel segítségével kiszámolhatjuk a keresett CE átfogó hosszát:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = (CE)^2$$

$$\frac{\left(\sqrt{3} + 2\right)^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3} = (CE)^2$$

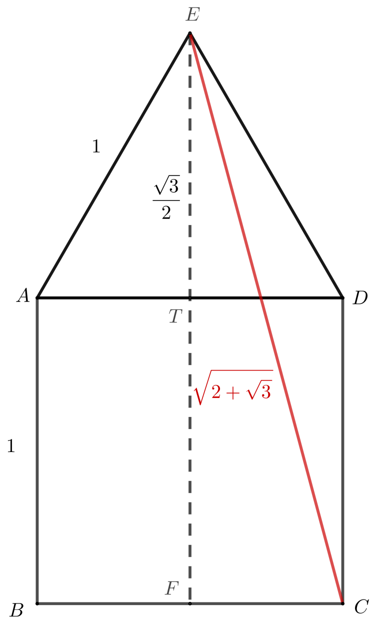
$$CE = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \tag{1.6}$$

Ezzel találtunk egy elemi számolási módszert $2 \cdot \cos 15°$ kiszámítására.

$$2 \cdot \cos 15° = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \tag{1.7}$$

Felmerülhet a feladatmegoldókban, hogy a két egymásba ágyazott négyzetgyökjel esetleg nem elég "szép" megoldás. Teljes négyzetté alakítással és némi algebrai furfanggal szerencsére ez a kettős gyökjel is megszüntethető:

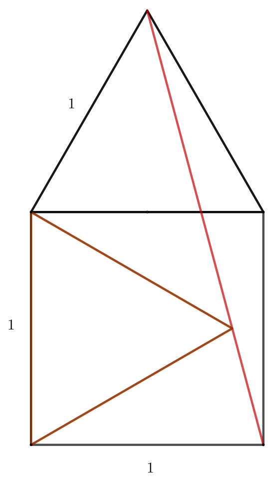
$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \tag{1.8}$$



1.4. ábra. $2 \cdot \cos 15°$ bemutatása egység oldalú szabályos háromszög és egységnégyzet segítségével.

Alakítsuk tovább a feladatot, törjük tovább Matematikakedvelő Állampolgárunk mézeskalácsát!

> **Feladat:** *Matematikakedvelő Állampolgár sajnos ismét elejtette házikóját, és legnagyobb meglepetésére kitört belőle egy szabályos háromszög alakú darab az* 1.5 ábrán *látható módon, ami éppen a házikó tetejével egybevágó. Bölcs barátunk most azt szeretné kiszámolni, hogy mekkora is az a két szakasz, amire az eredeti törésvonal felbomlott?*



1.5. ábra. Matematikakedvelő Állampolgár mézeskalácsa ismét eltörött.

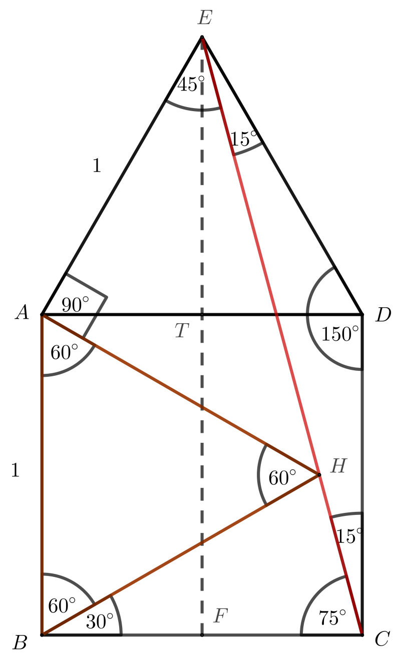
Megoldás: 1.6 ábrán keressük az EH és CH szakaszok hosszát. A továbbtörés hatására a házikó négy háromszögre bomlott fel, ahogyan az 1.6 ábrán is látható.

Az eredetileg letört $CDE\Delta$ egyenlőszárú háromszög szögeiről tudjuk, hogy $DEC\sphericalangle = ECD\sphericalangle = 15°$ és $EDC\sphericalangle = 150°$. A két szár hossza: $ED = DC = 1$, a CE alap hosszát pedig 1.6 egyenletben kiszámoltuk: $CE = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Az $ABH\Delta$ háromszög a feladat szerint egy egység oldalú szabályos háromszög. Innen már látható, hogy az $AHE\Delta$ háromszög egy egyenlőszárú derékszögű háromszög, a $BCH\Delta$ háromszög pedig olyan egyenlőszárú háromszög, melynek alapon fekvő szögei $BCH\sphericalangle = CHB\sphericalangle = 75°$ és szárai egység hosszúak.

Mivel $AHE\Delta$ egyenlőszárú derékszögű háromszög egység hosszú befogókkal, ezért tudjuk, hogy átfogója $\sqrt{2}$ hosszú:

$$EH = \sqrt{2} \tag{1.9}$$



1.6. ábra. További szakaszok berajzolásásval már $2 \cdot \sin 15°$ is szemléltethető.

A CH szakaszt pedig megkaphatjuk a CE és EH szakaszok különbségeként:

$$CE - EH = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2} \tag{1.10}$$

A művelet elvégzéséhez alakítsuk teljes négyzetté $\sqrt{2+\sqrt{3}}$-t:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}} \tag{1.11}$$

Helyettesítsük be 1.11 egyenletet 1.10-be:

$$CH = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{4}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1-2\right)}{2}$$

$$CH = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \tag{1.12}$$

Ezzel találtunk egy elemi számolási módszert $2 \cdot \sin 15°$ kiszámítására.

$$2 \cdot \sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \tag{1.13}$$

Ezekben a számolásokban dupla (egymásba ágyazott) gyökjel szerepelt, ami két szempontból is rossz. Az egyik az, hogy nem biztos, hogy észrevesszük, hogy a kifejezés egyszerűbb alakra hozható. A másik pedig, hogy egy dupla gyökös kifejezés elveheti a diák kedvét a további "geometriázástól". Ezért most mutatunk olyan módszereket, ahol nem ütközünk egymásba ágyazott gyököket tartalmazó kifejezésbe.

Ha a feladatot megoldók ismernek alapvető a trigonometrikus összefüggéseket, nagyon hasznos lehet a feladatot eleve a második formában kitűzni, vagyis a 1.6. ábrán látható törés szerint. Ekkor a fenti számolások a következőképpen módosulnak: a Pitagorasz-tételből tudjuk, hogy:

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{1.14}$$

1.6. ábrán legyen $EC = 2a$ és $HC = 2b$. Látható, hogy

$$2a - 2b = \sqrt{2} \tag{1.15}$$

1.15 egyenletet visszahelyettesítve 1.14 egyenletbe a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$8a^2 - 4\sqrt{2}a - 2 = 0 \tag{1.16}$$

ennek megoldásai éppen $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ és $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. Ezek szerint:

$$a = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \tag{1.17}$$

Így nagyobb algebrai átalakítások nélkül is meglaphatjuk a házikóból kitört szakaszok hosszát, azaz $\cos 15°$ és $\sin 15°$ értékét.

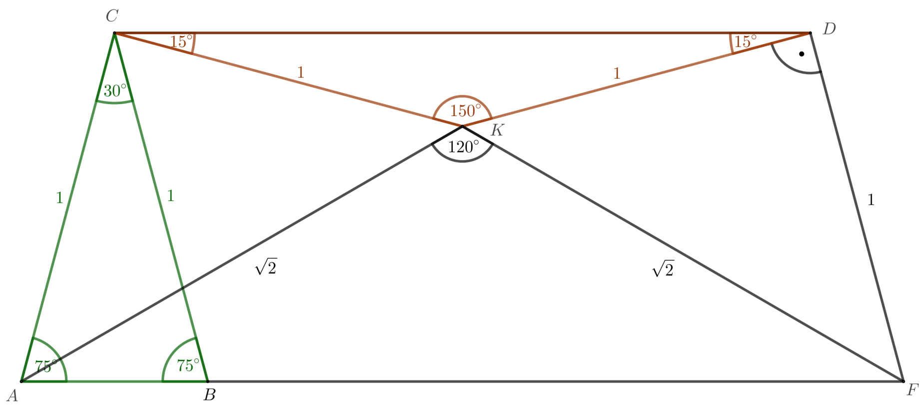
Összefoglalva: A házikós feladatok segítségével tehát elemi módszerekkel kiszámoltuk $\cos 15°$ és $\sin 15°$ (vagy kétszereseik) értékét:

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \tag{1.18}$$

1.3.3. Húrtrapéz alakú konstrukció

Az 1.3.1 fejezetben olyan egyenlőszárú háromszögekből építkeztünk, melyek alapon fekvő szögei 15°, illetve 75° fokosak, száraik pedig egységnyi hosszúságúak. Most ilyen háromszögek segítségével készítsünk szimmetrikus trapézt az 1.7 ábrán látható módon. A trapéz hosszabbik alapján fekvő szögei 75° fokosak, rövidebbik alapján pedig 105° fokosak a szögek.



1.7. ábra. Szimmetrikus trapéz alakú konstrukció

CD szakaszhosszt megkaphatjuk AF és AB különbségeként. Így

$$\sqrt{6} = AF = AB + CD = 2a + 2b$$

$$20 + 2b = \sqrt{6} \tag{1.19}$$

1.19. egyenletet behelyettesítve az $a^2 + b^2 = 1$ pitagoraszi összefüggésbe a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$8a^2 - 4\sqrt{6}a + 2 = 0 \tag{1.20}$$

melyből dupla gyökvonás nélkül is megkaphatjuk a keresett szakaszhosszok értékét.

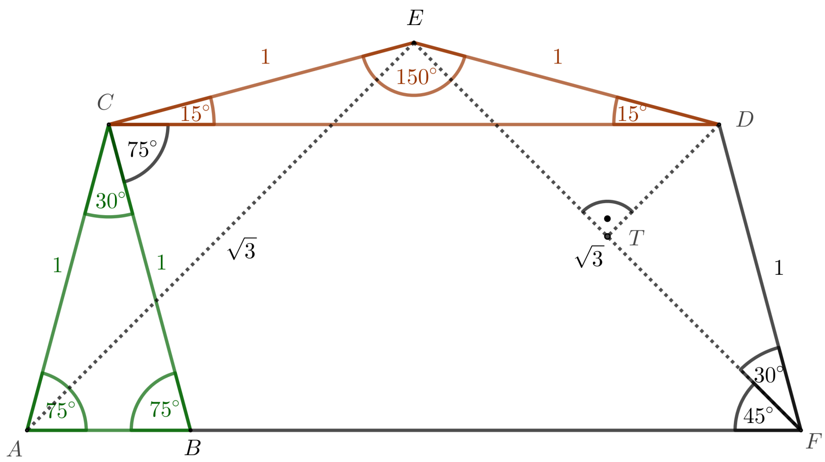
$$CD = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

$$AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \tag{1.21}$$

Az 1.7 ábrán látható konstrukció segítségével egy ábrán szemléltetjük a $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ és $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ hosszokat. (Ez utóbbi nyilván $2 \cdot \cos 15°$ értékével egyezik meg.)

1.3.4. Ötszög alakú konstrukció

Ismét az 1.3.1 fejezetben már megismert egyenlőszárú háromszögekből most az 1.3.3 fejezetbeli trapézhoz hasonló módon egy tengelyesen szimmetrikus ötszöget készítünk,amivel szintén kiszámolható $\cos 15°$ értéke. Ez látható az 1.8 ábrán. Az 1.7 ábra szimmetrikus trapézához képest az változott, hogy K pontot tükröztük a CD oldal egyenesére, így kaptuk az ötszög E csúcsát.



1.8. ábra. Szimmetrikus ötszög alakú konstrukció

Ebben az elrendezésben AE és EF szakaszok hossza $\sqrt{3}$, ugyanis $DFT\Delta$ és $EDT\Delta$ "félszabályos" háromszögek, melyekben $ED = EF = 1$ és $DT = \frac{1}{2}$. Tehát nyilván teljesül, hogy

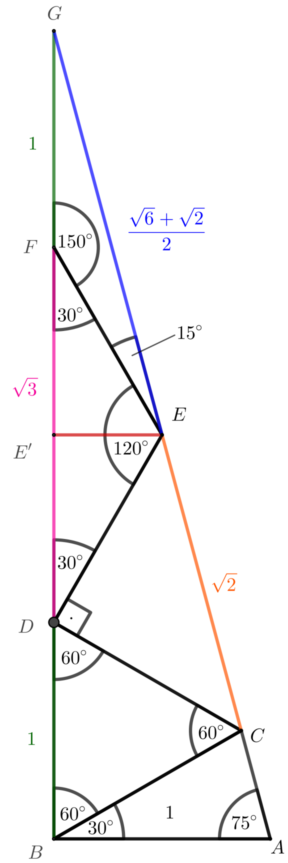
$$EF = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = AE \tag{1.22}$$

Az 1.3.3 fejezettel megegyező módon itt is kiszámolhatók az AF, AB és CD szakaszhosszok. Tehát az 1.8 ábrán látható konstrukcióval bemutathatók a $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ és $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ számok mint szakaszhosszok.

1.3.5. Háromszög alakú konstrukció

Ebben az alfejezetben a $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ és $\cos 15°$ értékeket egy kisebb háromszögekre felosztott derékszögű háromszög segítségével reprezentáljuk.

Az 1.9 ábrán látható $ABG\Delta$ derékszögű háromszög A csúcsnál lévő szöge 75°-os, G csúcsnál lévő szöge pedig 15°os. Az $ABG\Delta$ rövidebbik befogója legyen egység hosszú: $BA = 1$.



1.9. ábra. Háromszög

Osszuk fel az $ABG\Delta$ háromszöget egyenlőszárú háromszögekre a rövidebbik befogótól kezdve, úgy, hogy az alapon fekvő szögeket sorra $15° - 15°$-kal csökkentjük. Az így kapott háromszögek: $ABD\Delta$: alapon fekvő szögei 75°-osak; $BCD\Delta$ szabályos háromszög: szögei 60°-osak; $CDE\Delta$ egyenlőszárú derékszögű háromszög: alapon fekvő szögei 45°-osak; $DEF\Delta$: alapon fekvő szögei 30°-osak; $EFG\Delta$: alapon fekvő szögei 15°-osak. Mivel mindegyik kis háromszög egyenlőszárú, a száraik mind egység hosszúak. $CDE\Delta$ átfogója $\sqrt{2}$, $DEF\Delta$ alapja pedig $\sqrt{3}$ hosszúságú.

Az AB oldallal párhuzamos EE' középvonal behúzásával a következőket vehetjük észre: E' éppen a DF szakasz felezőpontjában van, ami nyilván a $DEF\Delta$ háromszögben az E csúcshoz tartozó magasság talppontja. Az $ABG\Delta$ átfogójának felezőpontja pedig E. Mivel a középvonal hossza fele a vele párhuzamos oldal hosszának, ezért $EE' = \frac{1}{2}$. Innen:

$$AG = \sqrt{1 + \left(2+\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+4+4\sqrt{3}+3} = \sqrt{8+4\sqrt{3}}$$

$$AG = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{4\left(2+\sqrt{3}\right)} = \sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6}+\sqrt{2} \qquad (1.23)$$

Mivel E az AG szakasz felezőpontja, ezért az alábbi szakaszhosszokat kapjuk:

$$EG = \frac{1}{2}AG = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = \frac{1}{2}AG - CE = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \tag{1.24}$$

Láthatjuk, hogy ezek pedig éppen a $\cos 15°$ és $\sin 15°$ kétszeresei. (A megoldás során máshogy is lehet gondolkodni, pl. koszinusz-tétel segítségével, vagy annak felhasználásával, hogy $DEE'\Delta$ félszabályos háromszög.)
Az $ABC\Delta$ és $EFG\Delta$ egyenlőszárú háromszögek alapjai hosszának kiszámolásával megkaptuk $2 \cdot \cos 15°$ és $2 \cdot \sin 15°$ értékét. Innen nyilván adódik $\cos 15°$ és $\sin 15°$ értéke is:

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \tag{1.25}$$

1.3.6. Tizenkétszög

A szabályos tizenkétszög felosztható 12 egybevágó egyenlőszárú háromszögre az 1.10 ábrán látható módon. A háromszögek C csúcsnál lévő szöge 30°-os, az A és B csúcsnál lévő szögeik pedig 75°-osak. Az $ABC\Delta$ egyenlőszárú háromszög szárainak hossza legyen 1. $ABC\Delta$-et a C-hez tartozó magassága két egybevágó derékszögű háromszögre bontja. A hegyesszögek szögfüggvényeinek definícióját felhasználva a háromszög alapja:

$$AB = 2 \cdot \sin 15° = 2\dot{} \cos 75° \tag{1.26}$$

A háromszög magassága pedig

$$AB = 2 \cdot \sin 75° = 2\dot{} \cos 15° \tag{1.27}$$

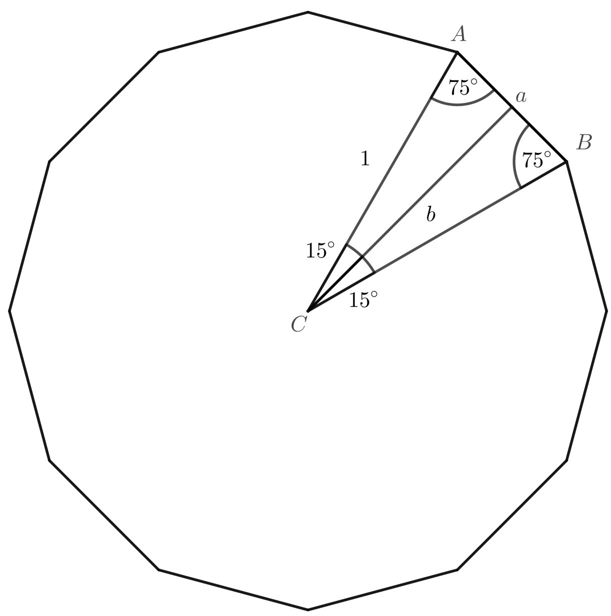
A $\cos 15°$ meghatározásához tehát meg kell határoznunk egy $75° - 75° - 30°$-os egyenlőszárú háromszögben az alap felének hosszát. Jelölje a az alap (vagyis a tizenkétszög oldalának) hosszát, b pedig az $ABC\Delta$ magasságát.

Az a és b szakaszhosszok kiszámítására Kőnig Dénes [14] egy, a tizenkétszög területét felhasználó rendkívül frappáns módszert írt le. Ehhez először szerkesszünk a tizenkétszög köré egy 2 oldalhosszúságú négyzetet az 1.11 ábrán látható módon.

Állítsunk a tiznkétszög oldalaira szabályos háromszögeket – ezek az 1.11 ábrán az $OAB\Delta$ és $ABE\Delta$ háromszögek. Ezek egybevágóak, hiszen az oldalhosszaik megegyeznek. Az $OAC\Delta$, $OCB\Delta$, $ADE\Delta$, és $BEF\Delta$ szintén egybevágóak, mert oldalhosszaik páronként egyenlőek.

