EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKA DOKTORI ISKOLA

DIDAKTIKA PROGRAM

ZÁMBÓ CSILLA GYÖNGYVÉR

A KOMMUNIKÁCIÓ SZEREPE A MATEMATIKAI FEJLESZTÉSBEN – KÉT ESETTANULMÁNY

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

Témavezető:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

Tartalom

I. Bevezetés

Dolgozatunk két fő részből áll. Az első részben egyetemi hallgatók geometriai megértési szintjeinek mérésén keresztül vizsgáljuk, hogy felsőfokú oktatásban is érvényesek-e Vigotszkij és a Van Hiele házaspár tanulással kapcsolatos elméletei, melyeknek a közoktatás szintjén történő érvényességét már több tanulmány alátámasztotta. Kutatásunkból kiderül, hogy vagy az ötödik van Hiele szint vagy az azt mérő teszt nem megfelelő. Ennek nyomán azt elemezzük, hogy hogyan lehetne a Van Hiele elméletet magasabb szintre kiterjeszteni. A második részben matematikai problémákhoz kapcsolódó esztétikai és etikai kérdéseket vizsgálunk, tehetséggondozásban szereplő feladatokon keresztül. A két rész csak lazán kapcsolódik egymáshoz; a disszertációban azért érintünk kétféle témát, mert kétféle kutatási módszer alkalmazását szeretnénk bemutatni. Az első részben egy sztenderdizált mérőeszköz segítségével végzett mérés és az eredményeket összegző statisztika adja a kutatás magját, ezt egészítjük ki interjúkkal és azok elemzésével, míg a második részben tisztán kvalitatív módszereket alkalmazunk, interjúkra és feladatok elemzésére épül a vizsgálat.

A kommunikáció szerepe kulcsfontosságú a tanítási és tanulási folyamatban (Brendefur és Frykholm 2000). Vigotszkij legközelebbi fejlődési zóna-elmélete szerint a tanítási folyamat során figyelembe kell venni a tanulók megértési szintjét és a fogalmakkal kapcsolatos ismereteiket (Vigotszkij 1967; 86. o.). A legközelebbi fejlődés zónájáról szóló elméletét a van Hiele házaspár értelmezte a geometria területére (Usiskin 1982). Van Hiele-ék a geometriai megértés strukturálására és leírására javasolnak egy lehetséges módot, a geometriai alakzatok és azok rendszerének megértésére összpontosítva. A geometriai megértés öt szintjét különböztetik meg: (1) ráismerés, vizualizáció (2) vizuális vizsgálódás, elemzés, leírás, analízis (3) fogalmak rendszerezése, absztrakció, (4) formális következtetések, dedukció és (5) fegyelem, formális logika, axiomatikus gondolkodás (Usiskin 1982). Elméletük szerint a tanuló a kezdeti szinttől (vizualizáció) a legmagasabb szintig (axiomatikus gondolkodás) halad előre egymás után, mintegy lépcsőfokról lépcsőfokra. A tanulók nem tudnak elsajátítani egy adott gondolkodási szintet anélkül, hogy az előző szinteket ne sajátították volna el. Ahhoz, hogy fejlődés jöhessen létre, a tanítási folyamatnak a megfelelő Van Hiele-szintről kell kiindulnia.

Gyakori és kézenfekvő feltételezés, hogy egy egyetemi matematika tantárgy elvégzése és a vizsga sikeres teljesítése azt jelenti, hogy valaki elsajátította a tantárgy követelményeit és kellően mélyen megértette a tananyagot. Ezzel párhuzamosan a van Hiele-elmélet szerint, ha valaki nem éri el a kurzus elvárt belépési szintjét, akkor a kurzus során nem fog tudni ténylegesen fejlődni a megértése, gondolkodásmódja. Gyakran előfordul azonban, hogy valaki a kurzus megkezdésekor nem teljesíti a bemeneti elvárásokat (előzetes tudás vagy megértés tekintetében), de a kurzus végén jól szerepel a vizsgán. Ez az ellentmondás felveti a kérdést, hogy melyik állítás igaz: "Ha valaki elvégezte a tárgyat és sikeres vizsgát tett, akkor megértette az anyagot.", vagy "Ha valaki felkészületlenül érkezett, akkor nem tud valódi megértést elérni a tananyagból, és nem tud sikeres vizsgát tenni.".

A fenti kérdés megválaszolásához az Usiskin által kidolgozott (Usiskin, 1982) tesztet, az ún. VGHT-t (Van Hiele Geometry Test) használtuk. A tesztet az első egyetemi geometria kurzusuk megkezdésekor kitöltettük 111 elsőéves hallgatóval. Két periódusban végeztük a kitöltetést, 2016 tavaszán 65 matematikus hallgatót vizsgáltunk, 2018 tavaszán pedig 46 tanárszakos hallgatót. A teszt eredményei alapján a diákok mindegyike hármas vagy ötös szinten volt. Az elvárás egy elsőéves matematikus vagy matematikatanár szakos hallgatótól – de hivatalosan bármelyik frissen végzett középiskolástól – a negyedik vagy ötödik szint, ezért nem tűnt hihetőnek az, hogy a diákok harmadik szinten vannak. Emiatt úgy döntöttünk, hogy leteszteljük a tesztet, ellenőrizzük, hogy ezek az eredmények helyénvalóak-e. Behívtuk a hallgatókat egy interjúra, amelynek segítségével el tudtuk dönteni, hogy helyesen mért-e a VHGT. Azt találtuk, hogy a teszt helyesen mér. A következő kutatási kérdés volt vizsgálódásunk vezérfonala: A van Hiele-elmélet szerint, ha a tanítási folyamat során a tanár kommunikációja nem megfelelő a tanulók aktuális geometriai szintjét figyelembe véve, akkor nem valósulhat meg valódi fejlődés. Érvényes-e ez az állítás a magasabb van Hiele-szinteken (3., 4. és 5. szint)?