A teljes négyzet négy darab sarki konkáv ötszögből ($EDABF$) és tizenkét egybevágó egyenlőszárú háromszögből (ABC) áll. Ezeket a részeket feloszthatjuk három-három páronként egybevágó háromszögre – $ACO\Delta \cong DAE\Delta \cong CBO\Delta \cong BFE\Delta$ és $AOB\Delta \cong ABE\Delta$. Vagyis a négyzetet feloszthatjuk 16 egyenlő területű részre, melyből 12 rész adja a tizenkétszög teljes területét. Innen a tizenkétszög területe:

$$T_{12\sphericalangle} = \frac{12}{16} \cdot 2^2 = 3 \tag{1.28}$$



1.10. ábra. Szabályos tizenkétszög

A tizenkétszög területe úgy is kiszámolható, hogy összegezzük az őt felépítő 12 egybevágó háromszög területét:

$$T_{12\sphericalangle} = 12 \cdot T_{\Delta} = 12 \cdot \frac{ab}{2} = 6ab \tag{1.29}$$

Ebből kiszámoljuk b értékét:

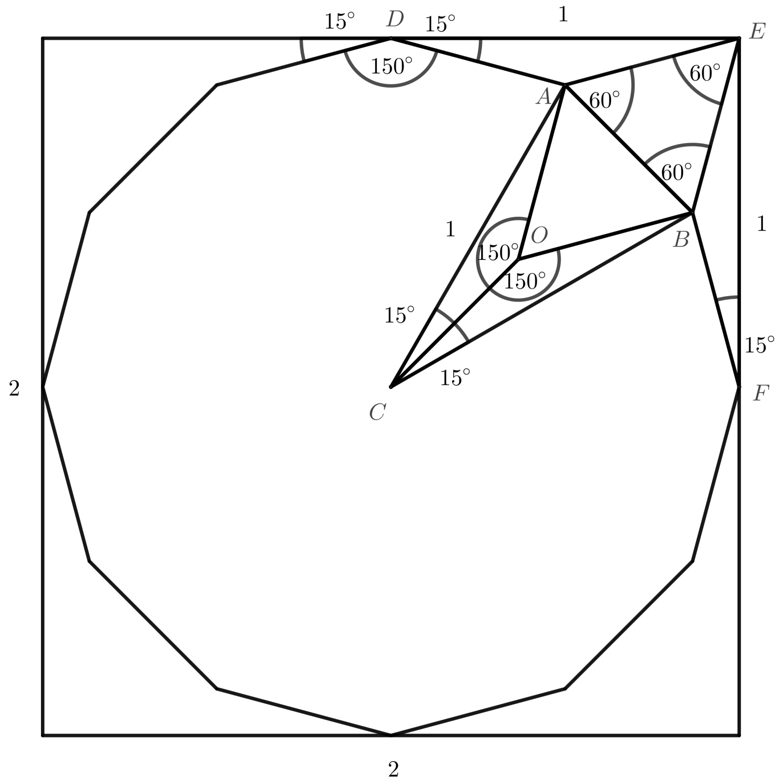
$$6ab = 3$$
$$b = \frac{1}{2a} \tag{1.30}$$

Legyen $a' = \frac{a}{2}$. Ekkor $b = \frac{1}{4a'}$. Használjuk a Pitagorasz-tételt a tizenkétszöget felépítő háromszögek magasságaival képzett derékszögű háromszögekre:

$$(a')^2 + b^2 = 1 \; (a')^2 + \frac{1}{16(a')^2} = 1 \; (a')^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$
$$b^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \tag{1.31}$$

Ezekből pedig megkapjuk a'-t és b-t:

$$a' = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$
$$b = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \tag{1.32}$$



1.11. ábra. Szabályos tizenkétszög négyzetbe írva

A kettős gyökjelet teljes négyzetté alakítással eltüntethetjük, így:

$$a' = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$b = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \tag{1.33}$$

Innen természetesen már $\cos 15°$ és $\sin 15°$ értékét is tudjuk:

$$\sin 15° = a' = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 15° = b = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \tag{1.34}$$

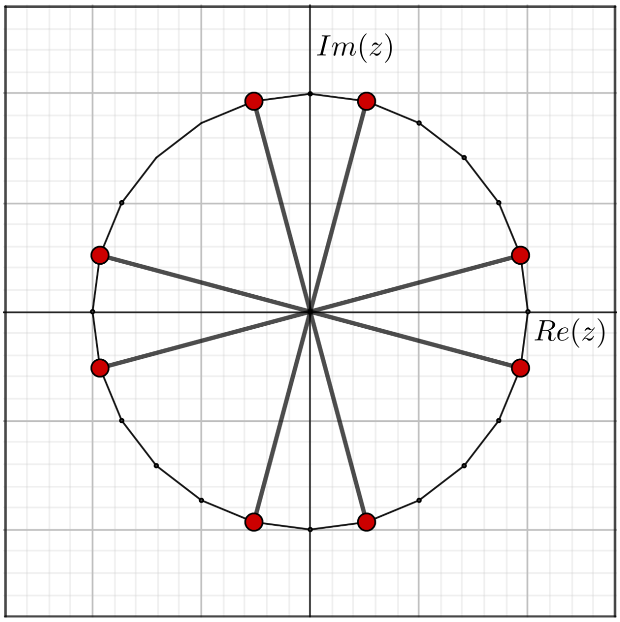
1.4. Nem elemi számolási módszer

Az előbbi, középiskolában is bemutatható példák után nézzük meg, hogyan számolhatjuk ki $\cos 15°$ és $\cos 75°$ értékét magasabb algebrai ismereteket tartalmazó számolásokkal.

1.4.1. A 24. körosztási polinom gyökei

Az alábbiakban körosztási polinomok segítségével fogjuk kiszámolni $\cos 15°$ értékét. A $\Phi_{24}(x)$ körosztási polinomot kiszámolhatjuk akövetkezőképpen:

$$\Phi_{24}(x) = \frac{x^{24} - 1}{\prod_{d|24, d \neq 24} \Phi_d(x)} \tag{1.35}$$



1.12. ábra. A 24. primitív egységgyökök

ahol:

$$\Phi_1(x) = x - 1$$
$$\Phi_2(x) = x + 1$$
$$\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$$
$$\Phi_4(x) = x^2 + 1$$
$$\Phi_6(x) = x^2 - x + 1$$
$$\Phi_8(x) = x^4 + 1$$
$$\Phi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$$

$$\Phi_{24}(x) = x^8 - x^4 + 1 \tag{1.36}$$

A huszonnegyedik körosztási polinom (1.36. egyenlet) gyökei a 24. primitív egységgyökök. Ezeknek a valós része megegyezik a keresett $\cos 15°$ és a $15°$ 1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23-szorosainak koszinuszának értékével.

Szeretnénk kifejezni a $\Phi_{24}(x)$ polinom gyökeit. Alakítsuk át az $x^8 - x^4 + 1 = 0$ egyenletet:

$$\left(x^8 + 1\right) - x^4 = 0 \tag{1.37}$$

Ez egy reciprok egyenlet, mivel az együtthatói szimmetrikusak. A reciprok egyenleteknek sohasem gyöke a nulla, így az 1.37 egyenlet mindkét oldalát eloszthatjuk x^4-nel:

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) - 1 = 0 \tag{1.38}$$

A reciprok egyenletnek minden $x = \alpha$ gyökére $x' = \dfrac{1}{\alpha}$ is gyöke, azonos multiplicitással, ezért az 1.38 egyenlet kifejezhető $x + \dfrac{1}{x}$ polinomjaként is:

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-1=\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1$$

$$\text{legyen } \left(x+\frac{1}{x}\right)=y\text{, ekkor:}$$

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-1=y^4-4y^2+1=0 \tag{1.39}$$

Az 1.39 egyenletet háromféleképpen lehet másodfokúak szorzatára bontani (hiszen tudjuk, hogy négy különböző gyöke van, melyeket párosíthatunk). A lehetséges felbontások:

$$\left(x^2-\sqrt{3}-2\right)\left(x^2+\sqrt{3}-2\right) \tag{1.40}$$

$$\left(x^2-\sqrt{2}x-1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x-1\right) \tag{1.41}$$

$$\left(x^2-\sqrt{6}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{6}x+1\right) \tag{1.42}$$

A szorzatokban szereplő másodfokú egyenleteket már középiskolás módszerekkel is meg tudjuk oldani. Az első felbontásból (1.40 egyenlet) két egymásba ágyazott gyökjeles alakban kapjuk meg a polinomok gyökeit:

$$x_{1;2}=\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$x_{3;4}=\pm\sqrt{2+\sqrt{3}} \tag{1.43}$$

a másik két felbontásból (1.41, 1.42 egyenletek) viszont "szebb" – vagyis egymásba ágyazott gyökjeleket nem tartalmazó – alakban:

$$x_{1;2}=\pm\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$x_{3;4}=\pm\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \tag{1.44}$$

Vegyük észre, hogy az $x+\frac{1}{x}$ kifejezés éppen a keresett $\cos 15°$ kétszeresével egyezik meg. Tehát a fenti polinomok gyökei éppen a keresett koszinusz érték kétszeresei.

2. fejezet

Problémafelvetés és feladatkészítés

2.1. Bevezetés

A matematikaoktatásnak egy köztudottan fontos része a matematikai problémákkal, feladatokkal való foglalkozás. Leggyakrabban ez valamilyen feladatmegoldó tevékenységet jelent, gyakorlófeladatok megoldásától egészen a nagyobb kihívást jelentő versenyfeladatok megoldásáig[8]. A magyarországi matematikaoktatás híres a problémaközpontúságáról, számos híres matematikusunk, színvonalas matematikaversenyeink (pl. a KöMaL és az Arany Dániel Matematikaverseny) jó példák erre. A problémamegoldó képesség fejlesztése nemcsak feladatsorok és versenyfeladatok megoldásával történhet, hanem szerepet kaphat benne a *problémafelvetési képesség* fejlesztése is, ugyanis – ahogyan azt Pólya György is írja – a szakértő szintű problémamegoldási folyamatnak egy fontos lépése a probléma újrafogalmazása, variálása és új kérdések, problémák felvetése a kapott feladat alapján [22], [9].

Amikor Rékasi Annával 2018-ban elkezdtük első TDK kutatásunkat, elsősorban az a tapasztalat motivált minket a témaválasztásban, hogy mennyi unalmas, vagy egymástól csak a megadott számokban – szükséges gondolatmenetben azonban nem – különböző, és rosszul beöltöztetett matematikafeladattal találkoztunk diákéveink és a tanítással (akkor még főleg korrepetálással) töltött idő alatt. Úgy gondoltuk, hogy a matematikatanároknak szükséges elsajátítani azt a képességet, hogy az órákon jól alkalmazható, érdekes, gondolkodtató és az adott csoport tudásához illeszkedő feladatokat válasszanak vagy készítsenek. Ezért az első témánk a matematika tanárszakos hallgatók problémamegoldási és problémafelvetési képességeinek vizsgálata lett [23], [24]. Innen már nem volt menekvés, elkezdtük egyre jobban beleásni magunkat a problémafelvetés kutatásába és a tanárszakos hallgatók után a közoktatásban tanuló diákok problémafelvetési, feladatkészítési képességeit is elkezdtük vizsgálni. Rékasi Annával két középiskolásokkal foglalkozó TDK dolgozatot írtunk [23], [24], ezekben a kutatásokban főleg gimnazisták vettek részt. Czeglédi Csabával pedig a *Matematika didaktika szeminárium* során szakképzésben tanuló diákok feladatkészítési képességeinek vizsgálatáról írtunk TDK dolgozatot [8], ez a munka azonban nem szerepel jelen dolgozatban.

A kutatásokban nagyon motiváló volt, hogy több neves külföldi kutatóval is találkozhattunk, és beszélgethettünk. 2019 májusában találkozhattunk Boris Koichuval (Weizmann Institute of Science), aki Magyarországra látogatott. 2020-ban a Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencián (MIDK2020) Ioannis Papadopoulos-szal (Aristotle University of

Thessaloniki) találkoztunk, aki tökéletesen a témánkba illeszkedően "*Navigating in the diverse landscape of problem posing*" címmel tartott plenáris előadást, az előadásból és a vele való beszélgetésből is nagyon sokat tanulhattunk. A MIDK2022 konferencián pedig John Mason (University of Oxford & Open University) profeszorral találkoztunk és beszélgettünk, aki "*A Mathematician's Work Is Never Done: the role of generalisation in learning, appreciating, and comprehending mathematical ideas*" címmel tartott plenáris előadást, ami szintén kapcsolódik a problémafelvetés témaköréhez.

2.1.1. Rövid történeti áttekintés

A matematikatudás elsajátításához elengedhetetlen az oktatásban, hogy létezzenek megfelelő matematikafeladatok és -problémák, hogy ezeken keresztül a diákság megismerkedhessen a matematikai gondolkodással és amelyek megoldása megalapozza és elmélyítse matematikatudásukat, megértésüket. Természetesen adódik hát a kérdés. hogy *honnan jönnek* ezek a "megfelelő" feladatok és egyáltalán *mitől jó* a jó feladat? A problémafelvetés modern kutatását Silver és Kilpatrick munkái alapozták meg [29], [12]. Vizsgálata az utóbbi egy-másfél évtizedben lett a matematikadidaktika vizsgálatának egyik központi témája [32], [10].

Singer, Ellerton és Cai [32] szerkesztésében 2015-ben megjelent egy *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* című összefoglaló tanulmány, melyben a problémafelvetés kutatásának helyzetéről és főbb vizsgálandó kérdéseiről írnak. A könyv első fejezetem melyet Cai, Hwang, Jian és Silber írt, felsorolja és vizsgálja a problémafelvetés közoktatásban történő kutatásának alapkérdéseit [5]. Szerintük a problémafelvetés kutatásának legfontosabb kérdései jelenleg a következők (a felsorolásban dőlt betűk jelzik azokat a kérdéseket, melyekkel mi is foglalkoztunk):

1. *Miért fontos a problémafelvetés az iskolai matematikaoktatásban?*

2. *Miért nem képesek a diákok és a tanárok matematikailag fontos problémákat alkotni?*

3. *Lehet-e hatékonyan képezni a diákokat és a tanárokat a magas színvonalú problémák alkotására?*

4. Mit tudunk a problémafelvetés kognitív folyamatáról?

5. *Milyen kapcsolat van a problémamegoldás és a problémafelvetés között?*

6. Alkalmas-e a problémafelvetés a matematikai tanulási eredmények és a kreativitás vizsgálatára?

7. Hogyan jelenik meg a problémafelvetés a tantervben?

8. Hogyan teljesít egy olyan osztály, ahol a tanulók foglalkoznak problémafelvetéssel?

9. Hogyan lehet használni a technológiát a problémafelvetésben?

10. Mit tudunk arról, hogy milyen hatással van a problémafelvetési tevékenység a diákok eredményeire?

A tanárképzésben és a matematikaoktatásban egyaránt fontos, hogy jó matematikafeladatokkal foglalkozzunk. Számos kutatás vizsgálja, hogy diákok és tanárok tudnak-e minőségi feladatokat alkotni, a felvetett problémáik matematikai jellegűek-e és alkalmazhatók-e osztálytermi gyakorlatban [5] [32]. A legtöbb kutatásban vannak olyan tanárok és diákok egyaránt, akik képesek érdekes és releváns matematikai problémák megalkotására, azonban olyan résztvevők is vannak – matematika tanárszakos hallgatók között is – akik megoldhatatlan vagy irreleváns, nem matematikai problémákat vetnek fel [30] [31] [4]. Több kutatás is foglalkozott már a fejlesztés lehetőségeivel. Koichu és Kontorovich [13] azt vették észre, hogy a kísérletükben részt vevő, sikeres problémafelvető tanárjelöltek akkor alkották a legjobb problémáikat, amikor a problémafelvető tevékenységüket problémamegoldással és problémaelemzéssel ötvözték. L. Ma [18] könyvében leírja, hogy a tanároknak a jó problémák felvetéséhez szükségük van arra, hogy a matematikafeladatok mögötti módszertani és szakmai megértésük növekedjék. Törökországi kutatások [17] szerint a leendő tanárok általában szokványos problémákat tűznek ki, mert a hallgatók nem mernek újítani, ugyanis attól tartanak, hogy nem fogják tudni megoldani a saját maguk által kitűzött problémákat.

Nem újkeletű gondolat, hogy a diákok maguk is vessenek fel problémákat, kérdéseket matematikafeladatokhoz kapcsolódóan. Henry Benfield már 1887-ben arról írt egyik művében, hogy a tanulók érdeke a saját problémák, feladatok készítése [2]. Javaslata az volt, hogy a szaktanár ennek érdekében mutasson absztrakt példákat, amelyeket a diákok saját feladattá alakíthatnak. Természetesen léteznek ennél modernebb példák is a tanórai matematikai problémafelvetés kutatására. Magyarországon például Kovács Zoltán, Báró Emőke, Lócska Orsolya és Kónya Eszter is foglalkoznak matematikaórai problémafelvetéssel [15] [16].

2.1.2. Mi a probléma?

A problémafelvetés vizsgálata nagyon sokszínű [20]. Rögtön felmerül kérdésként, hogy egyáltalán mit nevezünk problémának? A matematika-feladatok osztályozásának kérdése nem újkeletű probléma. A Módszertani példatárban (Vásárhelyi, 2013) a feladatok osztályozásáról a következőt olvashatjuk: "*Egy feladat zárt, ha megadott kezdeti feltételek mellett keressük meghatározott kérdésekre a választ. Így a tankönyvekben, példatárakban szereplő feladatok többsége zártnak tekinthető. Egy feladat megoldása során valamilyen kezdeti állapotból (kiindulási feltételek) valamilyen végállapotba (a feltett kérdés megválaszolása) szeretnénk eljutni.* ***Ha egy feladat esetében a kezdeti állapotból a végállapotba jutás módja nem adott közvetlenül, azaz nehézségekbe ütközünk a megoldás során, akkor problémáról beszélünk****. Egy feladat problémakaraktere objektív és szubjektív tényezőktől is függ, hiszen ugyanaz a kérdésfeltevés lehet például a megoldó felkészültségétől függően nehéz probléma, vagy éppen rutinfeladat. A nyitott feladatok általában nem oldhatók meg rutinszerűen, így helyette a"nyitott probléma" elnevezés gyakran helytálló lehet, és valószínűleg ezért is használják így gyakran (Pehkonen, 1995)*" [1] [21]. Stickles [33], aki tanárjelöltek és matematikatanárok problémafelvetését vizsgálta, a következő feltételekkel határozta meg a "*jól definiált probléma*" fogalmát:

1. ösztönzi a feladat egyszerűsítését és ezáltal önálló feladat felvetését, valamint matematikai modell létrehozását

2. nincs olyan ismert megoldási módszer vagy eljárás, mellyel azonnal megoldható a feladat.

Gyakorlatnak vagy gyakorlófeladatnak (excercise) pedig azokat a feladatokat nevezi, amelyek pusztán egy ismert algoritmus vagy eljárás alkalmazását követelik meg. A Stickels kutatásában részt vevő tanárok és tanárjelöltek, bár képesek voltak problémákat alkotni, az önálló problémafelvetésben való sikerességük csak részleges volt. Kapott adatok alapján képesek voltak számos *feladatot* készíteni, de nehézségeik voltak releváns és újszerű *problémák* készítésével.

Sokkal sikeresebbek voltak abban, hogy már meglévő problémákat formáljanak újjá.

Ioannis Papadopoulos szerint az első nehézség, amivel a problémafelvetéssel foglalkozni akaró kutató szembesül, hogy párhuzamosan több értelmezése is van a problémafelvetésnek. Az első fontos szempont, hogy kiknek a problémafelvetési, feladatkészítési képességeit vizsgálja egy kutatás: versenyfeladatkészítők, tankönyvírók, matematikatanárok, matematika tanárszakos és tanító szakos hallgatók és diákok egyaránt gyakran vizsgált alanyai a kutatóknak. Magát a problémafelvetés folyamatát is sokféleképpen értelmezi a szakirodalom. Ioannis Papadopoulos a MIDK2020 konferencián tartott *Navigating in the diverse landscape of problem posing* előadásában és 2022-ben megjelent cikkében [20] a problémafelvetés következő értelmezéseit gyűjtötte össze:

1. problémafelvetés mint új problémák generálása

2. problémafelvetés mint már meglévő problémák újraformálása

3. a problémafelvetés egyszerre jelentheti új probléma létrehozását és korábbi probléma újraformálását (1. + 2.)

4. problémafeltevés mint új kérdések feltevése és régi kérdések új szemszögből való vizsgálata

5. problémafelvetés mint modellezési folyamat.

A problémafelvetés vizsgálatának célja is sokféle lehet. Papadopoulos az alábbi három fő kategóriát különítette el:

1. a problémafelvetés mint a tanárképzés része, a leendő tanárok fejlesztése céljából

2. a problémafelvetés mint oktatási vagy pedagógiai eszköz, akár problémamegoldás tanítása céljából

3. a problémafelvetés mint diagnosztikai eszköz, a tanulók konceptuális megértésének, nehézségeinek, tudásának felmérésére.