A kurzus teljesítése után két héttel újra kitöltettük a diákokkal a VGHT-t. A tesztek eredménye alapján aki a kurzus elején hármas szinten volt, az a végén is hármas szinten maradt. Ugyanez mondható el az ötös szinten teljesítőkről is. Mivel a kurzus négyes-ötös szintet feltételezett, ezzel igazoltuk disszertációnk egyik fő eredményét: **Vigotszkij és Van Hiele elméleteinek megfelelően magasabb szinteken, nagyobb tudás mellett is igaz, hogy a) fontos a diák megértési szintjének megfelelő nyelvezet használata b) akihez magasabb szintnek megfelelő nyelvezeten beszélünk, mint ahol ő van, az nem fejlődik.** Felmerült bennünk a kérdés, hogy miért nem teljesített senki negyedik szinten. A szintek leírását megvizsgálva azt találtuk, hogy az ötös szint nem illeszkedik a sorba. Ez az észrevétel összhangban áll azzal a ténnyel, hogy már korábbi kutatásokban is felmerültek dilemmák az ötös szinttel és annak mérhetőségével kapcsolatban. Megvizsgáltuk, hogy a Van Hiele-szintek folytatásának mik a lehetőségei. A van Hiele szintek kétféle kiterjesztésével foglalkoztunk, az egyik az eredeti negyedik szint finomítása, a másik az eredeti ötödik szint helyett néhány lehetséges új változat megfogalmazása. **Megállapítottuk, hogy a negyedik szint többféleképpen is kiterjeszthető, ez a kiterjesztés már nem feltétlenül lineáris és azon is múlik, hogy milyen geometriai lexikális tudással rendelkeznek az alanyok.** Az ötödik szint megfogalmazásakor megkérdeztünk tudományos fokozattal rendelkező geometria kutatókat, hogyan képzelnék el a lehetséges ötös szintet, mit várnának el egy hallgatótól, PhD hallgatótól vagy kollégától ahhoz, hogy egyáltalán felmérhessük ezt az ötös szintű tudást. **Azt a választ kaptuk, hogy ezen a szinten a tudás már nagyon specifikus, egy-egy kutató kutatási területére már a közvetlen kollégáinak sincs rálátása. Az interjúk alapján megállapítottuk, hogy az egyetemi és annál magasabb szintű geometria tudás megértési szintjeinek kidolgozása és mérése felesleges befektetett energia lenne, mert csak nagyon szűk rétegre vonatkozna.**

Dolgozatunk második felében a matematikai kommunikáció egy másik vonatkozásával foglalkozunk, amely elvezet a szépség és érthetőség közötti konfliktus kérdésére.

Kiinduló feladatunk Róka Sándor példatárából azt alábbi, klasszikusnak számító feladat: 9 érme közül egy hamis, s ez könnyebb, mint a többi (a többi egyenlő súlyú). Egy kétkarú mérlegen súlyok felhasználása nélkül két mérlegeléssel keressük ki közülük a hamis érmét. Hogyan lehet ezt megtenni?” (Róka 2013: 74)

Ez a feladat számos helyen szerepel feladatgyűjteményekben, kvízekben érdekességként, rejtvényként. A legtöbb helyen azonban – ahogyan Róka Sándor könyvében is – csak a végeredmény és az ahhoz tartozó méréssorozat szerepel. Arról nem szólnak a megoldások, hogy kevesebb mérés miért nem elég. A teljes megoldás megtalálható pl. a Jaglom példatárban (Skljarszkij, Csencov, Jaglom 1979). Látható, hogy rövid, ám nagy mélységet megkövetelő gondolatmenetről van szó.

Itt fölvetjük azt a kérdést, hogy etikus-e egy feladatgyűjteményben egy feladatra hiányos megoldást közölni. Ennek kapcsán megvizsgáljuk, hogy egy feladat kitűzésénél milyen etikai kérdések merülhetnek fel matematikai szempontból, valamint tanári, szerzői és feladatkitűzői szemszögből. A felmerülő kérdésekre mi magunk nem adunk választ, de megkérdeztük Róka Sándort, hogy ő, aki az összes szerepben volt már, hogyan oldaná fel a helyzetet. A tanár úrral az interjút Szenderák Júlia, kutatócsoportunk tagja készítette, ez a mellékletben található.

Disszertációnkban három olyan problématípussal foglalkozunk, amelyről úgy gondoljuk, hogy a feladatgyűjteményben szereplő megoldásai félrevezetőek lehetnek a diákok számára. Az első típus a már említett „mérleges” feladatok, ahol egy kétkarú mérleg segítségével kell megállapítani, hogy látszólag egyforma érmék közül melyik a hamis. A második, „tevés” feladattípusban sivatagon való átkelést kell megtervezni megadott feltételek mellett, úgy, hogy ne fogyjon el az ivóvizünk. A harmadik típus az „állításos”, ahol egy lapon olyan mondatok szerepelnek, mint: „Ezen a lapon legalább 50 állítás hamis”. Ezek a feladatok általában könnyen, természetes módon általánosíthatók vagy terjeszthetők ki, azonban a kiterjesztések egy része még megoldatlan probléma, egy másik része pedig nagyon bonyolult, magasabb matematikai tudást igénylő megoldással rendelkezik. Dolgozatunkban bemutatjuk ezen problémák pillanatnyi helyzetét. Többek között az is kiderül, hogy mind a tevés, mind a mérleges feladattípus alapfeladatának van még megoldatlan kiterjesztése.

A megoldások szempontjából kicsit kilógnak a sorból az állításokról szóló feladatok. Ezért ezeket külön is elemezzük és interjút készítünk róluk három matematika doktorandusszal. Az interjúban azt vártuk, hogy maguktól ismerjék fel a problémákat és jussanak el a matematikailag helyes megoldáshoz, eszükbe jussanak a feladatok kiterjesztései és azokat is oldják meg. Ez a folyamat azonban nem ment végbe zökkenőmentesen, a problémák felismerésétől nem vezetett számukra egyértelmű gondolatmenet a feloldáshoz. Hosszadalmas és nehézkes úton tisztázódott számukra a feladattal kapcsolatos problémák feloldásának lehetséges módja. Sokatmondó ténynek gondoljuk, hogy matematika doktoranduszok számára is kihívást jelentett a feladatok és a vele kapcsolatos dilemmák átlátása.

A fenti matematikai problémák elemzése kapcsán arra jutottunk, hogy tanári beavatkozás nélkül ezeknek a feladatoknak a kitűzése komoly nehézségek elé állíthatja az érdeklődő diákokat, hiszen saját maguktól eljuthatnak megoldatlan vagy nagyon nehezen megoldható problémákig, ami komoly dilemmákat okozhat bennük. Ebben az esetben az elsődleges veszély az, hogy kudarcélményt okozhatunk vagy matematikai szorongás kialakulását segíthetjük elő az érdeklődő diákokban. Azonban nem csak rájuk jelent veszélyt az ismertett típusokhoz hasonló feladatok kitűzése.

Az ilyen feladatok a kevésbé érdeklődő diákok szempontjából is veszélyt jelentenek, mivel ezek a diákok azt hihetik, hogy a méréssorozat leírása már egy teljes matematikai bizonyítás, ezzel egy rossz bizonyítás-fogalom alakulhat ki bennük. Ez akár a tanulmányaikra is hátrányos hatással lehet, de a szemléletüket mindenképpen rombolja.

Röviden, más-más módon, de a matematika iránt érdeklődő és a kevésbé érdeklődő diákokra egyaránt negatív hatással lehet, ha olyan feladatokat tűznek ki nekik kellő útmutatás nélkül, amelyeknek a mintamegoldása hiányos és a teljes megoldás túlmutat a számukra befogadható szinten. **Mindkét típusú problémát kezelni kell, mégpedig etikus módon kell kezelni – ez a tanár fontos feladata.**

II.

TESZTELJÜK A TESZTET.

A GEOMETRIAI MEGÉRTÉS VAN HIELE – SZINTJEINEK ÚJRAGONDOLÁSA MAGYARORSZÁGI EGYETEMISTÁK TESZTEREDMÉNYEINEK ELEMZÉSÉRE TÁMASZKODVA.

II.1. Bevezető

A Van Hiele-elmélet és a rá alapuló mérés (Usiskin, 1982) a nemzetközi szakirodalomban széles körben ismert és elismert (Grigoriadou 2012). A szintek a geometriai tudásuk, szemléletük alapján sorolják diszjunkt osztályokba a diákokat. A szintrendszer Magyarországon való alkalmazását az is alátámasztja, hogy a Nemzeti Alaptanterv [3] és a kerettanterv [1] [2] követelményei megfeleltethetők a Van Hiele szinteknek, egyértelműen megállapítható, hogy melyik korosztálynak melyik szinten kellene lennie.

Dina van Hiele-Geldof és Pierre van Hiele az 50-es években dolgozták ki a geometria megértésének szintjeit (Dehaene 1992). Vigotszkij, Piaget és Bruner (Bruner 1966, 1986, 1990; N. Kollár–Szabó 2004, Vigotszkij 1967) elmélete szerint minden életszakaszban megvannak a megértés fejlődési szintjei. Ezek a szintek egymást követik, egy diák nem juthat el egy felsőbb szintre az összes korábbi szint elsajátítása nélkül. A tanulás folyamata leegyszerűsítve ezen szintek egymást követő eléréséből áll. Emellett a matematika és minden tudomány különböző területeinek vannak megértési szintjei, amelyek szigorúan egymásra épülnek. A tanítási folyamat célja nem más, mint hogy a diákok minél magasabb szintre jussanak el a megértés egymást követő szintjei közül. A van Hiele házaspár a matematikán belül a geometria megértésének szintjeit dolgozta ki részletesebben. Elméletüknek, mint ahogy a fent említett elméleteknek is, van egy kommunikációt érintő vetülete. Eszerint a különböző szinten lévő emberek „különböző nyelvet beszélnek”, és nem meglepő módon a különböző nyelvet beszélők nem értik meg egymást. Ezalatt a matematika, illetve azon belül a geometria esetén azt értik, hogy az egyik szinten lévők nem fogadják el a másik szinten érvelők indoklásait. Egy alsóbb szinten lévő diák fölöslegesnek gondolhatja a fölsőbb szinten lévő indoklását, mert nem érzi szükségesnek, hogy állításait külön alátámassza, számára azok teljesek. Ezzel szemben a fölsőbb szinten lévő nem tekinti teljes értékű indoklásnak az alsóbb szintű által adott magyarázatot.

A van Hiele házaspár elmélete nemzetközileg ismertté és elfogadottá vált, és ennek köszönhetően sokan kezdték el vizsgálni a geometriai fejlődés szintjeit. A magyar közoktatásban egyértelműen elkülönülnek ezek a szintek. Az első szint a 4. osztályos, a második szint a 6. osztályos, a harmadik szint a 8. osztályos, a negyedik szint pedig a 12. osztályos követelményrendszernek felel meg, ezt a későbbiekben részletesebben is kifejtjük. A 80-as években született meg a legismertebb teszt, amely ezeket a szinteket hivatott mérni (Usiskin 1982). Világszerte végeztek méréseket a felhasználásával, többek között az Egyesült Királyságban (Zachos 1994), az Amerikai Egyesült Államokban (Wang 2011), Malajziában

(Chew 2009), Hollandiában (Grigoriadou 2012), a Dél-afrikai Köztársaságban (Selkirk 2011). A több mint negyven ország közül, ahol alkalmazták a tesztet és elemzéseket tettek közzé eredményeiről, mi most csak néhányat emelünk ki.