Látható, hogy a problémafelvetés nagyon sokféle párhuzamos értelmezésben él együtt, ezért Papadopoulos hangsúlyozta, hogy nagyon pontosan és világosan kell fogalmazni a problémafelvetéssel foglalkozó kutatásokban, hogy egyértelmű legyen, hogy a sok fogalom alatt ki, mit ért. Beszélgetésünk során egy saját szempontrendszer kidolgozására bíztatott minket.

Silver [29], aki a problémafelvetés mai kutatásának egyik megalapozója, a problémafelvetők által készített feladatokat három szempont szerint vizsgálta. Ezek a gördülékenység ("fluency"), a rugalmasság ("flexibility") és az eredetiség ("originality"). Az első szempont – gördülékenység – azt vizsgálja, *hány* feladatot készített a problémafelvető. A második – rugalmasság – a felvetett problémák különbözőségét vizsgálja, vagyis, hogy hány különböző kategóriába sorolhatók a készített feladatok. A harmadik szempont – eredetiség – vizsgálja azt, hogy mennyire különböznek az egyes problémák az összes felvetett problémától. Silver ezen szempontjai a Torrance által a kreativitás mérésére használt szempontokon alapulnak [35].

2015-ben Rosli és munkatársai 51 tanárjelölt problémafelvetését vizsgáló kutatást végeztek [28]. Az elkészített feladatokat 11 szempont alapján értékelték:

1. az információ forrása (source of information)

2. megoldhatóság (solvability)

3. hasonló problémát már látott/oldott meg (similar problem seen/worked)

4. életből vett probléma (Real-life situation)
5. realisztikus, értelmes, érthető (realistic, made sense, understandable)
6. matematikailag pontos/ megfelelő (mathematically appropriate)
7. magával ragadó, vonzó (engaging)
8. nehézségi szint (difficulty level)
9. eredetiség és kreativitás (originality and creativity)
10. kihívást jelentő (challenging)
11. korosztálynak –a tanulmányban ez középiskolás korosztályt jelentett– megfelelő (age appropriateness).

Rékasi Annával a saját értékelő szempontrendszerünk [25] kidolgozásakor nagymértékben építettünk a Rosliék által felsorolt szempontokra, bár a tanulmányban nem fejtenek ki pontosan minden értékelési szempontot, így nem biztos, hogy mi is pontosan ugyanazt értjük alattuk, mint ők. Erről a 2.3. fejezetben lesz bővebben szó.

2.2. Stratégiák

Többféle módszerrel mérhető fel az emberek a problémafelvetési, feladatkészítési képessége, legyenek akár diákok, hallgatók vagy szaktanárok. Léteznek bizonyos gyakran használt "problémafelvetési stretégiák", amelyekkel facilitálható és egységesebb mederbe terelhető a résztvevők problémafelvetése.

1. Feladatkészítés megadott adatok alapján: *pl. a résztvevők kapnak egy táblázatot egy üzlet forgalmáról, vagy egy kosárlabda csapat eredményeiről, amely adatok kapcsán kell feladatokat kitalálniuk.*
2. Feladatvariálás: *új probléma felvetése már meglévő probléma kapcsán. Ennek egy lehetséges módszere a "what-if-not technika".*
3. Feladat készítése valós szituáció modellezésével: *pl.banki, pénzügyi szituációk modellezése, vagy vírusterjedéssel kapcsolatos problémák megfogalmazása.*
4. Adott témára való feladatkészítés: *pl. űrhajózással, sporttal, túrázással, mesehősökkel, vagy más, előre megadott témával kapcsolatban való problémafelvetés.*
5. Adott témakörre való feladatkészítés: *pl. Pitagorasz-tétellel, vagy lineáris függvényekkel kapcsolatban kell problémákat felvetni.*

A problémafelvetési folyamatot aszerint is vizsgálhatjuk, hogy mennyire szabályozott környezetben kell a résztvevőknek feladatokat kitalálniuk. Ezen osztályzás szerint a problémafelvetés történhet szabad, részben-strukturált és strukturált környezetben. Erre szemléletes példa Xianwei Van Harpen és Norma Presmeg kísérlete [36], melyben a résztvevő majdnem 130 diáknak a következő instrukciók mentén kellett feladatokat felvetnie:

1. Szabad problémafelvetési helyzet: Tíz lány és tíz fiú áll egy sorban. Vessen fel minél több problémát, ami valamilyen módon felhasználja a megadott információkat!
2. A megadott ábrán látható egy háromszög és a beírható köre. Alkosson minél több problémát, melyek valamilyen módon kapcsolódnak ehhez a képhez!

3. Tegnap este buli volt az unokatestvéred házában és a csengő tízszer szólalt meg. Első csengetésre csak egy vendég érkezett. Valahányszor megszólalt a csengő, hárommal több vendég érkezett, mint ahányan az előző csengésre érkeztek.
   a) Hány vendég lép be a tizedik alkalommal? Válaszát részletezze!
   b) Tegyen fel minél több kérdést, ami valamilyen módon kapcsolódik ehhez a feladathoz!

2.3. Szempontrendszer

A problémafelvetési kísérleteink során használt értékelő rendszert Rékasi Annával közösen dolgoztuk ki, részben az olvasott szakirodalmak alapján, részben az egyes kísérletek tapasztalatai alapján. A szempontrendszer összeállításához először is meg kellett fogalmaznunk, hogy mit várunk egy "jó feladattól". Az egyes szempontokra kapható pontszámokat pedig aszerint súlyoztuk, hogy melyik tulajdonságot mennyire tartottuk fontosnak egy feladatnál (például fontosabbnak tartjuk, hogy a felvetett probléma matematikailag helyes legyen, mint hogy illeszkedjen az adott korosztályhoz, mert a matematikailag helytelen feladatokat senkinek nem lehet odaadni, viszont az adott korosztályhoz nem illő más korosztály számára még jó lehet).

A kutatócsoport tagjaival és a kísérletekben részt vevő tanárokkal egyeztetve fogalmaztuk meg, mit várunk egy "jó feladattól". Az ötletelés eredményeképpen az alábbiak fogalmazódtak meg:

1. amikor az adott tananyagot tanítom, akkor jó szívvel fel tudjam adni, ne kelljen rajta sokat változtatni
2. legyen megfelelően, didaktikusan beilleszthető valahová a tananyagba (legyen olyan tananyagrész, amihez illeszkedik)
3. tükrözze a tananyagot
4. többféle szándékkal feladhatok egy feladatot, de legyen olyan tanulási cél, amihez illeszthető az adott feladat (például egy gyakorlófeladatnál nem feltétlenül szükséges az ötletes beöltöztetés, viszont alkalmasnak kell lennie a gyakorlásra).
5. Mit jelent a jó beöltöztetés?
   a) valóban arra kérdezzen rá a feladat, amire rá akar kérdezni (erre meglepő módon számos ellenpélda olvasható Muzsnay Anna és Szabó Csaba beöltöztetett feladatokról szóló cikkében [19])
   b) a megoldás adjon lehetőséget a diszkusszióra a beöltöztetés miatt (a valós szituációt lefordítani a matematika nyelvére és vissza)
   c) ötletesség jelenjen meg a feladat beöltöztetésében

Az elvárások és a szakirodalmak alapján összeállítottunk egy szempontrendszert. Ennek voltak korábbi, kevésbé részletes verziói [23] és [24]-ben. A végső, [25], [26], [8] dolgozatokban használt szempontrendszer látható a 2.1 táblázatban.

A szempontrendszer két fő részre tagolódik, melyekben a *szakmai* és az *élvezetességi* szempontokat külön pontozzuk. A szakmai szempontok közé tartozik, hogy az elkészített feladatok illeszkedjenek valamilyen tananyaghoz és korosztályhoz, megfelelő kihívást jelentsenek a megoldó számára (ne legyen túl nehéz vagy túl könnyű) és matematikailag helyénvalóak legyenek. Az élvezetességi szempontokhoz a feladatok beöltöztetése, korszerűsége, eredetisége és élménynyújtása tartozik.

<table>
<tr><th>Szakmai rész</th><th>pont</th><th>Élvezetességi rész</th><th colspan="2">pont</th></tr>
<tr><td>Valamilyen tananyaghoz illeszkedő</td><td>8 pont</td><td>Újszerű, eredeti, ötletes</td><td>6 pont</td><td rowspan="2">Összegük, kivéve, ha nagyobb, mint 6 pont. Ekkor 6 pont.</td></tr>
<tr><td>Megfelelő kihívást jelent</td><td>4 pont</td><td>Matematikai élmény</td><td>6 pont</td></tr>
<tr><td>Matematikailag helyes</td><td>8 pont</td><td>Beöltöztetés</td><td colspan="2">6 pont</td></tr>
<tr><td>Korosztályhoz illő</td><td>5 pont</td><td>Korszerűség</td><td colspan="2">4 pont</td></tr>
<tr><td colspan="2">Összesen 25 pont</td><td colspan="3">Összesen 16 pont</td></tr>
</table>

2.1. táblázat. Szempontrendszer

Az élvezetességi részben az ötletesség és a matematikai élmény összesen legfeljebb hat pontot ér, azonban ez a hat pont megszerezhető pusztán a matematikai élmény vagy ötletesség alapján. Szerettük volna, ha a beöltöztetés nélküli, vagy nem túlságosan újszerű, azonban nagy matematikai élményt nyújtó feladatok is elérhessenek magas pontszámot ebben a részben. Ugyanígy a matematikailag nem különösebben nagy meglepetést jelentő – pl. gyakorló jellegű – feladatok, amennyiben érdekesen, frappánsan vannak megfogalmazva vagy beöltöztetve, vagy más szempontból újszerűek és ötletesek így szintén magas élvezetességi pontszámot kaphatnak.

Fontos célja a szempontrendszernek, hogy jól elkülöníthetők legyenek egymástól a kiemelkedően jó és a kirívóan gyenge feladatok, ezt szolgálja az egyes szempontok magas pontszáma. A szakmai részre (25 pont) magasabb pontszámot adtunk, mint az élvezetességi részre (16 pont). Ezt azért így állítottuk össze, mert egy feladat szempontjából fontosabbnak tartjuk, hogy be lehessen vinni tanórára és fel lehessen adni diákoknak, mint azt, hogy mennyire élményszerű a megoldása. Természetesen sok pontot lehet szerezni azzal is, ha egy feladat érdekes, megoldása élvezetes. Viszont, ha egy feladat matematikailag nem helyes, vagy egyáltalán nem illeszkedik semmilyen korosztályhoz, azt nem lehet bevinni tanórára. Míg, ha egy feladat nem különösebben kreatív, de matematikailag helyes, akkor az könnyebben átalakítható érdekes feladattá, vagy bevihető egy olyan órára, melynek a gyakorlás a célja, hiszen ilyen órán sok feladatot megoldunk az adott témakörben, melyek között helyet kaphatnak kevésbé élményszerű, de a gyakorlás szempontjából hasznos feladatok is.

Olyan feladatokat szeretnénk jónak nevezni, melyeket jó szívvel be tudunk vinni matematika órán változtatás nélkül. Ezt azért így határoztuk meg, mert ha minden rossz, vagy félig-meddig rossz feladatot, vagyis amiket eredeti formájukban nem tudunk jó szívvel feladni matematika órán, kijavítgatnánk, átalakítanánk nekünk és a csoportjainknak megfelelő formára, akkor nem is lenne szükség új feladatokra, és új feladatgyűjteményekre, hiszen a már létező feladatokat ki-ki a maga módján javítgatná. Azonban tapasztalható, hogy ez a javítás nem történik meg, újabb és újabb tankönyvekben jelennek meg érthetetlenül vagy félreérthetően megfogalmazott, vagy más módon hibás feladatok, amiket a matematikatanárok változtatás nélkül feladnak. Ez nem feltétlenül az ő hibájuk, hiszen teljesen jogos az a jóhiszemű feltételezés a tanár részéről, hogy a tankönyvben olyan feladatokat talál, amiket feladhat a diákjainak, akár önálló munkára is.

Egy olyan szempontrendszert szerettünk volna összeállítani, melynek segítségével aszerint pontozhatjuk a feladatokat, hogy azok mennyire használhatóak fel a matematikaoktatásban. Megállapítottunk olyan „szinteket", amik meghatározzák, hogy melyik feladatokat nevezzük jó feladatnak. Szakmailag jónak nevezzük azt a feladatot, ami a szakmai részben összesen elér legalább 20 pontot, és a szakmai rész valamely szempontjában minimum 80%-ot. Hasonlóan határoztuk meg az élvezetességileg jó feladatokat. Azt a feladatot nevezzük élvezetességileg jónak, ami az élvezetességi részben elér legalább 12 pontot, és valamelyik szempontból az élvezetességi részben minimum 80%-ot. Összességében jónak nevezzük azokat a feladatokat, amik szakmailag és élvezetességileg is jók.

Ha egy feladat csak matematikailag, vagy csak élvezetességileg éri el a jónak nevezett szintet, attól az lehet egy jól használható feladat. Így az ilyen feladatokat, amik legalább az egyik kategória szerint jók, már sikeres problémafelvetés eredményének tekintjük.

2.4. Kísérletek

Rékasi Annával közösen 2018 óta végeztünk problémafelvetéssel, feladatkészítéssel kapcsolatos kísérleteket. Az első két kutatásban [23], [24] tanárszakos hallgatók problémafelvetési képességeit vizsgáltuk, a második kettőben [25], [26] pedig közoktatásban tanuló diákokét. Emellett Czeglédi Csabával is zajlott egy szakképzésben tanuló diákok problémafelvetését vizsgáló kutatásunk [8].

2.4.1. Egyetemi kísérletek

A kutatás rövid leírása

Az első egyetemi hallgatók körében zajlott kutatásunk célja az volt, hogy megvizsgáljuk, milyen kapcsolatban van egymással a matematika tanárszakos hallgatók probléma*megoldási* és probléma*felvetési* képessége. Emellett azt is vzsgáltuk, hogy az évek előrehaladtával lesz-e változás a felvetett problémák minőségében.

A felmérés két fordulóból állt, melyek egy általunk kijelölt konkrét témakör – a derékszögű háromszögek – köré épültek. A résztvevő hallgatóknak először egy általunk összeállított feladatsort kellett megoldaniuk önállóan, 45 perc alatt. Ehhez bármilyen segédeszközt használhattak, de nem kérhettek másoktól segítséget hozzá. A második fordulóban pedig három saját feladatot kellett készíteniük, amelyek különböző nehézségi szintűek (ezt fel kellett tüntetniük, pl. általános iskola 8. évfolyam, vagy 10. évfolyam matematika tagozat). Mindhárom feladatnak derékszögű háromszögekhez kellett kapcsolódnia.

Az előzetes tudás alaposabb feltérképezéséhez a kutatás elemzése során az Algebra és számelmélet3 kurzus hallgatóinál összevetettük eredményeiket a kurzuson írt zárthelyi dolgozatok eredményeivel is. Azért ezen kurzus hallgatóinak eredményeit vizsgáltuk meg legalaposabban, mert a résztvevők 49%-a járt erre az órára a kutatás félévében, ugyanis abban az évben a másod- és a harmadévesek jelentős része is felvette ezt a tantárgyat.

Miután az első egyetemi kísérletben világossá vált, hogy a hallgatók számára nehézséget okoz több jó (oktatásban alkalmazható, egymástól különböző, nem hibás) probléma felvetése, szerettünk volna olyan módszert keresni, amellyel támogatható, fejleszthető a problémafelvetési és feladatkészítési képesség.

Az volt a hipotézisünk, hogy ha a hallgatók találkoznak jó feladatokkal és azok alapján vetnek fel saját problémákat, az fejlesztheti a problémafelvetési, feladatkészítési képességüket. Ezért a kutatásban meg akartuk vizsgálni, hogy egy versenyfeladatra való rávezető feladatsor készítése segíti-e az önálló problémafelvetést. A kísérlet két fordulóból állt, melyekhez a kísérletben részt vevő hallgatókat két részre osztottuk, a hallgatók egyik fele az első fordulóban 3-5 feladatból álló rávezető feladatsort készített egy választott OKTV vagy Arany Dániel versenyfeladathoz (ehhez megadtunk hét feladatot, melyek közül választhattak), a második fordulóban pedig saját feladatokat (ismét 3-5 db) kellett készíteniük a paradicsom, utazás, internet, vasárnap, boszorkány, narancslé, űrutazás témák valamelyikében. A résztvevők másik fele a két fordulóban fordított sorrendben vett részt. Ebben a kísérletben egyéni részvétel mellett 3-4 fős csapatokban is részt lehetett venni, ezt a hallgatók választhatták meg. A jelentkezők két részre bontásakor igyekeztünk az egyedül jelentkező hallgatókat és a csapatokat is véletlenszerűen kettébontani.

A beérkezett, hallgatók által felvetett feladatok pontozását mindkét kísérletben Rékasi Annával közösen végeztük. Mindketten végigjavítottuk és oldottuk a feladatokat, és ahol a pontozásban további kérdéseink merültek fel, tanácsot kértünk Szabó Csaba Tanár Úrtól, Muzsnay Annától, Szeibert Jankától vagy Zámbó Csillától, akik nálunk több tanítási tapasztalattal rendelkeztek. Ezért ismét köszönjük a segítségüket.

Eredmények

Az első kísérletben, melyben a matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési képességeit, és ezek problémamegoldó képességükkel való kapcsolatát vizsgáltuk, a következő eredmények születtek:

- a hallgatók probléma*megoldó* képessége nem függött attól, melyik évfolyamra jártak;
- a hallgatók által *felvetett* feladatok minősége javult az évfolyamok előrehaladtával;

ezek alapján úgy tűnik, hogy amíg a problémamegoldó képesség nem fejlődik az egyetemi évek alatt, addig a problémafelvető képesség fejlődést mutat.

- A hallgatóknak nehezére esett egynél több "jó" feladatot készíteni. Ezért külön megvizsgáltuk a legjobb elért pontszámú feladatukat és a két legrosszabb pontszámú feladatukat.
- A legjobb feladat eredménye alig, vagy egyáltalán nem nő a problémamegoldó képesség függvényében;
- ahogy nőtt a hallgatók két gyengébb feladatának pontszáma, úgy nőtt a problémamegoldó képességük (vagyik az első fordulóban megírt feladatsoron és az Algebra és számelmélet3 zárthelyi dolgozatokon elért pontszámuk is).
- A hallgatók gyakran nem készítettek megoldást a feladataikhoz, így nem vették észre, ha a feladatuk hibás vagy nem megoldható.
- A hallgatók számára nehézséget okozott, hogy felismerjék, milyen korosztályhoz illik a

felvetett problémájuk (pl. nyolcadikos feladatnak szántak egy kilenc-tizedik osztályos ismereteket igénylő feladatot).

Összességében tehát azt láttuk, hogy egyetlen jó feladatot szinte bármelyik tanárszakos hallgató tudott alkotni, viszont három feladat kitűzése során már nagy eltérések láthatóak az egyes hallgatók munkái között. Születtek olyan feladatok, amiket jónak, kreatívnak találtunk, és olyanok, amiket különböző szempontok alapján értelmetlennek, vagy nem kreatívnak ítéltünk.