Malajziában több tanulmány is foglalkozik a diákok fejlettségi szintjével. Itt 13 éves korban kezdődik a középiskola, a matematikaoktatás az országban nem egységes. A tanulmányok közül Tay-é (Tay 2003) az első osztályosokra fókuszál, Chong (2001) a második osztályosok szintjét mérte fel, Rafidah pedig a 4. osztályig terjesztette ki a vizsgálatokat (Rafidah 2003). Eredményeik alapján a malajziai középiskolás diákok első vagy második szinten vannak, és csak irányított Van Hiele-típusú oktatással jutnak el a második szintre.

Az Egyesült Királyságban (Jones 2002) erősen függ az oktatási módszertől, hogy milyen szintre jutnak a diákok. A központi szabályozás szerinti elvárt szint alacsonyabb, mint Magyarországon. Még így is ez alatt a szint alatt teljesít az alsóéves középiskolások 40 %-a, legtöbben az első vagy a második szinten vannak. Ez egy ellentmondásos helyzetet eredményez, amelyben a diákok megértési szintjét meghaladó szintű tananyagot kell(ene) tanítaniuk a tanároknak, ami pedig az elmélet kommunikációs megfontolásai alapján nem lehet hatékony. Ez rendkívül megnehezíti a tanítási-tanulási célok elérését, a későbbiekben kísérletet is teszünk ennek alátámasztására.

Görögországban sem jobb a helyzet (Kospentaris és Spyrou 2008), itt az oktatás még kevésbé egységes, a követelményrendszerről pedig a cikkből nem kapunk információt. A szerzők megállapítják, hogy a 15-23 évesek közül csak azok jutottak el második szintre, akik elvégeztek egy geometriakurzust is. Korábban már megjegyeztük, hogy ez Magyarországon körülbelül az általános iskola negyedik-ötödik osztályában elvárt szint. A méréseket mindenhol a Van Hiele-tesztek alapján folytatták (Usiskin 1982).

Ha megnézzük ezen 40 ország szakirodalmát, azt figyelhetjük meg, hogy mindenütt 1-2. szint körül mozognak a diákok. Ezek a nemzetközi eredmények azt sugallják, hogy a magyar NAT követelményei [3] [7] meghaladják más országok diákjainak és tanárainak teljesítményét. Önmagában is természetes a kérdés, hogy hogyan alakulnak a szintek a magyarországi diákok körében, elérik-e a tantervben szereplő elvárások szintjeit. A lényeges különbség a malajziai és brit diákok helyzetével szemben, hogy Magyarországon az oktatás erősebben központosított - a NAT lazábban, a kerettanterv [1] [2] szorosabban meghatározza a geometria oktatás tartalmát. Elvárható tehát, hogy Magyarországon a geometriai megértés térképe egységesebb legyen, és a fejlődési szintek korábbi életszakaszokra legyenek tehetők, mint a fenti országokban. Az eddigi viszonylag friss vizsgálatok általános iskolákban és középiskolákban vizsgálták a Van

Hiele szinteket mérő tesztek eredményeit (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016; Győry, Kónya 2018; Herendiné Kónya 2003) és megállapították, hogy a magyar átlagos középiskolások évfolyamtól függetlenül a kettes szinten vannak. Tehát elmondható, hogy a magyar diákok is jóval a hazai követelményrendszer alatt teljesítenek, valamint ami szintén meglepő lehet, hogy a gimnázium évei alatt nem tapasztalható fejlődés. Azonban az valóban igaz, hogy a diákok megértési szintje egységesebb, valamint ilyen viszonyításban magasabb is, hiszen a második szintet csak nagyon kevesen nem érték el. A középiskolai követelmények alulmúlásának okáról egy cikkünkben (Bereczky-Zámbó, Szabó, Muzsnay, Szeibert 2022) és a későbbiekben is részletesebben írunk.

Minket ezen kutatásunk alkalmával a Van Hiele modell magasabb szintjei érdekeltek, hogy milyen szinten állhatnak az egyetemi hallgatók, azon belül is a matematika szakos hallgatók. A fentiek alapján látható, hogy nagyobb matematikatudású diákok szintjeinek megállapítására és a Van Hiele elmélet helyességének tesztelésére magasabb szinteken is kevés példa volt mindmáig a nemzetközi szakirodalomban is. Magyarországon eddig általános iskolásokat és középiskolásokat vizsgáltak (Bereczky-Zámbó, Szabó, Muzsnay, Szeibert 2022; Győry, Kónya 2018), illetve tanítójelöltek szintjéről készültek felmérések (Herendiné Kónya 2003). Itthon a középiskolába belépő elvárt szint a NAT alapján a harmadik, a kilépő pedig a negyedik. Természetes, hogy a matematika szakra felvett egyetemi hallgatóktól az átlagnál magasabb geometriai megértési szintet várunk el, így megfelelő közegnek tűnt az elsőéves matematika alap-és tanárszakos hallgatók között megállapítani a szinteket, vizsgálni a modell helyességét. Azonban a középiskolai eredmények figyelembevételével elképzelhetőnek tartottuk azt is, hogy a hallgatók esetleg a várakozásainkon alul teljesítenek.

II.2. Kommunikáció

„Ha fejleszteni akarjuk a gyerek képességeit és gyorsítani fejlődését, akkor arról a szintről kell kiindulnunk, ahol a gyerek éppen tart, vagyis az elvárásoknak a gyerek képességeihez és szükségleteihez kell igazodniuk.” Ez Vigotszkij legközelebbi fejlődési zóna elméletének a mottója. A legközelebbi fejlődési zóna kifejezés (Vigotszkij 1967) arra utal, hogy a gyereket körülvevő környezet akkor a legtámogatóbb, ha egy – a gyermek számára optimális nagyságú – lépéssel éppen az aktuális fejlettségi szint előtt jár (N. Kollár – Szabó 2004). Az elmélet szerint akkor van esélye egy gyereknek a fejlődésre, ha a saját nyelvén szólunk hozzá: az ő pillanatnyi tudásának, képességeinek megfelelő szavakat és nyelvezetet használunk. Vigotszkij munkái posztumusz jelentek meg, néhány közülük csak évtizedekkel halála után.

Sokat hangoztatott alapelve, a legközelebbi fejlődési zóna elve további módszertani elemekkel kiegészítve a mai magyar tehetséggondozásban Pósa-módszer néven vált szélesebb körben ismertté.

A kommunikáció az élet számos színterén hatalmas jelentőséget kapott a történelem során és manapság is – magától értetődően az oktatás terén mindig is fokozott figyelmet kapott. Ez az elmélet hatványozottan jelenik meg Brunernél, aki reprezentáció-elméletét (Bruner 1966) felülvizsgálta, majd későbbi narratíva elméletében (Bruner 1986) kifejti, hogy a kulturális és személyiségfejlődést erősen meghatározza a családban végbemenő kommunikáció. Bruner azt mondja, hogy az oktatónak meg kell próbálnia arra ösztönözni a tanulókat, hogy maguk is felfedezzék az összefüggéseket. Kiemelkedő szerepet tulajdonít a szókratikus tanulásnak, ezért nagyon fontosnak tartja a kellően gyakori, szülő-gyerek közti beszélgetést. Ugyanebből az okból tartja nagyon fontosnak az oktató és hallgató közötti megfelelő kommunikációt. Az oktató feladatának tekinti azt, hogy a tanítani kívánt információkat, ide értve a gondolkodási módszereket, eljárásokat is, a tanuló jelenlegi értelmi állapotának megfelelő formába öntse. Láthatjuk, hogy Bruner elméleteinek magját is Vigotszkij legközelebbi fejlődési zóna elve adja. Ugyanez igaz az egyik legjelentősebb fejlődéskutató, Piaget elveire is. Itt szeretnénk megjegyezni, hogy bár Vigotszkij 1896-1934-ig élt, munkái és elméletei máig érvényesek, míg Piaget és Bruner munkái folyamatos felülvizsgálaton és átalakításon mentek keresztül az idők során. Bruner például saját maga felülvizsgálta korábbi téziseit évtizedekkel később, míg Piaget elméleteivel kapcsolatban elsősorban más kutatók fogalmaztak meg kétségeket (Weaver 1972).

A van Hiele házaspár ugyanezt a jelenséget – azaz azt, hogy minden gyermekhez a saját nyelvén kell beszélni, hogy fejlődést tapasztaljunk – a matematika területén fogalmazta meg. A Van Hiele-elmélet tulajdonképpen a legközelebbi fejlődési zóna elméletének geometriára való leképezése. A Van Hiele elmélet szerint, emellett, a matematika minden területén léteznek olyan fejlődési szintek, amelyek lineárisan egymásra épülnek, és egy adott szintre csak a többi alsóbb szinten keresztül lehet eljutni. Azaz egy fölsőbb szinten a megértés elképzelhetetlen az összes alsóbb szint megértése nélkül.

Az iskolai kommunikáció alatt jellemzően a tanórai előadásokat, magyarázatokat, beszélgetéseket értjük. A tanító tanár, oktató mindig az általa a diákokról feltételezett szinten szólítja meg a hallgatóságot. Az oktató által feltételezett szint nagyon gyakran nem egyezik meg a diákokról feltételezhető szinttel. És a diákokról feltételezhető szint ritkán egyezik meg a diákok tényleges szintjével. A legtöbb egyetemi oktató ugyanazt a szintet feltételezi a diákokról, amilyennel ő került be az egyetemre, vagy amilyen szintet az ő évfolyamtársai ütöttek meg annak idején. Feltételezhető szintnek tekintjük a NAT által megfogalmazott kompetenciákat, tananyag- és tudásanyagot, míg a valódi szint pedig az, amit a diák éppen az adott pillanatban képvisel. Így az egyetemi oktató gyakran nem veszi figyelembe, hogy ma már nem csak a legkiválóbb jelentkezőket veszik fel az egyetemre. Ugyanakkor a középiskolai tananyag folyamatosan átalakul és a diák sem éri el általában a feltételezhető szintet. Számos tanulmány mutatta ki, hogy a diákok nem rendelkeznek a szükséges kompetenciákkal, mert az iskolában nem az életre és nem a NAT kompetenciáira, hanem az érettségire készítik fel őket (Csányi–Pozsonyi–Szabó 2014; Kovács–Palotay 2012). A feltételezett és a valós szint közötti eltérések pedig komoly problémát szülhetnek a továbbiakban. A korábbi elméletek azt sugallják, hogy akkor van esély a tanítási folyamat sikerességére (most sikeresség alatt a gondolkodási- és problémamegoldó készség fejlesztését értjük), ha az oktató felméri a diákok szintjét és annak megfelelően alakítja kommunikációját. E nélkül „legjobb" esetben is csak a tananyag memorizálása következhet be, annak megértésre elképzelhetetlen.