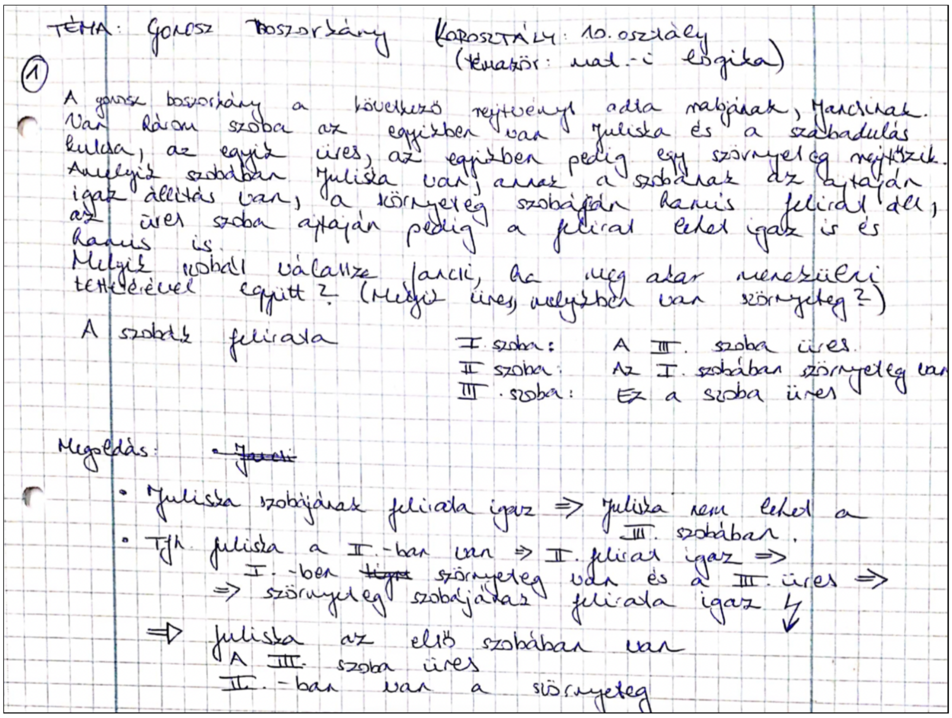
A második kísérletben, amely során a problémafelvetési képesség egy lehetséges fejlesztési módját – a rávezető feladatsor készítését – próbáltuk ki, a következő eredmények születtek:

- a rávezető feladatsor készítése segíti az önálló problémaalkotást;
- a matematika tanítása kurzusok elvégzésével nem hozható összefüggésbe a beküldött feladatok színvonala (ebben a kísérletben azok a hallgatók, akik már több matematika tanítása kurzust sikeresen elvégeztek, *nem* értek el se jobb, de rosszabb eredményeket, mint fiatalabb hallgatótársaik);
- az egyetemet nem az ajánlott ütemterv szerint végző ("csúszó") hallgatók gyenge feladatokat készítettek;
- a csoportmunka sok esetben nem valósult meg (nem közösen készítetek feladatokat, vagy valaki egyáltalán nem vetett fel problémákat, csak a határidők betartására figyelt);
- azok a hallgatók, akiknek először rávezető feladatsort kellett készíteniük, az első fordulóban szignifikánsan jobb eredményeket értek el, mint akik először saját, tematikus feladatokat készítettek. A második fordulóban (a saját, tematikus feladatkészítés során) nem változott az eredményük.
- Azok a hallgatók, akik második fordulóban készítettek rávezető feladatsort, jobb eredményt értek el ezzel, mint az előző fordulóban a saját, tematikus problémafelvetéssel.
- A rávezető feladatsor készítése során sokszor a hivatalos megoldás egyes lépéseire készítettek feladatot a hallgatók. Emellett a rávezető feladatok gyakran túl könnyűek voltak, sőt, volt olyan is, amikor szinte egyáltalán nem is kapcsolódtak az eredeti feladathoz, ezért nem valósult meg a rávezetés.
- Bár ebben a kísérletben már kifejezetten kértük, hogy a felvetett feladataikhoz készítsenek megoldást a hallgatók, ez néhol itt is nehézséget okozott. A saját tematikus feladatok készítésénél gyakori hiba volt a megoldásokban, hogy olyan adatokat használtak, amiket a feladatban nem adtak meg, vagy olyan ismeretet használtak a megoldáshoz, mely a feladat szövegéből nem derült ki. Emellett probléma, hogy nem minden hallgató tudja, mi számít teljes mintamegoldásnak (egyetlenegy szám nem).
- A feladatok nehézségi szintjének megállapítása itt is többször gondot okozott.

Összességében azt mondhatjuk, hogy a rávezető feladatsor készítése segíti az önálló problémaalkotást, azonban pusztán annak a feladatnak az elvégzése, hogy a hallgató egy nehezebb feldatra felkészítő feladatsort készítsen, még nem változtat senkit tökéletes és gyakorlott problémafelvetővé. Érdemes és szükséges a tanárszakos hallgatók problémafelvető képességét fejleszteni, hiszen matematikatanárokként fontos lesz számukra, hogy jól alkalmazható, érdekes feladatokat tudjanak alkotni. A kutatás eredményeiből kiindulva jó kezdeti módszernek látszik az, ha a problémafelvető tevékenységet már meglévő problémák elemzésével és variálásával, vagy hozzájuk kapcsolódó feladatok készítésével kezdjük. Ennek az lehet az oka, hogy így a rávezető feladatkészítés során már láttak jó problémát, alaposan körüljárták, foglalkoztak vele, gondolkodtak róla. Így némi rálátást nyerhettek a jó problémák karakterisztikájára, és saját problémák is eszükbe juthattak a problémamegoldási folyamat során.

Példák: "A jó, a rossz és a csúf"

Szeretnék az alábbiakban megmutatni néhány, a hallgatók által készített feladatot. Ezek között találhatók jól és kevésbé jól sikerültek is, és megfigyelhetők különféle elkészítési módok (szövegszerkesztőben készített feladatok, lefényképezett kézzel írt feladatok, vagy csupán az email törzsszövegeként elküldött feladatsor).


TÉMA: Gonosz boszorkány KOROSZTÁLY: 10. osztály
(témakör: mat.-i logika)

(1)

A gonosz boszorkány a következő rejtvényt adta rabjának, Jancsinak. Van három szoba az egyikben van Juliska és a szabadulás kulcsa, az egyik üres, az egyikben pedig egy szörnyeteg rejtőzik. Amelyik szobában Juliska van, annak a szobának az ajtaján igaz állítás van, a szörnyeteg szobáján hamis felirat áll, az üres szoba ajtaján pedig a felirat lehet igaz is és hamis is.
Melyik szobát válassza Jancsi, ha meg akar menekülni kedvesével együtt? (Melyik üres, melyikben van szörnyeteg?)

A szobák felirata

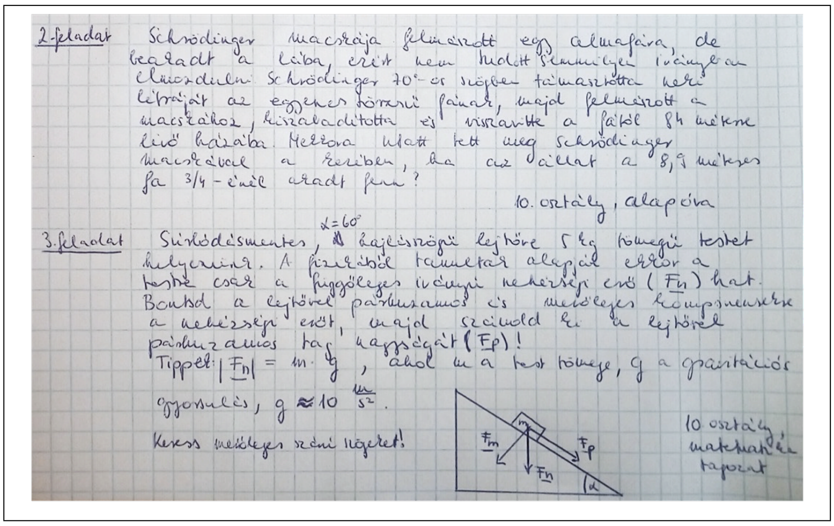
I. szoba: A III. szoba üres.
II. szoba: Az I. szobában szörnyeteg van
III. szoba: Ez a szoba üres

Megoldás: ~~• Jancsi~~

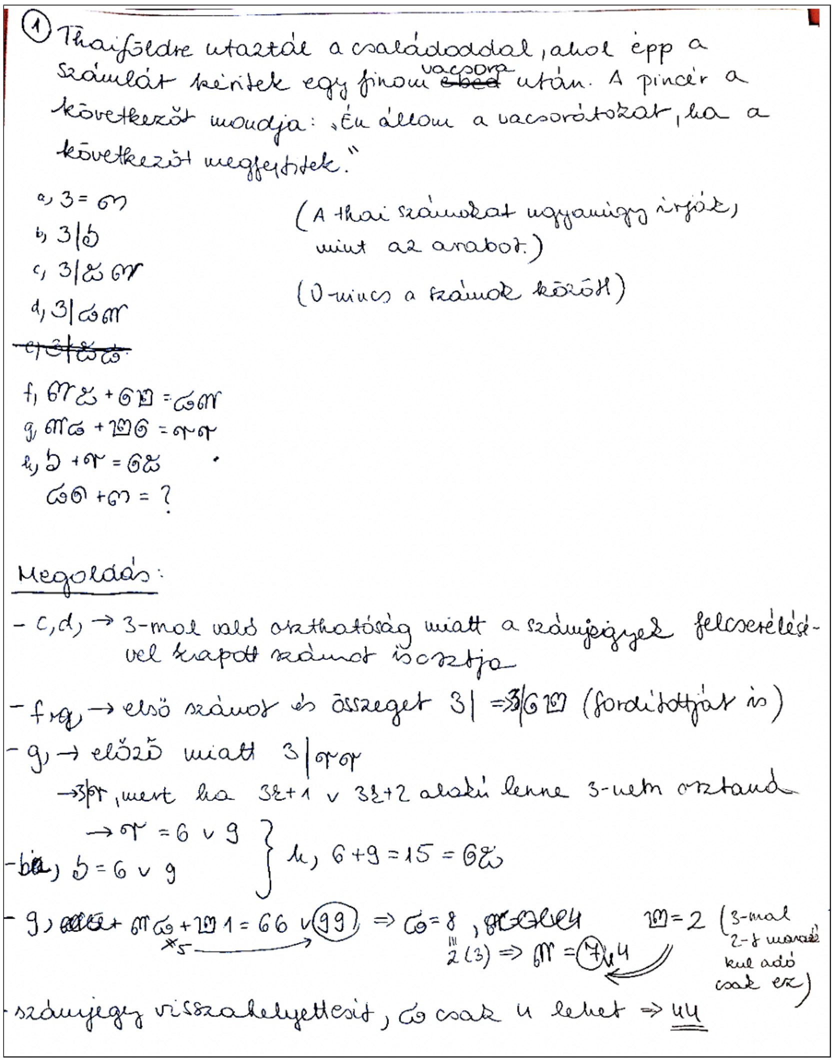
• Juliska szobájának felirata igaz ⇒ Juliska nem lehet a III. szobában.
• Tfh. Juliska a II.-ban van ⇒ II. felirat igaz ⇒ I.-ben szörnyeteg van és a III. üres ⇒ ⇒ szörnyeteg szobájának felirata igaz ↯

⇒ Juliska az első szobában van
A III. szoba üres
II.-ban van a szörnyeteg

2.1. ábra. Gonosz boszorkány témára készített, 10. osztályos matematikai logika feladat.



2.2. ábra. Derékszögű háromszögek témakörében készített 10. osztályos feladat.



2.3. ábra. Utazás témakörben készített feladat.

Az – egyébként nagyon érdekes beöltöztetésű – 2.3, 2.4, 2.5 feladatokhoz a problémafelvető nem írt kitűzött szintet vagy évfolyamot.

② A thaiföldi nyaralás alatt jetskizni mész.
Tudod, hogy a jetski fogyasztását a sebesség függvényében a következő fgvény írja le:
$f(x) = x^2 - 30x + 232$
Ha 20l van a tankban legfeljebb milyen messze tudsz menni a parttól, hogy még vissza is tudj menni?

MO: – $f'(x) = 0$ → ezzel a sebességgel fogyaszt a legkevesebbet
– $f(x)$-be visszahelyettesít → fogyasztás óránként
– 10 literrel ilyen fogyasztással → ~~megtett~~ megtehető táv szárazföldtől

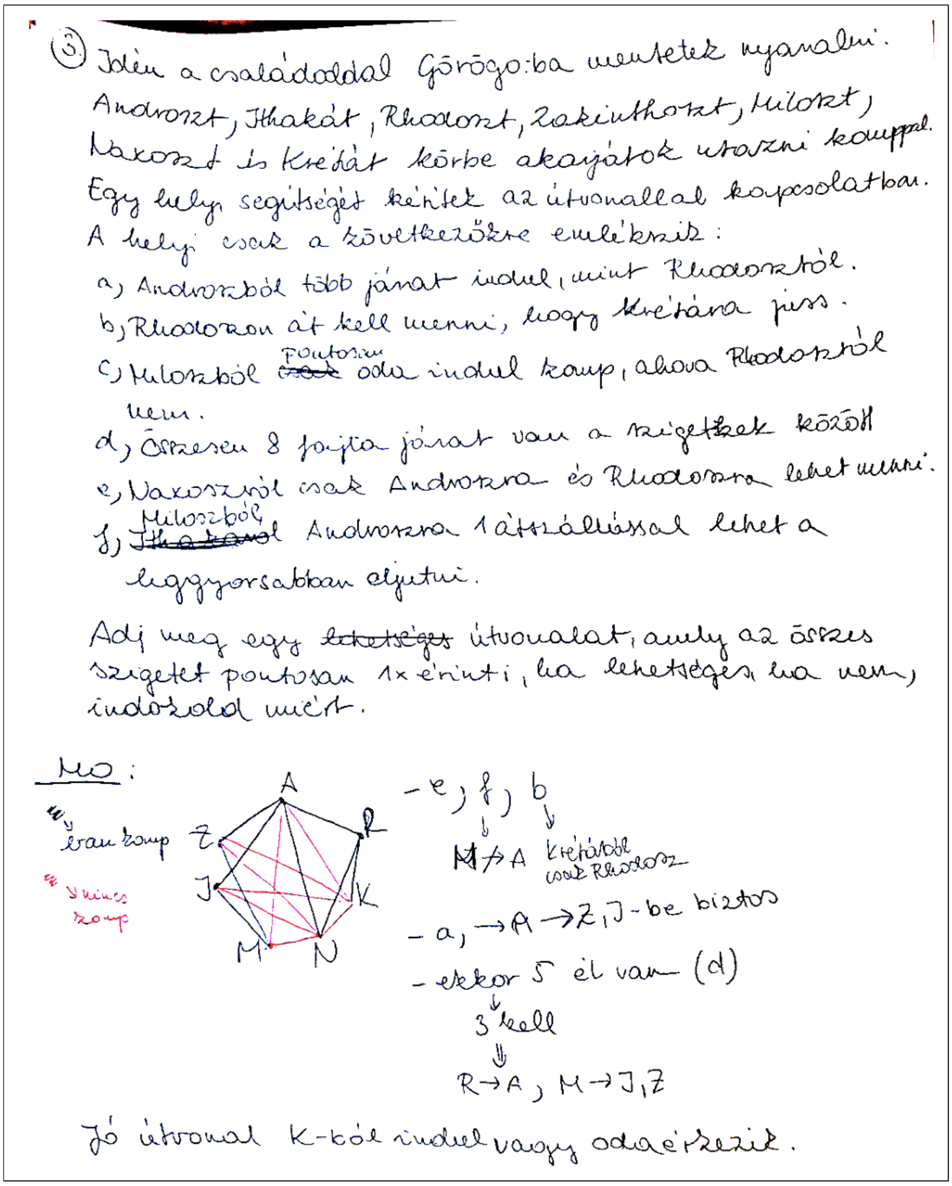
2.4. ábra. Utazás témakörben készített feladat.

N [redacted]@gmail.com> 2018. okt. 23., K 21:40
címzett: én

A 3 feladat pedig a következő:
1., Van egy derékszögű háromszögünk, amelynek 3,4,5 az oldal hosszúsága. Ebbe a háromszögbe 0,5 sugarú köröket szeretnénk beírni. Hány darab kört tudunk beírni a háromszögbe? (8. osztály, versenyfeladat)
2., Van egy 8x16-os téglalapunk, amelynek az oldalfelezőit összekötve egy új téglalapot és négy derékszögű háromszöget kapunk. Ismét összekötjük az téglalap oldalfelezőit, és még kisebb téglalapot, és még 4 derékszögű háromszöget kapunk. Tovább folytatjuk a szeletelést, hányadik alkalommal fogunk olyan háromszöget kapni, amelyben az átfogó kisebb, mint 2 egység? (7.osztály, gyakorló feladat)
3., Egy hegyről gyönyörű a kilátás, viszont csak becsülni tudjuk a távolságok nagyságát a hegy tetején lévő kilátóból. Itt ismert néhány adat, számoljuk ki a tereptárgy távolságát a kilátótól! A tárgyat, a hegyet és a kilátót is tekintsük pontszerűnek. A meglévő adataink: hegy magassága 500 méter, a kilátó magassága 20 méter, a kilátóból a tereptárgy 70 fokos szögben látszik. (Magyarul kirajzolódik egy derékszögű háromszög, amelyben az egyik befogó a kérdés, a másik 500+20=520 méter magas. Az átfogót nem tudjuk, de ismerjük mindhárom szöget, mert a tereptárgynál 20 fokos a szög.) (10. osztály, gyakorló feladat)

Üdvözlettel,

2.6. ábra. Derékszögű háromszögek témakörében készített feladatok – itt kifejezetten nem értettünk egyet a feladatok szintezésével, a legelsőt (8. évf.) például mi magunk sem tudtuk megoldani a feladatok kiértékelésekor.


③ Idén a családoddal Görögországba mentetek nyaralni. Androszt, Ithakát, Rhodoszt, Zakinthoszt, Miloszt, Naxoszt és Krétát körbe akarjátok utazni komppal. Egy helyi segítségét kértek az útvonallal kapcsolatban. A helyi csak a következőkre emlékszik:

a) Androszból több járat indul, mint Rhodoszról.

b) Rhodoszon át kell menni, hogy Krétára juss.

c) Miloszból ~~csak~~ pontosan oda indul komp, ahova Rhodoszról nem.

d) Összesen 8 fajta járat van a szigetek között.

e) Naxoszról csak Androszra és Rhodoszra lehet menni.

f) ~~Ithakáról~~ Miloszból Androszra 1 átszállással lehet a leggyorsabban eljutni.

Adj meg egy ~~lehetséges~~ útvonalat, amely az összes szigetet pontosan 1x érinti, ha lehetséges, ha nem, indokold miért.

Mo:

– e, f, b

$M \not\to A$ Krétáról csak Rhodosz

– a, → A → Z, J-be biztos

– ekkor 5 él van (d)

3 kell

$R \to A$, $M \to J, Z$

Jó útvonal K-ból indul vagy oda érkezik.

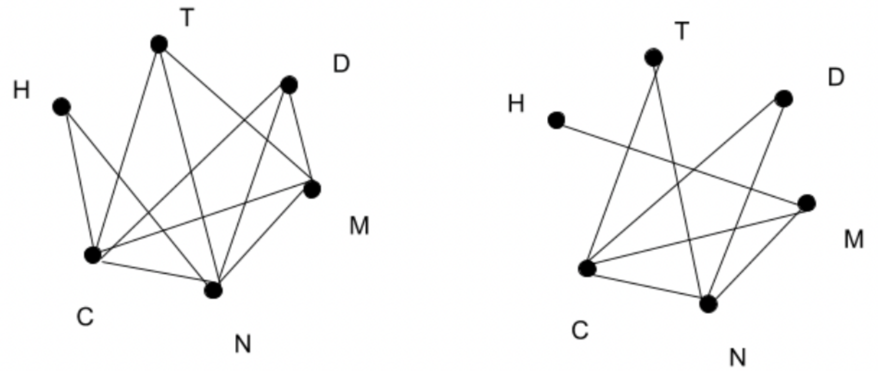
2.5. ábra. Utazás témakörben készített feladat.

2. feladat

A Galaktikus Birodalmi Űrhajópálya Mérnökség szeretne új útvonalakat létrehozni néhány bolygó között, hogy szükség esetén gyorsabban mozgósíthassa rohamosztagosait. Sajnos a tervrajzok elvesztek, csak néhány feljegyzés maradt fent róluk, amelyek azt tartalmazzák, hogy melyik bolygóról hány útvonal indul ki. Próbáld meg rekonstruálni a rajzokat ha lehet, ha nem lehet, miért nem?