II.3. A szintek

II.3.1. A Van Hiele szintek és a teszt

Az öt Van Hiele szint a következő (Crowley 1987; Bereczky-Zámbó, Szabó, Muzsnay, Szeibert 2022):

1. szint, a ráismerés, vizualizáció szintje: Rajzról, ábráról felismernek alakzatokat: kör, téglalap, négyzet, stb. Meg tudják nevezni ezeket, az alakzatokat egy egységként látják, a formát figyelve tekintenek rá. Az alakzatok részeit és tulajdonságait még nem ismerik fel. Elkülönítik, kategorizálják a különböző alakzatokat, de nem látnak kapcsolatot a különböző kategóriák között. Egy négyzetre például nem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy paralelogramma. Nem nevezik meg az alakzat részeit, mint például csúcs, oldal, szög.

2. szint, a vizuális vizsgálódás, elemzés, leírás szintje: A tanuló felismeri az alakzatok egyes részeit és az egyes részek viszonyát. Azonosítani tudják az alakzatok tulajdonságait, de ezeket még nem tudják összekötni és nem látják a különböző alakzatok tulajdonságai közötti összefüggéseket. Például egy négy derékszöggel rendelkező alakzatról meg tudják állapítani, hogy téglalap (akkor is, ha nincs szépen lerajzolva). Egy rombuszról tudják, hogy szemben lévő oldalai párhuzamosak vagy egyenlő hosszúak, de ezeket a tulajdonságokat még nem kötik össze. Egy egyenlő oldalú négyszögről tudják, hogy rombusz. Egy négyzetre még most sem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy paralelogramma.

3. szint, a fogalmak rendszerezésének, absztrakciónak szintje: A tanuló az egyes tulajdonságokat, fogalmakat már rendszerben látja. A tulajdonságok rendszerezése alapján következtetéseket tud levonni, és ebben a rendszerben fontos szerepe van az ok-okozatiságnak: például egy háromszögben két oldal egyenlőségéből következik két szög egyenlősége. Képesek definíciókat alkotni és megindokolni az állításaikat, következtetéseket levonni, de még nem teljes matematikai rendszerben gondolkoznak, nem értik a bizonyításokat. Tudják és értik, hogy minden négyzet téglalap, minden téglalap paralelogramma. Látják, hogy ha egy négyszög egyben téglalap és rombusz is, akkor az négyzet. A szakirodalomban tipikusan emlegetett példa a váltószögek felismerése, és az azzal való érvelés. Más típusú matematikai érvelésekre viszont még nem képesek. A geometriát még nem látják teljes ok-okozati összefüggésben.

4. szint, a formális következtetések szintje: Ez a szint egy általánosabb matematikai érettségi szint elérése a geometrián belül. Az általános matematikai szint alatt azt értjük, hogy már megkülönbözteti a definíciókat, tételeket, bizonyításokat, axiómákat, következményeket, elméleteket. Az állításoknál felmerül a bizonyítás iránti igény, ezeket a bizonyításokat értik és maguk is el tudnak végezni egyszerűbb bizonyításokat. Megértik a szükséges és elégséges feltételeket. A geometrián belül a tanuló megérti az alapfogalmak és az axiómák meglétét, az utóbbiakat el tudja különíteni a tételektől. Például be tudja bizonyítani, hogy egy háromszögnek van beírt köre. Teljes axiomatikus bizonyításra nem feltétlenül képesek. Például egy négy derékszöggel rendelkező négyszögre rámondja, hogy a szemben lévő oldalak egyenlők, de nem érzi, hogy ezt még be kéne bizonyítani.

5. szint, a fegyelem, a formális logika szintje. Megértik, hogyan épülnek fel a különböző matematikai rendszerek. Képesek absztrakt következtetések levonására, speciális geometriai interpretációk használata nélkül. Fel tudják mérni egy adott axióma hozzáadásának vagy kivételének hatását a rendszerből. Ez a szint már megköveteli a különböző geometriai axiómarendszerekben való gondolkodás és az azokban való bizonyítás képességét.

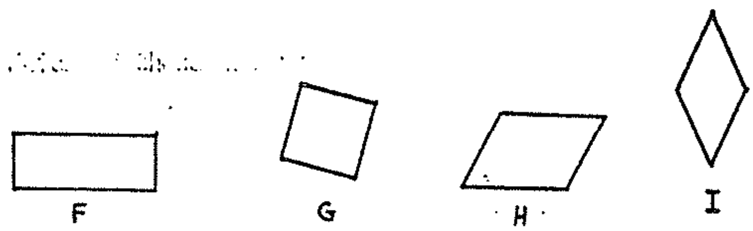
A Van Hiele modell alapján a diákok geometriai megértését ezen öt szint segítségével diszjunkt csoportokba lehet rendezni. A szintek talán legmeghatározóbb tulajdonsága, hogy rögzített sorrendűek és egymásra épülők. (Crowley 1987) Tehát a szintek elsajátításának sorrendje nem felcserélhető, és ahhoz, hogy egy tanuló egy magasabb szintre jusson, minden korábbi szintet el kell érnie. Az elmélet alapján a szintek elérhetők, tehát valós tanulási-tanítási cél lehet az egymás utáni egyre magasabb Van Hiele szintek elérése. Az elmélet kommunikációs megfontolásai alapján azonban a különböző szinteken állók „más nyelven beszélnek”, így nehezen értik meg és fogadják el egymás érveléseit és gondolatmenetét. Ezáltal a tanítási folyamat akkor lehet sikeres, ha a tanítás során a diákok valós szintjéhez igazítjuk a kommunikációnkat, „az ő nyelvükön próbálunk szólni”.

A hallgatók ilyesfajta geometriai megértésének vizsgálatára létezik egy nemzetközileg elismert teszt, az Usiskin-féle teszt (Usiskin 1982). Ez a teszt a Van Hiele szintek mérésére szolgál. Mind az öt szint mérésére 5-5 kérdés, tehát összesen 25 kérdés található a tesztben. A teszt jogköteles, az engedélyeket a szerzőtől megszereztük, és hozzájárulását követően kutatócsoportunk tagjai Győry Ákos vezetésével magyar nyelvre fordították. Mutatunk néhány példát a feladatokra.

Az első szintet mérő feladatok között szerepel az következő:

Melyik négyzet?

a. *Egyik sem.*
b. *Csak G.*
c. *Csak F és G.*
d. *Csak G és I.*
e. *Mind az.*



Az alábbi két feladat pedig a negyedik szint mérésére szolgál:

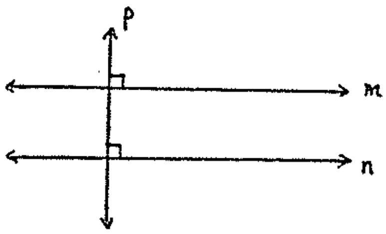
Tekintsük a következő síkban megfogalmazott állításokat:

i. *Két, ugyanarra az egyenesre merőleges egyenes párhuzamos.*

ii. *Egy egyenes, amelyik merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, merőleges a másikára is.*

iii. *Ha egy egyenes minden pontja egyenlő távolságra van egy másik egyenestől, akkor a két egyenes párhuzamos.*

Az alábbi ábrán az m és a p egyenesek merőlegesek egymásra, az n és a p egyenesek is merőlegesek egymásra.



A fenti állítások közül melyikből következhet, hogy m és n párhuzamosak?

a. *Csak i-ből.*
b. *Csak ii-ből.*
c. *Csak iii-ből.*
d. *i-ből vagy ii-ből.*
e. *ii-ből vagy iii-ből.*

Ezzel a feladattal pedig a teszt szerint az 5-ös szint meglétét lehet mérni:

Egy F-geometriában (ami különbözik attól, amihez hozzá vagy szokva) pontosan négy pont van és hat egyenes. Minden egyenesnek pontosan két pontja van. Ha a pontok P, Q, R, S, akkor az egyenesek {P; Q}, {P; R}, {P; S}, {Q; R}, {Q; S}, {R, S}.

Ebben a geometriában a metszi és a párhuzamos a következőt jelenti: például {P; Q} és {P; R} metszik egymást, hiszen P közös pontjuk, míg például {P; Q} és {R; S} párhuzamosak, mivel nincs közös pontjuk.

Az alábbiak közül melyik helyes?

a) *{P; R} és {Q; S} metszik egymást.*
b) *{P; R} és {Q; S} párhuzamosak.*
c) *{Q; R} és {R; S} párhuzamosak.*
d) *{P; S} és {Q; R} metszik egymást.*
e) *Az a)-d) állítások közül egyik sem igaz.*

A tesztet a következőképpen kell kiértékelni: egy kitöltő elérte az adott tesztszintet, ha az adott szinthez tartozó öt kérdés közül legalább négyre tudta a helyes választ, és az előtte lévő szintek mindegyikénél a szintet mérő öt kérdésből legalább négyre helyes választ adott. Az elért szintek közül a legmagasabb a kitöltő teszten elért szintje. Tehát egy tesztet kitöltő személy az 1. szinten áll, ha az első öt kérdésből legalább négyre helyesen válaszolt, viszont a második öt kérdés közül már csak legfeljebb háromra tudta a választ. Egy kitöltő a második szinten áll, ha az első öt, illetve a második öt kérdésből legalább négyet-négyet helyesen válaszolt meg, viszont a harmadik szintet mérő öt kérdésből már csak legfeljebb háromra tudott jól válaszolni, és így tovább. Egyes esetekben megkülönböztetnek erős és gyenge Van Hiele szinteket, erős szint esetén a fent említett szabály alapján minden elért szint kérdései közül legalább négyre kell jó választ adni, míg gyenge szint esetén egy szintet elért a tanuló akkor, ha legalább három kérdésre tudta a helyes választ, és a tanuló szintje az a szint, ami után a következő szinten legfeljebb két jó megoldást adott. A továbbiakban mi egy diák Van Hiele szintje alatt az erős Van Hiele szintet értjük.

II.4. Felsőoktatás és a szintek

Az egyetemisták geometriai megértési szintjének mérését megelőzték más kutatásaink, melyek részben egyetemisták, részben középiskolások körében zajlottak. A középiskolai vizsgálatok eredményei fontos alapot adnak a dolgozatunk témáját jelentő kutatásunkhoz, ezért röviden összegezzük őket a dolgozatban.

II.4.1. Korábbi eredményeink

Korábbi kutatásaink során felmértük a magyar középiskolás diákok Van Hiele szintjét, és azt összehasonlítottuk a NAT által előírt adott korosztályra vonatkozó szintekkel (Bereczky-Zámbó, Szabó, Muzsnay, Szeibert 2022). Megfigyelhető, hogy a NAT egymásra épülő elemekből felépíthető fejlődési folyamatot ír elő [3] [7].