Hoth	2	2	1	1
Tatooine	3	2	2	2
Dagobah	3	3	2	4
Mustafar	4	3	3	4
Naboo	5	4	4	5
Coruscant	5	5	4	5

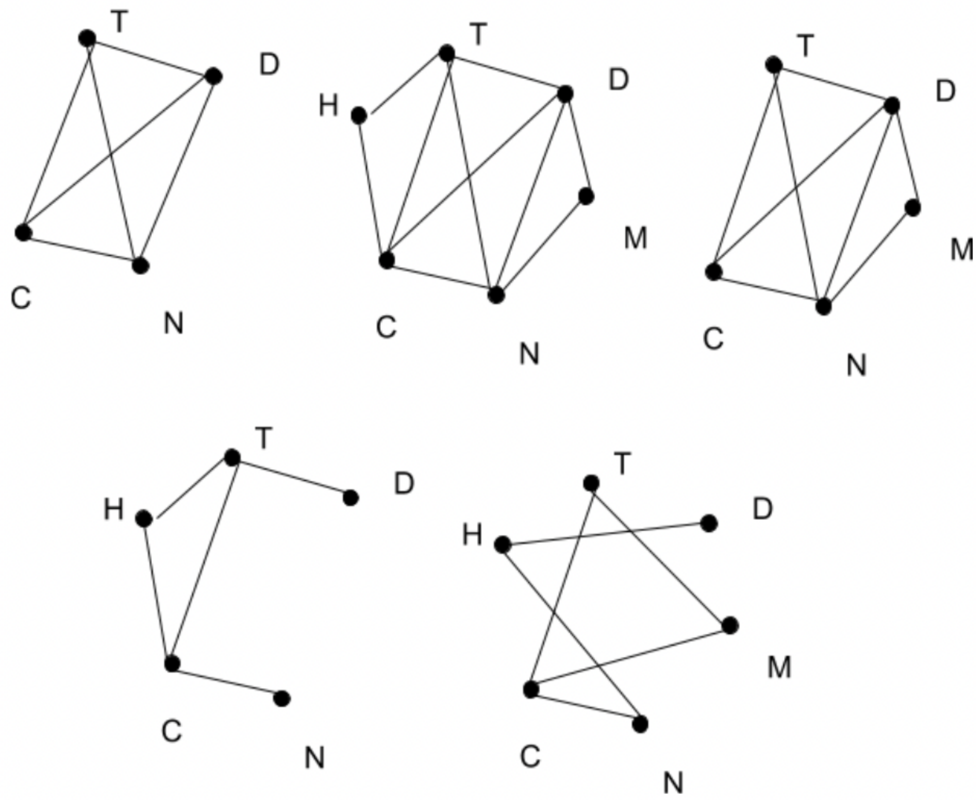
A harmadik nem lehetséges, mert a fokszámok összege páratlan.
A negyedik sem lehetséges, mert ha két öt fokszámú csúcs van, akkor nem lehet egy fokszámú.



2.7. ábra. Űrutazás témára készített, 9. osztályos gráfelméleti feladat.

3. feladat

Han Solo és a Csubakka következő csempészútján az előbbi hat bolygót érinti, amelyek közül bármely két bolygó közt van közvetlen útvonal. Egy bolygón akár többször is járhatnak, de nem feltétlenül jutnak el mindegyikre. A következő útvonalakat tervelték ki:



Melyiket tudják végigjárni úgy, hogy egyik szakaszon sem járnak kétszer?

Az elsőt és a negyediket nem tudják végigjárni, mert több, mint két páratlan fokszámú csúcsot tartalmaznak.

második: H, T, C, D, M, N, D, T, N, C, H
harmadik: C, D, N, T, C, N, M, D
ötödik: D, H, N, C, M, T, C

2.8. ábra. Űrutazás témára készített, 9. osztályos gráfelméleti feladat.

Végül, megmutatva, milyen nehézségett okozott néhány évfolyamtársunknak a problémafelvetési tevékenység, mellékelek egy emailt is, amit az egyik egyetemi kísérlet során kaptunk:

Sziasztok!

Sokat késtem a válasszal ahhoz képest is, amit mondtam, hogy csúszásban vagyok.

Ennek fő oka az, hogy a második forduló egyszerűen kifogott rajtam. Nem jutottak eszembe olyan lehetséges feladatok, amik szerintem megfelelőek lettek volna, talán csak 1db. Éppen ezért tudom, hogy már alapvetően nem vagyok jogosult a fél jegyre, le is mondok róla a saját részemről.

Összekapartam viszont azt a 3 feladatot ami szerintem a legközelebb állt az elképzeléseitekhez, ezeket mellékelem, hátha fel tudjátok használni.

Ha igénylitek, kitöltöm a harmadik fordulót is, persze plussz jegy nélkül. Remélem azért valamennyit segít.

Üdvözlettel

2.9. ábra. A problémafelvetés nehézségeit bemutató üzenet.

2.4.2. Középiskolai kísérletek

Miért fontos a problémafelvetés matematikaórán?

A matematikaoktatásban mindig is egyértelmű volt, hogy a problémamegoldásnak fontos szerepe van a matematikai ismeretek elsajátításában. Egy meglehetősen korai példa erre a Krisztus előtti második évezredben írt Rhind papirusz, ami aritmetikai, algebrai és geometriai feladatokat tartalmaz megoldásokkal [11]. Ennél kevésbé egyértelmű az a kérdés, hogy a problémafelvetésnek van-e helye és haszna a matematikatanításban.

Több okból is hasznos, ha a diákok matematikaórán foglalkoznak problémafelvetéssel és feladatkészítéssel. Egyrészt a problémafelvetés eszközöket ad a kezükbe, amikkel nehezebb, elsőre nem megfogható problémákat átalakíthatnak ismerősebb, jobban kezelhető problémákra. Másrészt, több, diákok problémafelvetésével foglalkozó kutatás is leírja, hogy a feladatkészítés, problémafelvetés és egymás problémáiban való elmélyülés nagymértékben növeli a diákok matematikatudását [6], [27]. Rendszerezi, mélyíti a feladatok témakörével kapcsolatos ismereteket és mindezt egy különleges, szórakoztató formában teszi [36].

Számos érdekes kutatást olvashatunk, melyekben több osztály tanulói vettek részt matematikaórán problémafelvetési, feladatkészítési tevékenységben. Már egészen fiatal korú általános iskolásoktól kezdve [3] egészen végzős gimnazistákig [36] mindenféle diákkal foglalkoznak a kutatók.

A kutatás leírása

Első középiskolásokat vizsgáló kutatásunkat Rékasi Annával 2020 tavaszán indítottuk el, a távoktatás keretében. Összeállítottunk egy tájékoztató leírást a tanárok számára 2.4.4, melyet több iskolába elküldtünk, valamint az Oktatási Hivatal honlapján is elérhető volt, mint a “tanulást támogató további hasznos anyag” [37]. A leírás olvasható a 2.4.4 mellékletben is. Célunk az volt, hogy megvizsgáljuk, hogy hogyan és milyen feladatokat tudnak felvetni a részt vevő diákok (alapvetően felső tagozatos és középiskolás korosztály); valamint, hogy lássuk, milyen típusú és témakörű feladatok érdeklik őket.

A résztvevő osztályok és csoportok diákjai a problémafelvetési-feladatkészítési gyakorlat során 3-4 fős csapatokat alkotak és csoportmunkában készítettek feladatokat. Minden csapat egy 4-5 feladatból álló feladatsort készített (és hozzájuk megoldást), valamilyen problémafelvető stratégia szerint. Több lehetséges stratégiát is leírtunk (ezek a 2.2 fejezetben és a 2.4.4 mellékletbeli leírásban is megtalálhatóak). Ezek közül a stratégiák közül a szaktanárok tetszés szerinti számút ismertethettek a diákjaikkal.

Kértük, hogy a feladatokat kitaláló csapat írja le, hogy milyen feladatmegoldási stratégiával, módszerrel dolgoztak, és hogy milyen motivációjuk vagy céljuk volt a feladat elkészítéséhez, elkészítésével (pl.: mindenképpen mágneses vonatokról szóló feladatot akartak készíteni, vagy rávezető feladatokat készítettek egy általuk ismert versenyfeladathoz, vicces feladatsort akartak csinálni, stb). A diákok az elkészült feladataikat először a szaktanárnak küldték el. Ő átnézte, kijavította, és értékelte a csapatok beérkezett feladatait egy általunk összeállított szempontrendszer alapján, ami az 2.1 táblázatban látható szempontrendszerünknek egy némileg egyszerűsített változata Így volt lehetőség javítani a hibás feladatokon.

Ez után a szaktanár koordinálásával a minden csapat megkapta egy másik csapat feladatsorát. Ők megoldották a kapott feladatokat, majd értékelték ezeket. A diákok számára is összeállítottunk egy szempontrendszert egymás feladatainak értékeléséhez, ez szintén egy leegyszerűsített változata a 2.1 táblázatbeli szempontoknak. Az értékelés mindkét esetben Google Forms felüeteken történt, így mi is láthattuk az eredményeket, emellett a tanárok az elkészített feladatokat is feltöltötték ide az értékelés részeként.

A tanárok és a diákok szempontrendszere nem egyezett meg teljesen, mert egy szaktanár egészen más szempontok szerint nézi meg a diákjai által kitalált feladatokat, mint egy olyan csapat, akik diákként, és nem tanári szemmel nézve oldják meg a kapott feladatsort. A két szempontrendszer az 2.2 táblázatban látható.

Kutatásunkba több iskolából kapcsolódtak be szaktanárok. Részt vett a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium egyik tanárnője, a Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium tanárnője, az ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimnázium és Kollégium egyik tanárnője, és a hódmezővásárhelyi Németh László Gimnázium, Általános Iskola egyik tanárnője is diákjaikkal.

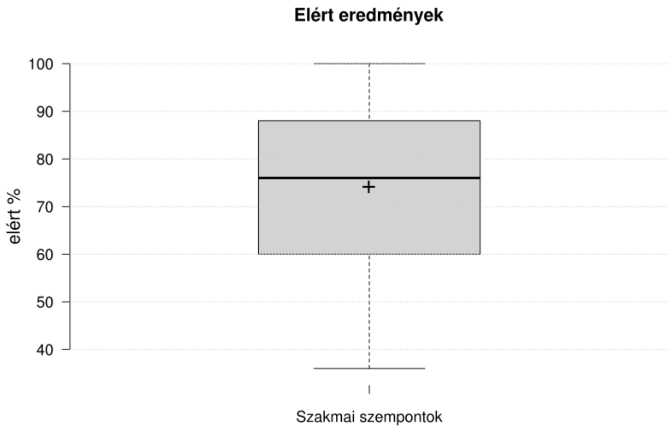
<table>
<tr><th colspan="2">Tanári szempontrendszer</th><th colspan="2">Diák szempontrendszer</th></tr>
<tr><th>Szempontok</th><th>pont</th><th>Szempontok</th><th>pont</th></tr>
<tr><td>Megoldható</td><td>2</td><td rowspan="2">Mennyire kapcsolódik az idei tananyaghoz?</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Korosztályhoz illő</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Érthetően megfogalmazott</td><td>1</td><td rowspan="2">Érthetően megfogalmazott</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Matematikailag helyes</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Beöltöztetettség / valós szituációba való beépítése (ha van)</td><td>1</td><td rowspan="2">Kihívást jelent-e?</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Kihívást jelent-e?</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Mennyire eredeti, újszerű?</td><td>2</td><td>Mennyire újszerű?</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Élvezetes, ötletes-e?</td><td>1</td><td>Élvezetes, ötletes-e?</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="2">Összesen 10 pont</th><th colspan="2">Összesen 6 pont</th></tr>
</table>

2.2. táblázat. Tanári és diák szempontrendszerek

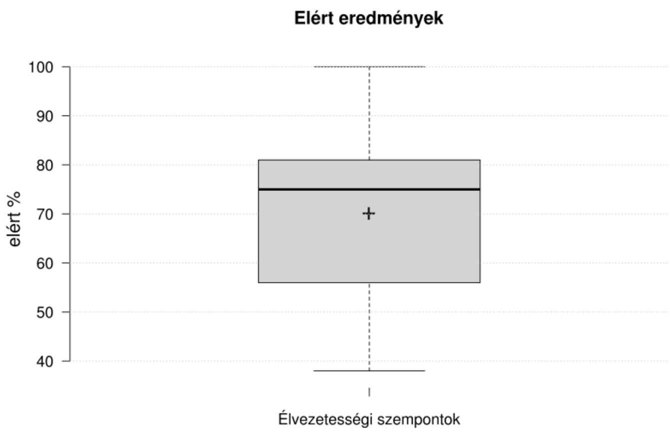
A teljes csoportok elkészült feladatait és értékeléseit technikai nehézségek és a távolléti oktatásból adódó problémák miatt azonban csak a két Fazekas Mihály Gimnázium csoportjaiból kaptuk meg a TDK dolgozatok megírásakor. A hozzánk beérkezett feladatokat Rékasi Annával mi is megoldottuk és értékeltük a 2.1 táblázatbeli szempontrendszer szerint.

Eredmények

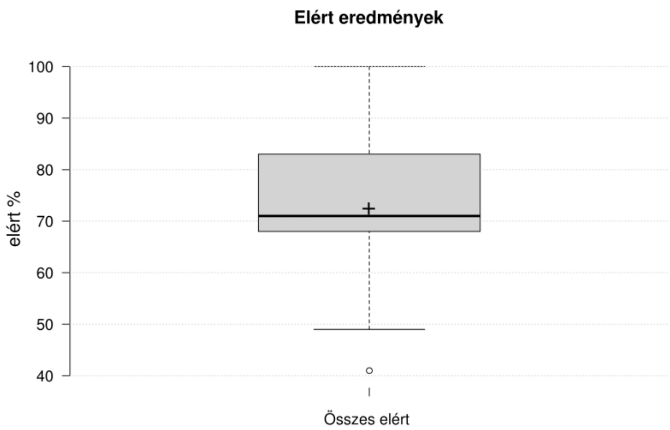
A diákok által elkészített, beküldött, majd általunk értékelt feladatok között számos jó, és számos gyengébb feladat is szerepelt. Összesen 21 csapattól kaptunk feladatokat. Ezek közül, az általunk meghatározott szempontok és minimumfeltételek alapján 10 feladat volt szakmailag jó, 11 feladat élvezetességileg jó. Összesen 6 feladatsor került az "összességében" jó kategóriába, azaz ennyi feladat lett szakmailag és élvezetességileg egyaránt jó. A diákok feladatai között voltak nagyon jól sikerültek, de voltak olyanok is, akik szó szerint kimásoltak valahonnan egy-egy feladatot. Születtek nagyon vicces feladatok is: volt, ahol nagyon jól látszott, hogy a tanulók nagyon élvezték, hogy belevihetik kreativitásukat a feladatkészítésbe.



2.10. ábra. A beküldött feladatsorok százalékos eredményei szakmai szempontok szerint



2.11. ábra. A beküldött feladatsorok százalékos eredményei szakmai szempontok szerint



2.12. ábra. A beküldött feladatsorok százalékos eredményei összesítve

A 2.10, 2.11, 2.12 ábrákon a beküldött feldadatok százalékos eredményeiről készült sodrófa-diagramok láthatók. A TDK dolgozatban [25] bemutatott oszlopdiagramok pedig a 2.4.4 mellékletben láthatók.

Példák

Szeretnék bemutatni néhány, a középiskolások által készített feladatot is. Ezekben látható lesz a diákok néhány fő érdeklődési köre, mint például kedvenc színészeik (és tanáraik) magánélete, filmek és mesék szereplői, vagy a kísérlet idején kitörő koronavírus-járvány.

Elsőként egy olyan feladatsor látható (2.13 ábra), melyet egy 10. évfolyamos csapat írt, fő témája pedig Timothée Chalamet színész és az egyik csoporttag közös kalandjai. Ez a feladatsor a mi pontozási rendszerünkben nagyon magas pontszámot ért el mind szakmai, mind élvezetességi szempontokban, emellett a szaktanáruk és a feladatsort megoldó diákok is nagyon jóra értékelték a feladatokat. Bár matematikailag nem jelent mindig különösebb kihívást a feladatsor megoldása, de érthetően, jól megfogalmazott, ötletes és jó beöltöztetésűek az itt látható feladatok.

1. Timothée Chalamet tervei

Timmy úgy döntött, hogy éveken át tartó romantikus, de sikertelen udvarlások után külső segítséget kér a "Nagy Ő" megtalálásához. Ezért felkereste [redacted] Flóra és [redacted] Panni európai statisztikus barátait, hogy szembesítsék őt a tényleges adatokkal: hány nő van a világon, aki tökéletes lenne számára?

1. A világon jelenleg 3 861 911 923 nő él. Timothée számára azonban a legideálisabbak a 16-24 év közötti nők, kiknek száma 572 115 168.

A) Hány százaléka az ideális nők száma az összes nő számának?

B) Az ideális korú nők 43%-a vár még az igazira. Hányan vannak ők?

C) Ám a házasságra váró, ideális korú nők közül sem tud mindenki bagelt sütni, amely köztudottan Timmy legkedveltebb étele, csupán 0,5%-uk. Hány olyan nő van, aki az ezelőtti feltételeknek megfelelve még a bagel sütésre is képes?

D) Viszont közülük sem ismeri mindenki Timothée nevét (mivel műveletlenek), csupán 40%-uk. Hányan vannak?

E) Az eddigieknek megfelelt nők 1/3- a érdeklődik a férfiak iránt. Ők hányan vannak?

F) Ezen nők tízezredrésze tud olaszul beszélni, amely Timmy gyengéje. Hány olaszul tudó nő van köztük?

G) Timothée a humorok és viccek embere, emiatt fontos/döntő tényező nála az adott lány humorérzéke. Ezen az úton haladva kiválasztja a TOP5 legviccesebb lányt. Azonban emellett fontos számára a lány magassága is. Ő maga 178 cm magas, vagyis ennél alacsonyabbnak kell lennie a lánynak. Panni a lányok magasságát növekvő sorrendbe tette, és tapasztalatai alapján azt tanácsolta, hogy Timothée az adatok mediánjához tartozó lányt válassza.

165 cm= Dove Cameron, 177 cm= Zendaya, 166 cm = Madison Beer, 170 cm = [redacted] Anna, 172 cm =Dua Lipa

Kihez tartozik a medián? (mi az itt felsorolt adatok mediánja?)

2. Anna és Timothée életének következő fejezete

A) Anna és Timmy közös életébe belépett a társasjáték (jujuj). Egyik játékest folyamán, mindketten lejegyezték a dobásaikat (egy kockával dobnak, fejenként tízszer). Az összesített dobás így nézett ki: Anna: 4,6,5,2,1,4,3,5,3,2. Timothée: 3,5,2,3,5,1,3,2,4,1.

a) Készítsd el a mért adatok gyakorisági táblázatát!

b) Mennyi a dobott számok átlaga?

c) Mekkora a kapott eredmények mediánja, módusza?

d) Készíts oszlopdiagramot a mérési eredményekről!

3. Casino

Valentin-nap alkalmából Timothée és Anna úgy döntenek, Párizsba utaznak. Az egyik itt töltött estélyükön a kaszinózást választják programjuknak. Miután megérkeztek a szórakozóhelyre, és lenyűgöztek minden paparazzo-fotóst korszakalkotó stílusukkal, belekezdenek a játékba.

A) Először egy olyan játékkal játszanak, amely a matematikához kapcsolódik, mert mindkettőjük matektanára, Szeibert tanárnő és Ms. Lawton is nagyon jól kitanította nekik a valószínűségszámítás csínját-bínját. A játék során egy dobókockával dobunk. A hosszú, bonyolult játékot úgy lehet elkezdeni, ha valaki hatost dob. Mennyi a valószínűsége annak, hogy Timmy ötödjére dob hatost?

B) Mivel az első játék nagyon könnyen ment kedvenc sztárpárunknak, így a következő játék is dobókockákkal kapcsolatos. A krupié egy dobókockával 8 dobást végez, és arra kell fogadniuk, hogy ebből hányszor dob egyest. Anna szerint háromszor- de mennyi ennek a valószínűsége?

4. Hazafelé

A sikeres és élménydús párizsi út végeztével Anna és Timothée repülőre száll, hogy hazainduljanak new york-i lakásukba. A repülő út azonban 1 órával később indul a tervezettnél, ezért azon tanakodnak, hogy mivel tudnák eltölteni a várakozási időt. Egy játékot szeretnének kitalálni, amiben közösen dobálnak egy érmet, és fogadnak, hogy fej lesz-e, vagy írás. Mivel annyira tisztelik egymást, arra jutottak, hogy csak olyan játékot játszanak, amelyben ugyanannyi esélyük van nyerni.

Találj ki egy ilyen játékot!

2.13. ábra. 10.A, 4. csapat feladatsora

A következő 2.14. feladatsor a koronavírus-járvánnyal és gazdasági következményeivel foglalkozó feladatok egyike. Némileg szürreális, túlzó helyzeteket ír le, azonban szórakoztató formában – a csoporttársak tetszését is elnyerte. A feladatsor után látható egy rövid leírás, melyben a diákok megfogalmazzák, hogyan és milyen szándékkal készítették el a feladatsort.

1. A bankszámlámon volt fél millió forint. Két fertőtlenítőszert akartam venni, aminek az ára, tekintettel a szűkséghelyzetre, a négyzetére emelkedett, majd az állam kivetett rá egy 25%-os áfát, és a cég is nyerészkedni kívánt, ezért rárakott darabonként tízezer forintnyi haszont. A vásárlás után maradt nyolcvanezer forint a zsebünkben. Mennyibe került a termék eredetileg? Ebből meg vettem a Tescoban müzlit, ami 230 forint volt eredetileg, de ez is hasonló változáson ment keresztül. Mennyi pénzünk maradt?
2. Peti és Tomi a táblánál oldanak meg két egyenletet, melyeknek azonos a végeredménye. Mivel két és fél méterre álltak egymástól, ezért nem látták a másik megoldását. Levezetve azonban nem ugyanaz az érték jött ki, mert valaki az első egyenletből letörölt egy elemet a végéről. Így ez lenne a jó a két egyenlőség: 2x^2-20x-6(51+p)=0, 3p^2+36p-324=0. Mi az x értéke? (p értéke pozitív egész szám)
3. Brit tudósok bonyolult számítások után a következő egyenletrendszert tudták felírni úgy, hogy a másodfokú egyenlet x-re kapott eredménye egy százalék, amely megmutatja az emberiség túlélési esélyeit a koronavírussal szemben. 5x^2+65xy-27x-57y-1029=?, 5x+9y=58, 12x+y+62=160 Mennyivel egyenlő az x?
4. Egy áruházban maszkokat árulunk, egy maszkot a piacon 30$-ért vettük meg, és x$-ért adtuk el. Ha egy nap P db maszkot adunk el, akkor tudjuk, hogy a P=100-2x összefüggés mindig helyes lesz. Ezen a napon 200$ bejövetelünk volt. Mennyi maszkot árultunk (P), és egy maszkot mennyiért (x)?

Értékelés

Az első feladatunk egy megfelelő téma kiválasztása volt, amire épülhetett a feladataink szövege. A jelenlegi helyzetből kiindulva jutottunk arra a döntésre, hogy feladatainkkal egyfajta társadalomkritikát fogalmazunk meg. Célunk volt az emberek által keltet teljes pánik, vásárlási láz, általános viselkedésmód kifigurázása. A feladatok nagy részét visszafelé, a megoldástó indulva építettük föl, fogalmaztuk meg. Az első feladatban reflektáltunk a hirtelen árnövekedésekre, kifigurázva azokat. Kifejezetten nehéz volt a feladat megalkotása, mert hozzá kellett szoknunk a visszafelé történő gondolkodáshoz. A második feladatban a távolságtartást igyekeztünk megjeleníteni. Ennél a feladatnál már könnyebben ment a feladat megfogalmazása. A hármasnál a tipikus brit tudósok viccet kívántuk elsütni. A negyésnél, pedig a maszkok vásárlása volt a téma. Összességében sikerült mindegyik feladatra egy részét ennek a témának kiosztani.

2.14. ábra. 10.A, 2. csapat feladatsora és reflexiója

Az alábbi 2.15. feladatot szinén 10. évfolyamon készítette egy csoport. Ennek a csoportnak inkább a beöltöztetés kreatív módja volt a célja, nem pedig egy nagyon nehéz feladat megalkotása. Ezt a reflexiót írták a feladathoz: “*A feladat alapvetően túl egyszerű lett volna, úgyhogy úgy döntöttünk, hogy egy kis rejtvényt rakunk bele. Matematikai nehézségében bár lehet nem a legnehezebb, de az előző feladatok után inkább egy kis szórakoztató, kreatív feladaton állapodtunk meg. Témánk és célunk, mint az egész feladatlapon keresztül is, a sztorinak a hatása és változatossága, illetve hogy az ember ‘meg akarja oldani a feladatot’ és több kis lépésben jusson el a megoldásig.*”

4. feladat

AKC Misi magyar előadó új albumot készít, de az album kijövetelének idejét nem árulja el rajongóinak. Rengeteg követelőzés után kiposztolta, hogy legnépszerűbb számának első négy sorában van elrejtve sorban a három együttható, ami ahhoz a másodfokú egyenlethez szükséges, amelynek gyökei az album kijövetelének dátumát rejtik. Az első négy sor így hangzik(:

'Hajnali egykor odaszól a haverom

Hogy fejezzem be a 28%os konyakom

96 napja nem voltam ilyen jól

De fejemben megint csak a részegesdallam szól'

2.15. ábra. 10.-es csoport egy feladata

Az utolsóként bemutatott 2.16. feladat egy kevésbé jól sikerült munka. Bár jó az alapötlet és egy kamaszok életében gyakran előforduló szituáció köré épül a beöltöztetés, a megfogalmazás pontatlan vagy hibás és a matematikai rész nem igazán illeszkedik a feladat szövegéhez.

1. Feladat

Egy apuka összeveszett a lányával, aki felháborodott és meglérdezte, hogy akkor mennyi lehetősége van kijutni ebből a problémából? Az apuka ideges volt, és ahelyett hogy direct választ adott volna azt mondta hogy ennek a másodfokú egyenletnek a megoldásszáma az ő opcióinak a száma? Vol egyáltalán opciója, vagy cask s kizárólaga szülő akarata érvényesülhetett (azaz nincs megoldása az egyenletnek)?

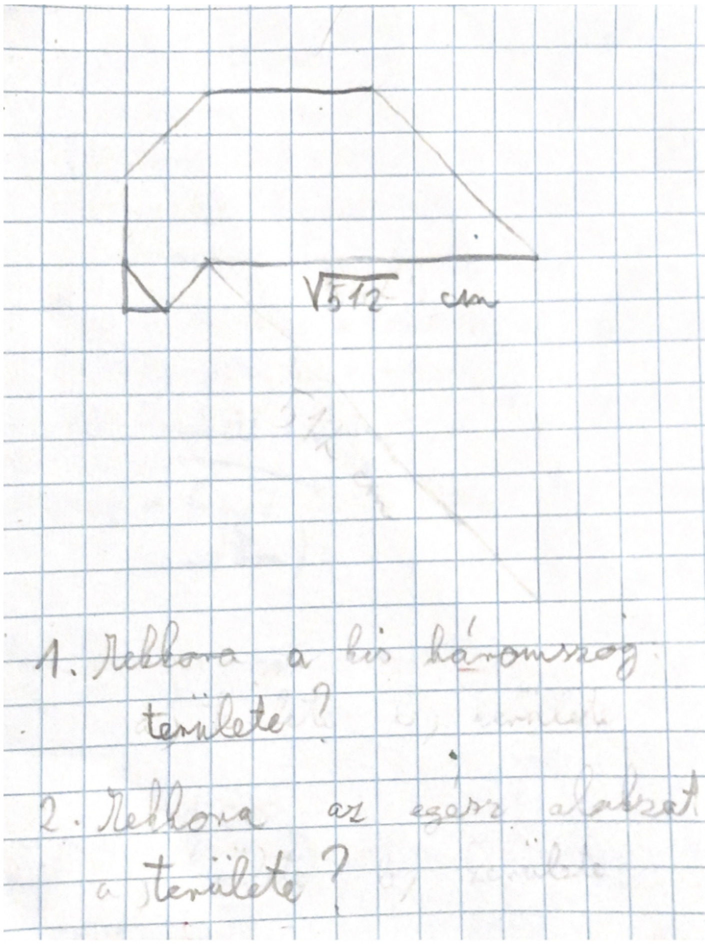
$$8x^2 + 16x + 9 = 0$$

2.16. ábra. 10.A, 5. csapat egyik feladata

A diákok a feladattal kapcsolatban így fogalmaztak a reflexiójukban: "*A feladathoz úgy jutottunk el, hogy az alaphelyzet egy mindenkivel megtörténő dolog (a feladat további része azaz az apuka válasza már nem annyira de az lényegtelen...). A stratégia a feladat szövegének a megfogalmazása volt, utána pedig egy hozzá alkalmas egyenlet kitalálása. Cél nemigen volt, inkább meg akartuk csinálni jól és szórakoztatóan a feladatokat.*"

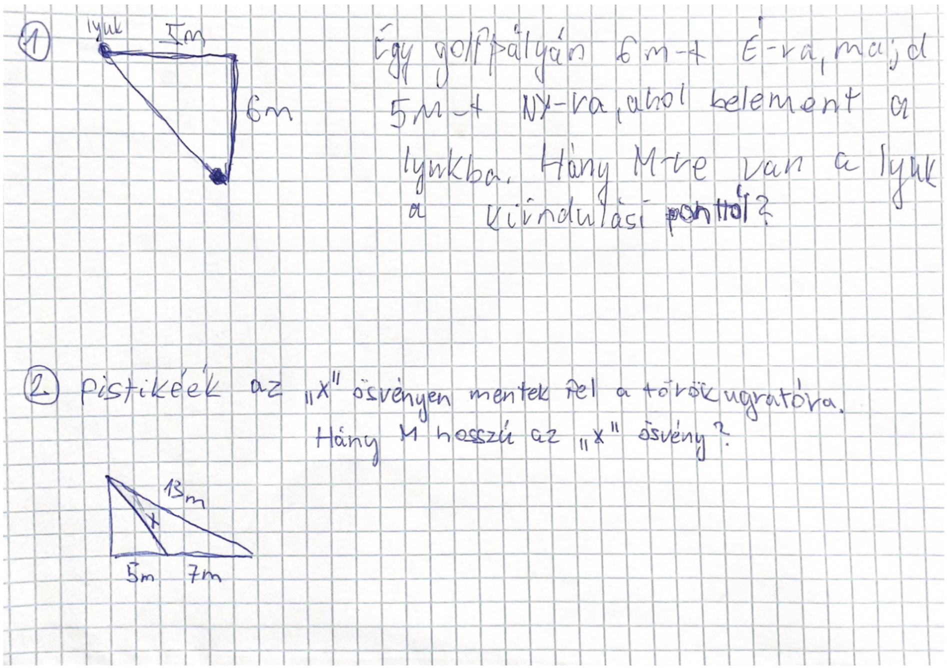
2.4.3. Saját tapasztalatok tanórai problémafelvetéssel

Összefüggő tanítási gyakorlatom során nekem is volt lehetőségem gimnáziumi osztályokkal matematikaórán problémafelvetéssel foglalkozni. Az alábbiakban olyan feladatokat szeretnék megmutatni, melyeket egy nyolcadikos csoport diákjai készítettek a Pitagorasz-tétel elsajátítása után. (Egy, a Pitagorasz-tételből írt röpdolgozat után az óra hátralévő részében készítették a feladatokat a diákok, főként párokban dolgozva.)



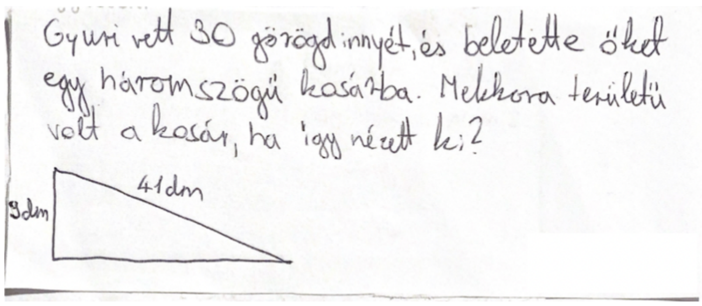
2.17. ábra. *Az alábbi ábrán az "x"-szel jelölt oldal hossza* $\sqrt{512}$ *egység. Mekkora a kis háromszög területe? Mekkora az egész alakzat területe?*

A 2.17. feladatot elkészítő fiúk célja kimondottan az volt, hogy a feladatmegoldó "egy jót számoljon" – ők egyértelműen a matematikai élvezetet és nem a beöltöztetés nyújtotta élvezetet akartak nyújtani a feladatukkal.



2.18. ábra. *1. Egy golfpályán a golflabda 6 m-t megy északra, majd 5 m-t nyugatra, ahol belemegy a lyukba. Hány m-re van a lyuk a kiindulási ponttól? 2. Pistikéék az "x" ösvényen mentek fel a Törökugratóra. Hány km hosszú az "x" ösvény?*

Számomra érdekes, hogy a 2.18. ábrán látható második feladat pontosan ugyanazt a számolást igényli, mint a problémafelvetési tevékenység előtt írt röpdolgozat egyik feladata, azonban más beöltöztetéssel. Így, bár nem mondtam el az órán, hogy létezik ilyen problémafelvetési stratégia, az egyik diák egyfajta feladatvariálást alkalmazott.



2.19. ábra. *Gyuri vett 30 görögdinnyét és betette őket egy háromszögű kosárba. Mekkora alapterületű volt a kosár, ha így nézett ki?*

A csoportban négy lány, amint meghallotta, hogy ők készíthetnek matematika feladatot, azonnal kitalálta, hogy mindenképpen beleírnak majd rengeteg görögdinnyét, felidézve a viccet, mely szerint "*a matematika az egyetlen olyan hely, ahol valaki vesz 80 görögdinnyét, és ezen senki sem csodálkozik el*". A 2.19. feladat az egyik ilyen görögdinnyés feladat. Különös kihívás volt a megalkotásában, hogy a páros egyik tagja még nem beszél magyarul, csak ukránul és angolul, így a feladat eredetileg nem is magyarul íródott. Emellett megfigyelhető, hogy az osztály egyik kedvenc pitagoraszi számhármasa a 9; 40; 41, ez is többször előfordult a felvetett feladatokban.

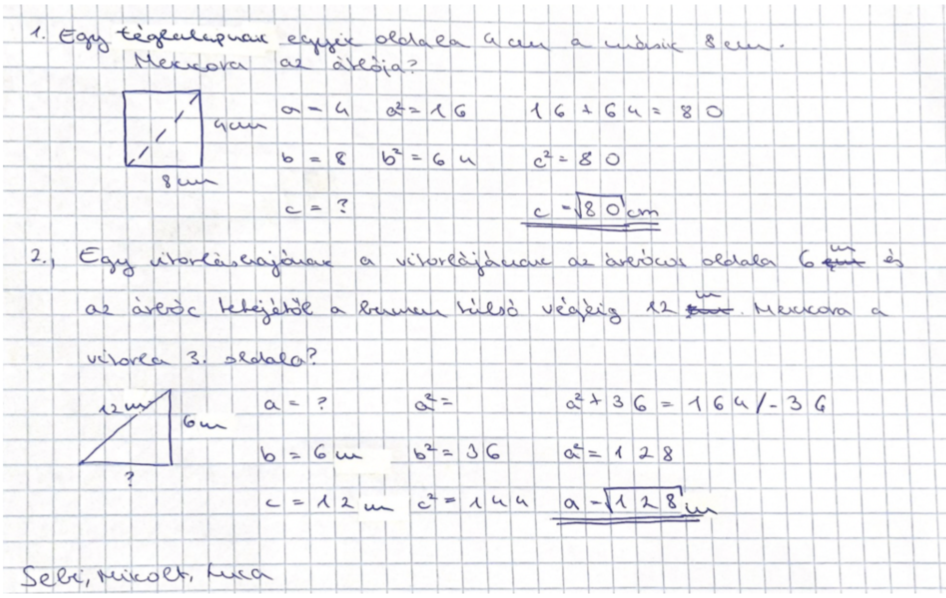
A 6 éves Kató és 96 éves Neil Armstrong a házuktól 2 km-re lévő közértből 50 kg görögdinnyét vásároltak. Hazafelé egy zedor-szági vidámparkba tettek kitérőt ahol egy ~~k~~ célbadobós játékot próbáltak ki. ~~Az egyik céltábla~~ A helyet ahonnan dobni lehetett, egy földön lévő „X" jelölte. Az egyik céltábla 13m -re volt az X-től, a másik 2m-rel távolabb. Kató a közelebbi, 5m magas táblára célzott, és eltalálta. Neil Armstrong a távolabbi 7m magas táblára célzott, de a babzsák csak a $\sqrt{99}$ m magasságot érte el. ~~A babzsákok között~~

a, A földön lévő X milyen távol volt a Kató által eltalált céltáblától?

b, Milyen távolra ~~dobta~~ ért Neil dobása az X-től az eltalált ~~táblá~~ oszlopig

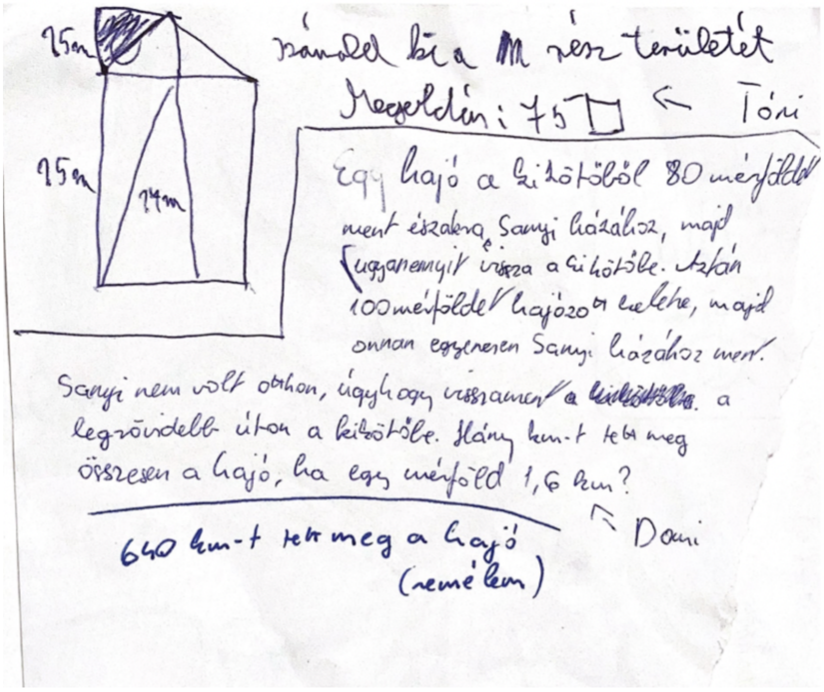
2.20. ábra. *A 6 éves Kató és a 96 éves Neil Armstrong a házuktól 2 km-re lévő közértből 50 kg görögdinnyét vásároltak. Hazafelé egy zedországi vidámparkba tettek kitérőt, ahol egy célbadobós játékot próbáltak ki. A helyet, ahonnan dobni lehetett egy földön lévő "X" jelölte. Az egyik céltábla 13 m-re volt az "X"-től, a másik ennél 2 m-rel távolabb. Kató a közelebbi, 5 m magas táblára célzott, és eltalálta. Neil Armstrong pedig a távolabbi, 7 m magas táblára célzott, de a babzsák a* $\sqrt{99}$ *m magasságot érte el. A földön lévő "X" milyen távol volt a Kató által eltalált céltáblától? Milyen távolra ért Neil Armstrong dobása az "X"-től az eltalált oszlopig?*

A 2.20. ábrán látható a másik görögdinnyés feladat. Ebben már nemcsak görögdinnyék, hanem Zedország és feleslegesen megadott életkorok is szerepelnek, ami úgy tűnik, a diákság szerint a matematikafeladatok alappillére.



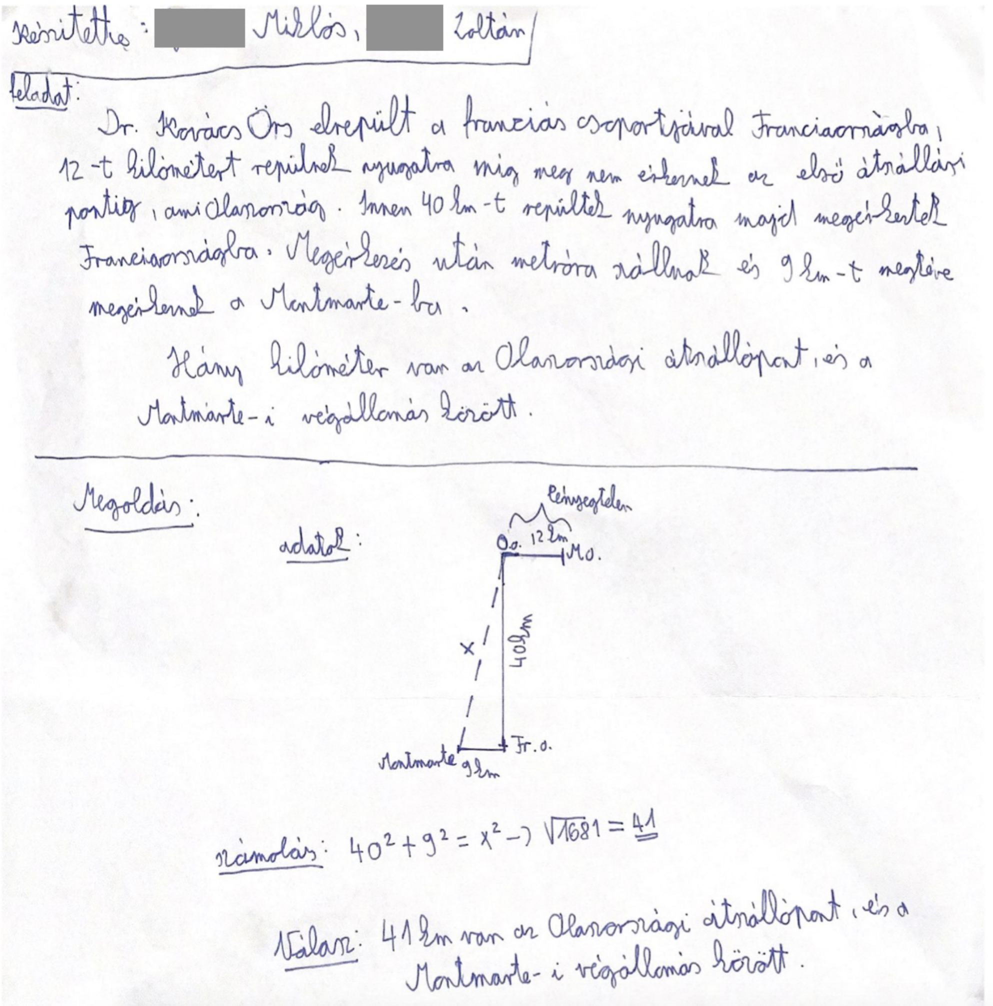
2.21. ábra. *1. Egy téglalap egyik oldala 4 cm, a másik 8 cm. Mekkora az átlója? 2. Egy vitorláshajó vitorlájának az árbócos oldala 6 m, és az árbóc tetejétől a baum végéig 12 m. Mekkora a vitorla harmadik oldala?*

A 2.21. ábrán látható első feladat egy beöltöztetetlen rutinfeladat, ami még csak nem is racionális megoldást ad, a második feladat azonban már beöltöztetett és megmutatja a problémafelvetők egy érdeklődési körét is.



2.22. ábra. *1. Számold ki az ábrán a színezett rész területét! 2. Egy hajó a kikötőből 80 mérföldet ment északra, Sanyi házához, majd ugyanennyit vissza a kikötőbe. Aztán 60 mérföldet hajózott keletre, majd egyenesen Sanyi házához ment. Sanyi nem volt otthon, úgyhogy visszament a legrövidebb úton a kikötőbe. Hány km-t tett meg összesen a hajó, ha egy mérföld 1,6 km?*

A 2.22. ábrán látható két feladatot az osztály legsikeresebb matekosai készítették. A munka során egyáltalán nem dolgoztak össze (ez abból is látszik, hogy a két feladathoz külön-külön rendeltek szerzőt), bár a kész feladatokat már megmutatták egymásnak. Az első feladatot az 1.3.2. fejezetben is olvasható házikós feladat ihlette, amit egyszer szorgalmiként megoldhattak órán.



Készítette: [redacted] Miklós, [redacted] Zoltán

feladat:

Dr. Kovács Örs elrepült a franciás csoportjával Franciaországba, 12-t kilómetert repültek nyugatra míg meg nem érkeztek az első átszállási pontig, ami Olaszország. Innen 40 km-t repültek nyugatra majd megérkeztek Franciaországba. Megérkezés után metróra szálltak és 9 km-t megtéve megérkeztek a Montmarte-ba.

Hány kilóméter van az Olaszországi átszállópont, és a Montmarte-i végállomás között.

Megoldás:

adatok:

számolás: $40^2+9^2=x^2 \rightarrow \sqrt{1681}=41$

Válasz: 41 km van az Olaszországi átszállópont, és a Montmarte-i végállomás között.

2.23. ábra. *Dr. Kovács Örs elrepült a franciás csoportjával Franciaországba. 12 km-t repültek nyugatra, míg meg nem érkeztek az első átszállási pontig, ami Olaszország. Innen 40 km-t repültek nyugatra* (**itt valójában "délre" iránynak kellene szerepelnie**)*, majd megérkeztek Franciaországba. Megérkezés után metróra szálltak, és 9 km-t megtéve* (**nyugatra**) *megérkeztek Montmartre-ba. Hány kilóméter van az olaszországi átszállópont és a Montmartre-i végállomás között?*

Az utolsóként bemutatott 2.23. feladat főhőse az iskola egyik tanára. Szerencsére nem földrajztanár, különben nem tudna 12 km megtételével Magyarországról Olaszországba jutni a franciás csoportjával. Ebben a feladatban is megjelenik a 9; 40; 41 pitagoraszi számhármas.

Az órára visszatekintve azt mondhatom, hogy nagyon eredményes és jó hangulatú is volt: a problémafelvetést olyannyira élvezték a gyerekek, hogy kicsöngetés után alig tudtam kiküldeni őket a tanteremből és a következő órán már tűkön ülve várták, hogy megoldhassák egymás feladatait.

2.4.4. Összefoglalás

Rékasi Annával közösen négy problémafelvetést és feladatkészítést vizsgáló kutatást készítettünk, ezek közül kettőt matematika tanárszakos hallgatók, kettőt pedig közoktatásban tanuló diákok részvételével. Ehhez kidolgoztunk több (egyre részletesebb) módszert (2.4.4), mellyel problémafelvető-feladatkészítő tevékenységben lehet rész venni, és egy átfogó szempontrendszert (2.1) is, mellyel az elkészített feladatok értékelhetők.

Mind a hallgatók, mind a diákok számos "jó" feladatot készítettek, voltak azonban matematikailag helytelen, vagy pontatlanul fogalmazott feladatok is. A kísérletek során készült feladatok áttekintése és értékelése után elmondhatjuk, hogy a felső tagozatos, és a középiskolás korú diákok többsége is tud csapatban legalább egy-egy jó feladatot készíteni [25], [26], ahogyan a matematika tanárszakos hallgatók is [23], [24]. Voltak olyan csapatok, akiknek minden feladata színvonalas, ötletes és kreatív volt, viszont olyan csapatok is voltak, akik teljesen komolytalan módon összecsapták a feladataikat. A korábbi, matematika tanárszakos hallgatókkal végzett kutatások tapasztalata is az volt, hogy a hallgatók többsége (akár egyénileg, akár csapatban dolgoztak) tud legalább egy jó feladatot készíteni. Általában a legtehetségesebb hallgatók több jó feladatot is készítettek, de sokan sajnos összecsapott vagy matematikailag nem megfelelő feladatokat is készítettek.

A diákok feladataiban többször előforduló szereplők között voltak híres emberek (színészek, zenészek), a tanáraik és az osztálytársaik, több iskola több csapata késztett Tündérországról és Zedországról, a koronavírus járványról és a Zrínyi Ilona Matematikaversenyről szóló feladatot is.

A matematika tanárszakos hallgatóktól szakértőbb szintű problémafelvetést vártunk volna előzetesen, mint a diákoktól, azonban (talán azért, mert az általunk kiértékelt feladatokat mind "nagyon elit" gimnáziumba járó diákok készítették) nem volt drasztikus különbség a hallgatók és a diákok teljesítménye között. A diákoktól eltérően a hallgatóktól azt is vártuk, hogy fel tudják mérni azt, hogy a tananyagban hol, milyen évfolyamon, milyen tudásszintnél jelenhet meg az általuk készített feladat – ez azonban sokaknak nagy nehézséget okozott. Voltak szerencsére nagyon jól eltalált, tanórákon alkalmazható, ötletes feladatok is. A [24] dolgozat eredményeiből az is látszik, hogy a problémafelvetési, feladatkészítési képesség fejleszthető azzal, ha a problémafelvető tevékenységet már meglévő problémák elemzésével és variálásával, vagy hozzájuk kapcsolódó feladatok készítésével kezdjük. Így kis lépésekben eljuthatunk oda, hogy egyre jobb problémafelvetőkké váljunk.

Némileg aggasztó lehet, hogy sok tanárszakos hallgató nem tudott egyél több tanórán feladható matematikafeladatot készíteni, vagy nem tudott a feladataihoz megfelelő mintamegoldást adni. Szerencsére rengeteg jó példát is láthattunk a felvetett problémák között. Ezek alapján elmondhatjuk, hogy a matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési képessége, ahogy a középiskolás korú diákoké is, fejlesztendő, fejleszthető, de nem reménytelen!

Irodalomjegyzék

[1] Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva és Wintsche Gergely (2013). Matematikai módszertani példatár elérhetőség: `http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/160.pdf` (utoljára megnyitva: 2023. 03. 04.)

[2] Belfield, Henry Holmes (1887). *Revised model elementary arithmetic.* Chicago, IL: Geo. Sherwood.

[3] Blomqvist, Charlotta & Gade, Sharada (2015). From Problem Posing to Posing Problems via Explicit Mediation in Grades 4 and 5. 195-213. 10.1007/978-1-4614-6258-3_9

[4] Cai, Jinfa, & Hwang, Stephen (2002). *Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing.* The Journal of Mathematical Behavior, 21, 401–421. `https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00142-6`

[5] Cai, Jinfa & Hwang, Stephen & Jiang, Chunlian & Silber, Steven. (2015). *Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions.* 10.1007/978-1-4614-6258-3_1.

[6] Cunningham, Robert. (2004). Cunningham, R.F. (2004). *Problem Posing: An Opportunity for Increasing Student Responsibility.* Mathematics and Computer Education 38, 1, 83-89.

[7] Csehné Szenderák Júlia, Stirling Anna Krisztina, Szörényi Sára (2022). *Kell-e félnünk a* $\cos 15°$*-tól? Ha igen, bizonyítsd, ha nem, mutass ellenpéldát!* TDK dolgozat.

[8] Czeglédi Csaba, Stirling Anna Krisztina (2022). *Adott témakörben különböző módszerekkel történő problémafelvetés vizsgálata a szakképzésben.* TDK dolgozat

[9] Duncker, K. (1945). *On problem solving.* Psychological Monographs (Vol. 58). New York, NY: American Psychological Association.

[10] Felmer, P., Pehkonen, E., Kilpatrick, J. (2016, Eds.). *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives.* NY: Springer

[11] Imhausen, Annette 2016. *Mathematics in ancient Egypt, a contextual history.* Princeton University Press. ISBN 978-0-691-11713-3

[12] Kilpatrick, J. (1987). *Formulating the problem: Where do good problems come from?* In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education (pp. 123- 147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[13] Koichu, Boris, & Kontorovich, Igor (2013). *Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task.* Educational Studies in Mathematics, 83, 71–86.

[14] Kőnig Dénes (1905) *Mathematikai mulatságok.* Lampel. R. Könyvkereskedése, Budapest.

[15] Kovács, Zoltán (2022). *The tradition of problem-posing in Hungarian mathematics teaching.* Teaching Mathematics and Computer Science, 20(2), 233–254. DOI: 10.5485/TMCS.2022.0546

[16] Kovács Zoltán, Báró Emőke, Lócska Orsolya, Kónya Eszter (2023). *Incorporating Problem-Posing into Sixth-Grade Mathematics Classes.* Education Sciences. 2023; 13(2):151. https://doi.org/10.3390/educsci13020151

[17] Lavy, Ilana and Shriki, Atara (2007). *Problem posing as a means for develeoping mathematical knowledge of prospective teachers.* Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Eds: Woo, J.; Lew, H.; Park, K.; Seo, D.) 129-136 2007.

[18] Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

[19] Muzsnay Anna, Szabó Csaba (2017). *Dressed up problems - the danger of picking the inappropriate dress.* TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE 15: (1-2) pp. 77-94.

[20] Papadopoulos, Ioannis; Patsiala, Nafsika; Baumanns, Lukas; Rott, Benjamin (2022). *Multiple Approaches to Problem Posing: Theoretical Considerations Regarding its Definition, Conceptualisation, and Implementation.* Center for Educational Policy Studies Journal. 10.26529/cepsj.878.

[21] Pehkonen, E. (1995). *Introduction: Use of open-ended problems.* ZDM, 1995/2 55–57.

[22] Pólya György (1957). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

[23] Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2019). *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési és problémamegoldási készségeinek összehasonlítása.* TDK dolgozat

[24] Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2019). *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési képességeinek vizsgálata fejlesztési céllal.* TDK dolgozat

[25] Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2021). *Közoktatásban tanuló diákok feladatkészítési képességének vizsgálata.* TDK dolgozat

[26] Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2021). *A problémafelvetés és feladatkészítés egy lehetséges megjelenítése matematikaórán.* TDK dolgozat

[27] Rosli, Roslinda & Capraro, Mary & Capraro, Robert (2014). *The Effects of Problem Posing on Student Mathematical Learning: A Meta-Analysis.* International Education Studies. 7. 227-241. 10.5539/ies.v7n13p227.

[28] Rosli, Roslinda & Capraro, Mary & Goldsby, Dianne & Gonzalez, Elsa & Capraro, Robert & Onwuegbuzie, Anthony. (2015). *Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing.* DOI: 10.1007/978-1-4614-6258-3_16.

[29] Silver, E. A. (1994). *On mathematical problem posing.* – In: For the Learning of Mathematics 14(No.1), p. 19-28.

[30] Silver, E. A., & Cai, J. (1996). *An analysis of arithmetic problem posing by middle school students.* Journal for Research in Mathematics Education, 27(5), 521–539.

[31] Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). *Posing mathematical problems: An exploratory study.* Journal for Research in Mathematics Education, 27, 293–309.

[32] Singer, F.M., Ellerton, N.F., Cai, J. (2015, Eds.). *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice*, NY: Springer

[33] Stickles, P. (2011). *An analysis of secondary and middle school teachers' mathematical problem posing.* Investigations in Mathematics Learning, 3 (2), 1–34.

[34] Szabó Csaba, Bereczky-Zámbó Csilla, Stirling Anna, Szenderák Júlia, Szörényi Sára (2021). *Geometric representations of irrational algebraic numbers in Hungarian high school mathematics education.* In: Éva, Vásárhelyi; Johann, Sjuts (szerk.) Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken pp. 323-340.

[35] Torrance, E. P. (1966b). *Torrance tests of creative thinking. Directions manual and scoring guide.* Verbal Test Booklet A. Lexington, British Library: Personnel Press.

[36] Van Harpen, Xianwei. & Presmeg, Norma. (2015). A*n Investigation of High School Students' Mathematical Problem Posing in the United States and China.* 293-308. DOI: 10.1007/978-1-4614-6258-3_14.

[37] `https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tavoktatas/probfelv.pdf` (utoljára megnyitva: 2023.03.20.)

Mellékletek

1. melléklet

Matematika Tanuláselméleti és -Pszichológiai Kutatócsoport
Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar, Matematikai Intézet
Kutatócsoport vezető: Dr. Szabó Csaba egyetemi tanár, email: csaba@cs.elte.hu

1. PROBLÉMAFELVETÉS

A problémafelvetés képessége a jelenleg hatályban lévő Nemzeti Alaptantervben az alapkompetenciák között szerepel. A NAT szerint "*a matematika célja modellezni az életet, matematikai nyelven megfogalmazni olyan problémákat, melyek visszavezethetők a mindennapi életre*".

A problémamegoldás és a matematikai modellalkotás megjelenik a 2018-ban az EU által elsődlegesen megjelölt matematikai kompetenciák között is. A nyolc matematikai kompetencia közül most kettőt emelnénk ki, melyek meghatározóak a problémafelvetés, illetve feladatkészítés szempontjából:

3) A matematikai problémamegoldás
   - felismerni, megfogalmazni és osztályozni a problémákat
   - önállóan alkotni problémákat
   - ellenőrizni, értékelni a problémamegoldási folyamatot
   - stratégiákat/sejtéseket alkotni
   - megoldani különböző fajta problémákat (változatos kontextusban, a matematikán kívülieket is, nyílt végűeket is)

4) A matematikai modellalkotás
   - lefordítani a matematika nyelvére a különböző területekről vett problémákat
   - a modellen belül dolgozni
   - az eredményeket visszafordítani az eredeti kontextusba
   - megmutatni a különbséget az adott problémaszituáció és a matematikai modellje között

A magyarországi általános- és középiskolai matematikaoktatás köztudottan problémaközpontú. Ezt továbbfejlesztve érdemes a problémáknak nem csak a megoldásával, hanem a felvetésének tanításával is foglalkozni.

2.1. FELADATKÉSZÍTÉSI PROJEKT

A matematikaoktatás szokott keretei között ritkán adódik lehetőség arra, hogy a diákok problémafelvetéssel, feladatkészítéssel foglalkozzanak, holott egyre több nemzetközi kutatás foglalkozik a problémafelvetéssel, ezen belül is azzal, hogy milyen pozitív hatással van a diákok matematikai gondolkodására és kreativitására az, ha részt vesznek problémafelvető tevékenységben.

Úgy gondoljuk, jelenleg a távoktatás keretei között az eddig bevált módszerekkel nehéz lehet új tananyagot tanítani vagy elsajátítani, újra kell gondolni a tanítási- és tanulási módszereket. Ez az időszak kiváló alkalom lehet az eddig megszerzett tudás feladatkészítéssel történő elmélyítésére, az új tananyag problémaközpontú elsajátítására. Ezért kidolgoztunk egy lehetséges projekt-oktatási módszert, melyben a diákok feladatokat készíthetnek egymásnak az éppen tanult tananyag témakörében vagy akár a korábban tanult témakörökben. A módszer alkalmazható órai munkaként is, melyet csoportmunkában házi feladatként is lehet folytatni. Az elkészült feladatsorokat és megoldásaikat a szaktanár érdemjegyekkel is jutalmazhatja, persze tanácsoljuk, hogy jóindulatúan, hiszen ez egy, a megszokottól eltérő, sok munkát igénylő tevékenység.

A projektben résztvevőknek semmilyen személyes adatát nem fogjuk tárolni és közzétenni, minden értékelés teljesen anonim módon történik.

2.2. A FELADATKÉSZÍTÉS MENETE:

- A tanulók 3-4 fős csoportokat alkotnak.
  Minden csoport kap egy nevet: *varos_iskola_osztaly_sorszam*
  (pl.: bp_apaczai_12b_3; vagy bontott csoportok esetén*: bp_sztangela_10a1_4)*
- Minden csoport valamilyen problémafelvető stratégia szerint, melyek leírása a 3. pontban található, elkészít egy legalább 4-5 feladatból álló feladatsort.
  Ezek a feladatok legyenek lehetőség szerint kreatívak, izgalmasak, olyanok, amilyenek a többi csoport számára kihívást jelentenek, de nem túlságosan nehezek.
- A feladatsorokhoz érdemes a kitűzőknek megoldásokat készíteni, mert így tudják ellenőrizni, hogy érthető, jól megfogalmazott-e a feladat, helyesek-e a megadott adatok stb.
- Emellett a csoportok írják le, milyen módszerrel, vagy problémafelvető stratégiával készültek a feladataik
  (*pl.: egy már ismert feladatot variáltak; feladatmegoldás közben jutott eszükbe valamilyen új kérdés; nézegettek egy könyvet, és ott láttak hasonlót; stb*),
- És írják le, milyen célt, vagy célokat határoztak meg a feladatok készítésekor
  (pl.: mindenképpen mágneses vonatokról szóló feladatot akartak készíteni, vagy rávezető feladatokat készítettek egy versenyfeladathoz, vicces feladatsort akartak csinálni, stb)

- A feladatsort a szaktanár ellenőrzése után (matematikailag helyes-e a feladat, nem túl könnyű/nehéz-e) egy másik csoport megoldja, és egy szempontrendszer szerint értékeli. Az értékelés egy online google form- ban történik, melynek elérhetőségét lent mellékeljük.
- Egy feladatsor elkészítésére a diákoknak 2 hete van, ezután továbbadják a saját feladataikat és megoldják a többi csoporttól kapott feladatsort. A csoportok ciklikusan permutálódnak: Az *1.* csoport a feladatsorát továbbadja *2.* csoportnak, *2.* csoport a feladatsorát továbbadja *3.* csoportnak, és így tovább. Így minden csoport minden fordulóban készít egy feladatsort, a következőben pedig megold egy, a sajátjától különbözőt.
  A feladatkészítés történhet órai munka során, helyett, vagy házi feladatként is.
- A feltöltéskor a csapatnév végére fordulószám is kerüljön:
  varos_iskola_osztaly_sorszam_fordulo
  (a forduló jelentése, hogy ha több hét alatt több feladatsort készítenek a diákok, akkor így sorszámozódnak az elkészült munkák)

3.1. LEHETSÉGES FELADATKÉSZÍTÉSI STRATÉGIÁK

a) feladatkészítés megadott adatok alapján:
   pl.: kapnak egy táblázatot egy cukrászda forgalmáról, vagy egy kosárcsapat eredményeiről...
b) új feladat létrehozása meglévő problémák alapján, vagy azokhoz kapcsolódóan (feladatvariálás):
   pl.: „what-if-not" technika: itt van egy feladat egy szabályos háromszöggel, mi lenne, ha nem szabályos lenne, hanem egyenlőszárú? ... ezzel a technikával felfedezhetők új problémák már meglévő feladatok variálásával.
c) feladat készítése valós szituáció modellezésével
   pl.: banki, pénzügyi szituációk modellezése
d) adott témára készített feladatok:
   pl.: űrhajó, kosárlabda, bevásárlóközpont, kertészkedés, túrázás, filmek, buszok...

3.2. A STRATÉGIÁK ISMERTETÉSE, ALKALMAZÁSA

A diákok többféleképpen kaphatják meg az utasításokat és ismerkedhetnek meg a problémafelvető stratégiákkal:

1) A csoportok bármilyen stratégiával készíthetnek feladatsort, vagyis maguk dönthetnek arról, hogy keresgélnek-e feladatokat példatárakból, tankönyvekből, amiket átalakítanak, vagy „saját kútfőből" dolgoznak...
   Írják le, hogy hogyan készült a feladat (pl hogy megnéztek egy könyvet, és kicseréltek adatokat, vagy neten egy témára kezdtek keresgélni, stb) és milyen célt határoztak meg a feladatok kitűzésekor.
   Küldjenek megoldást is a feladataikhoz.
2) Minden csoport a szaktanár által választott stratégia szerint dolgozik. (Például az 1. csoport *a)* stratégia szerint, 2. csoport *b)* stratégia szerint, 3. csoport a *c)* stratégiával, ...lehetnek persze ismétlődések is)
   Ekkor is írják le az egyes csoportok, hogy hogyan kezdtek neki a feladatsor készítésének, és milyen célt határoztak meg.
   Küldjenek megoldást is a feladataikhoz.
3) Minden csoportnak elmondja a szaktanár, hogy milyen stratégiákból választhat (a fent felsorolt *a, b, c, d* stratégiák). Itt minden csoport kiválaszthatja, hogy melyekkel dolgozna szívesen. A különböző feladatokhoz használhatnak különböző stratégiákat is.
   Ekkor is írják le az egyes csoportok, hogy hogyan kezdtek neki a feladatsor készítésének, és milyen célt határoztak meg.
   Küldjenek megoldást is a feladataikhoz.
4) A csoportokat 2 részre osztjuk (mondjuk egy 30 fős osztályban 5-5db 3 fős csoport). Az egyik fele kap 2 stratégiát, amiből választhat, a másik fele pedig a másik kettőből választhat.
   Ekkor is írják le az egyes csoportok, hogy hogyan kezdtek neki a feladatsor készítésének, és milyen célt határoztak meg.
   Küldjenek megoldást is a feladataikhoz.

4. A FELADATOK ÉRTÉKELÉSE

Egy feladat vagy feladatsor értékelési szempontjai lehetnek:

- megoldható (0-1-2p)
- az adott korosztályhoz/tananyaghoz illő (0-1p)
- érthető a megfogalmazás (0-1p)
- matematikailag helyes (0-1p)
- beöltöztetettsége/valós szituációba való beépítése (ha van) jó, nem rontja el a feladat matematikáját (0-1p)
- kihívást jelent (0-1-2p)
- mennyire eredeti a feladat? (azaz hasonló problémát látott-e már, oldott-e már meg) (0-1-2p)
- élvezetes, ötletes, figyelemfelkeltő (nem „tucatfeladat") (0-1p)

Ezek mellett a feladatokat megoldó diákok saját szavaikkal megfogalmazott véleményére is kíváncsiak vagyunk. A diákok az értékeléseket a https://forms.gle/TAS8RzhXHbwJ6VXn9 helyen elérhető google form-ba írják.

A csoportok a feladatkészítésre és a feladatmegoldásra is kaphatnak pontokat. Ezek alapján lehet osztályozni is – persze ahogyan korábban is javasoltuk, jóindulatúan, hiszen ilyesmit eddig nem csináltak a diákok, miért lennének benne rögtön nagyon jók? Ha a feladatkészítésben az első három szempontra elég jó pontokat kapnak a diákok, az már kiváló teljesítmény, ez matematika tanárszakos hallgatóknak sem mindig megy könnyen!

5.1.A SZAKTANÁR TEENDŐI A KÍSÉRLET SORÁN

1. Írni egy emailt a problemafelvetes.mat@gmail.com címre, hogy szeretne részt venni a kísérletben (feltüntetve az évfolyamot, az utasítások kiadásának választott módját (a *3.2. pontban* leírtak)).
2. A diákoknak tájékoztatót küldeni a projektről
3. A csoportokat kialakítani (lehetőleg olyan diákokból, akik együtt tudnak működni). A csoportoknak legyen egy neve az ***1.2.*** *pontban* feltüntetett módon.
4. Sorrend kialakítása a csoportok között, így fogják továbbadni az elkészült feladatsorokat (ez a névben szerepel, mint sorszám)

5. Ellenőrizni, hogy az elkészített feladatok matematikailag helyesek-e, és megfelelő szintűek-e
6. Pontozni a feladatokat és megoldásaikat az általunk összeállított szempontrendszer szerint
7. Az elkészült feladatsorokat a feladatok kitűzőinek megoldásaival együtt a https://forms.gle/2hcSZeFfw4Yw9HFv6 helyen elérhető felületre feltölteni, valamint értékelni az ott olvasható szempontok alapján. A feladatsorokat javítatlan állapotban is várjuk, a javításra főként azért van szükség, hogy a következő fordulóban a többi csoport meg tudja oldani a kitűzött feladatokat.

5.2.A DIÁKOK TEENDŐI A PROJEKT SORÁN

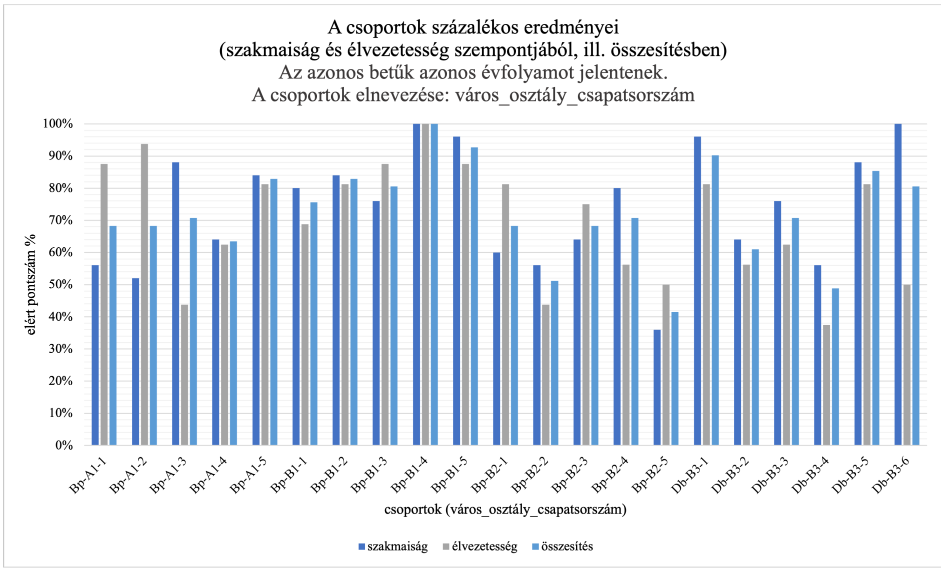
1. Csoportokban a szaktanár által kijelölt stratégiával egy legalább 4-5. feladatból álló feladatsort készíteni
   (határidő: az egyéb tananyagok és teendők függvényében 1-2 hét, ezt a szaktanár határozza meg).
2. A feladatsort megoldásokkal együtt elküldeni a szaktanárnak, aki ellenőrzi a feladatokat. Szükség esetén kijavítani a feladatokat a szaktanár javaslatai alapján.
3. A következő fordulóban a csoportok megoldják egy másik csapat feladatsorát. Megoldásaikat a https://forms.gle/TAS8RzhXHbwJ6VXn9 helyen elérhető felületre feltöltik, valamint értékelik a feladatsort az ott olvasható szempontok szerint.

8. ELÉRHETŐSÉG

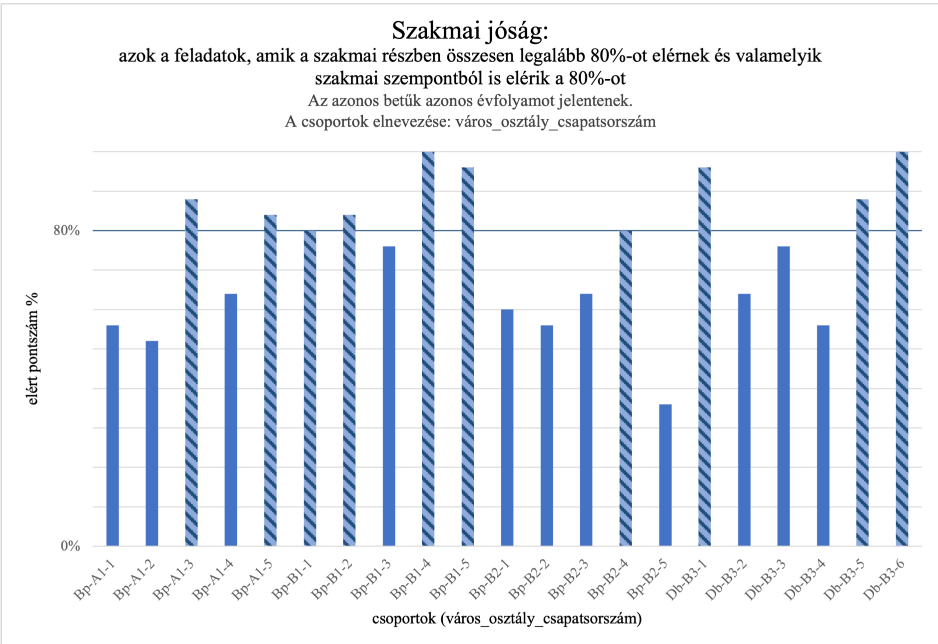
A kutatás kapcsolattartói: Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina
email: problemafelvetes.mat@gmail.com

Matematika Tanuláselméleti és -Pszichológiai Kutatócsoport,
ELTE TTK, Matematikai Intézet
Kutatócsoport vezető: Dr. Szabó Csaba egyetemi tanár,
email: csaba@cs.elte.hu

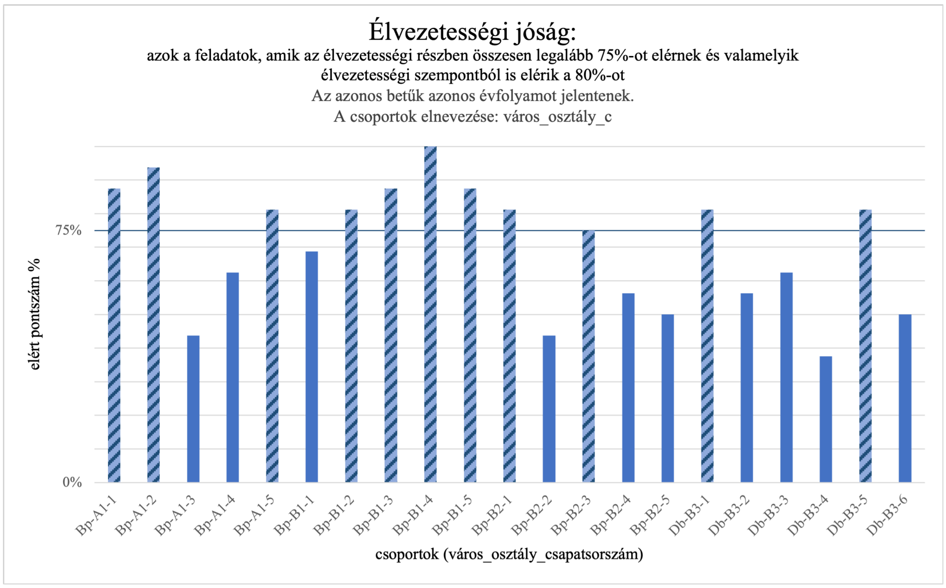
2. melléklet

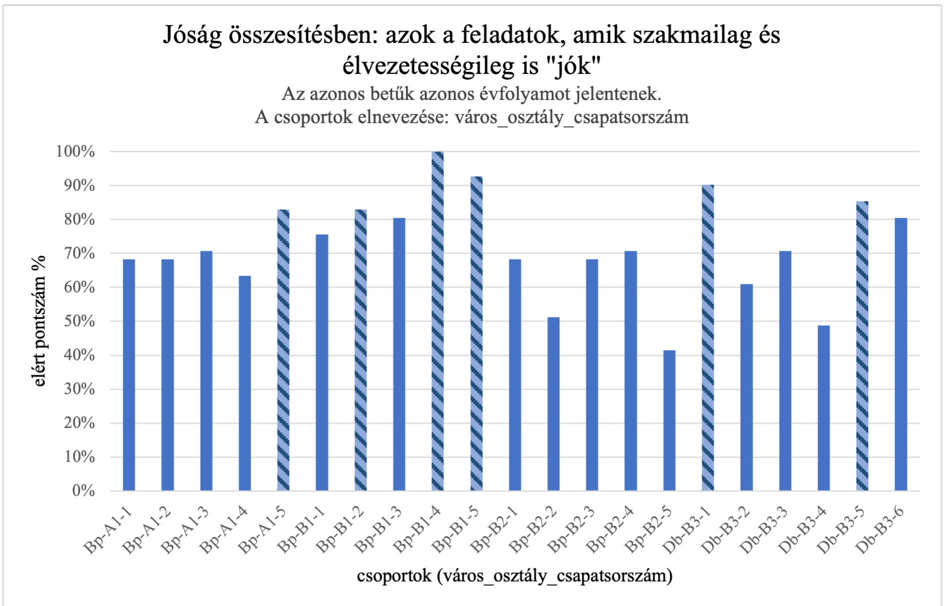


A csoportok százalékos eredményei
(szakmaiság és élvezetesség szempontjából, ill. összesítésben)
Az azonos betűk azonos évfolyamot jelentenek.
A csoportok elnevezése: város_osztály_csapatsorszám
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
elért pontszám %
Bp-A1-1
Bp-A1-2
Bp-A1-3
Bp-A1-4
Bp-A1-5
Bp-B1-1
Bp-B1-2
Bp-B1-3
Bp-B1-4
Bp-B1-5
Bp-B2-1
Bp-B2-2
Bp-B2-3
Bp-B2-4
Bp-B2-5
Db-B3-1
Db-B3-2
Db-B3-3
Db-B3-4
Db-B3-5
Db-B3-6
csoportok (város_osztály_csapatsorszám)
szakmaiság
élvezetesség
összesítés



Szakmai jóság:
azok a feladatok, amik a szakmai részben összesen legalább 80%-ot elérnek és valamelyik szakmai szempontból is elérik a 80%-ot
Az azonos betűk azonos évfolyamot jelentenek.
A csoportok elnevezése: város_osztály_csapatsorszám
80%
0%
elért pontszám %
Bp-A1-1
Bp-A1-2
Bp-A1-3
Bp-A1-4
Bp-A1-5
Bp-B1-1
Bp-B1-2
Bp-B1-3
Bp-B1-4
Bp-B1-5
Bp-B2-1
Bp-B2-2
Bp-B2-3
Bp-B2-4
Bp-B2-5
Db-B3-1
Db-B3-2
Db-B3-3
Db-B3-4
Db-B3-5
Db-B3-6
csoportok (város_osztály_csapatsorszám)


Élvezetességi jóság:
azok a feladatok, amik az élvezetességi részben összesen legalább 75%-ot elérnek és valamelyik élvezetességi szempontból is elérik a 80%-ot
Az azonos betűk azonos évfolyamot jelentenek.
A csoportok elnevezése: város_osztály_c
75%
0%
elért pontszám %
Bp-A1-1
Bp-A1-2
Bp-A1-3
Bp-A1-4
Bp-A1-5
Bp-B1-1
Bp-B1-2
Bp-B1-3
Bp-B1-4
Bp-B1-5
Bp-B2-1
Bp-B2-2
Bp-B2-3
Bp-B2-4
Bp-B2-5
Db-B3-1
Db-B3-2
Db-B3-3
Db-B3-4
Db-B3-5
Db-B3-6
csoportok (város_osztály_csapatsorszám)


Jóság összesítésben: azok a feladatok, amik szakmailag és élvezetességileg is "jók"
Az azonos betűk azonos évfolyamot jelentenek.
A csoportok elnevezése: város_osztály_csapatsorszám
100%
90%
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
elért pontszám %
Bp-A1-1
Bp-A1-2
Bp-A1-3
Bp-A1-4
Bp-A1-5
Bp-B1-1
Bp-B1-2
Bp-B1-3
Bp-B1-4
Bp-B1-5
Bp-B2-1
Bp-B2-2
Bp-B2-3
Bp-B2-4
Bp-B2-5
Db-B3-1
Db-B3-2
Db-B3-3
Db-B3-4
Db-B3-5
Db-B3-6
csoportok (város_osztály_csapatsorszám)