A 8. osztály végére a diákoknak ismerniük kell a háromszög fogalmát és fajtáit, a speciális négyszögek fajtáit és ezek tulajdonságait, valamint a sokszögeket – elsősorban a szabályos sokszögeket. Emellett a kör és részeinek ismerete és adott feltételeknek megfelelő ponthalmazok megtalálása is szerepel az általános iskolai szakasz kimeneti körülményei között. A 9-12. osztály végére már azt várhatjuk a NAT alapján a diáktól, hogy a háromszögek és négyszögek fajtáinak rendszerét átlássa, tudja, mi a háromszög magassága, súlypontja, beírt köre és körülírt köre, a szabályos sokszögek beírt és körülírt köre és például Thalész tételével is tisztában legyen. Emellett képesnek kell lennie arra, hogy megértsen és megjegyezzen indoklásokat, cáfolatokat, következtetéseket és gondolatmeneteket, alkalmazni tudja őket akár új környezetben is és ismerjen bizonyítási módszereket. Az általánosítás, konkretizálás, példák és ellenpéldák keresése például egy indoklás hibáinak bemutatására; állítások, tételek megfogalmazása és bizonyítása direkt vagy indirekt módon szintén szükséges és fontos képesség a NAT szerint.

Láthatjuk, hogy ezek az elemek lényegében egyértelműen megfeleltethetők a Van Hiele szinteknek, ahogyan a kerettantervek bizonyos elemei is, melyeket itt terjedelmi okból nem részletezünk. A NAT és a KET alapján elmondható, hogy tanulónak az általános iskola 4. osztályának végére az első, 6. osztályra a második, 8. osztályra a harmadik szintre kell eljutnia, míg a középiskola 12. osztályára a negyedik Van Hiele szintet kell elérnie a NAT előírásai szerint. Ehhez képest azonban a középszintű érettségi (a diákok 95%-a középszinten érettségizik matematikából) geometria feladatai legfeljebb a harmadik szintet követelik meg. (Rékasi 2021). Ez azért probléma, mert sokszor mind a tanárok, mind a diákok kizárólagos célja az érettségi vizsgán való jó teljesítés (Csányi–Pozsonyi–Szabó 2014; Kovács–Palotay 2012), amihez pedig nincs szükség a bizonyítás iránti igény megjelenésére, azaz a negyedik szint elérésére. Mindezek ismeretében megdöbbentő, de érthető, hogy 570 magyar középiskolás korú diák – akik lényegében lefedik a magyar középiskolások teljes spektrumát – Usiskin-féle teszten elért eredményének átlaga 2,09 és 2,46 között mozog. Emellett a gimnáziumi évek alatt a geometriai megértési szintjük nem változik (Bereczky-Zámbó, Szabó, Muzsnay, Szeibert 2022; Győry, Kónya 2018).

II.4.2. Tesztelés az egyetemen

Annak érdekében, hogy megvizsgáljuk az elmélet és a teszt érvényességét felsőbb, egyetemi szinten, kitöltettük az Usiskin-féle tesztet az ELTE matematika alapszakos elsőéves diákjaival, illetve a matematikatanár szakos elsőéves diákjaival.

A felmérést először a matematika BSc-s hallgatók körében végeztük. Ebben a periódusban 65 elsőéves matematikus hallgató töltötte ki a VGHT-t klasszikus, papíralapú teszt formájában 2016 tavaszi félévének kezdetekor és a félév vége után közvetlenül. Hasonló kísérleti beállítást alkalmaztunk 2018 tavaszi félévében 46 tanárszakos hallgató részvételével. Ők az Edubase program használatával töltötték ki a VHGT-t, szintén a félév kezdetekor és annak lezárása után.

Mindkét csoporttal az egyetemi tanulmányaik második félévében végeztük el a kísérletet. Ennek egyik oka az volt, hogy így már egy féléven keresztül egyetemi tananyagot is tanulhattak matematikából, volt idejük alkalmazkodni az egyetemi élet kihívásaihoz szervezési és tanulmányi szempontból. Már sikeresen teljesítettek matematika tárgyakat, így a félév kezdetekor is elvárható tőlük, hogy ismerjék a matematikai fogalmak felépítését, többek között azt is tudják, hogy mit jelent az, hogy bizonyítás. Emiatt egészen biztosan meg kell lennie bennük a bizonyítási igénynek, nem csak geometriát, hanem a matematika minden területét illetően – azaz legalább a 4. van Hiele-szinten kell lenniük. A másik ok az volt, hogy az első egyetemi geometriakurzus mindkét szakon a II. félévre esik. A tesztet ezen kurzus megkezdése előtt, majd fél évvel később a sikeres geometriavizsga után kitöltetve ugyanazokkal a hallgatókkal az első mérés eredménye a gimnáziumi tanulmányaik során elért geometriai szintet mutatja, a második mérés eredménye pedig az első geometriai kurzus során elért szintet. A két szint különbsége megmutatja, az adott hallgató mennyit tudott fejlődni a kurzus segítségével.

A tesztek kitöltése előtt különböző előfeltevéseink voltak, így például valószínűsítettük, hogy a matematika irányban továbbtanuló hallgatók a két legmagasabb, tehát a 4. és 5. szinten, vagyis a NAT alapján legalább 12. osztályos szinten fognak állni geometriából. Ezen kívül pedig azoktól, akik a 4. szinten állnak, a geometriakurzus elvégzése során szintemelkedést vártunk. Ennek ellenére a középiskolai eredmények tanulságai alapján elképzelhetőnek tartottuk azt is, hogy lehet akár pár olyan hallgató, aki csak 3. szinten áll, az ő esetükben viszont a Van Hiele elmélet értelmében a megértési szintjük a kurzus elvégzésével sem emelkedhetett, részben a szintek egymásra épülése részben pedig az elmélet kommunikációs vetülete miatt, hiszen egy egyetemi geometriaórán az oktató minden bizonnyal magasabb szinten tárgyalja a tananyagot, mint amilyenen eredetileg ők voltak. Azonban az az eshetőség, miszerint valaki fél éven keresztül tanulhat az egyetemen geometriát és levizsgázhat belőle anélkül, hogy a NAT szerinti 12.-es szintet elérhetné, elsőre valószerűtlennek tűnt.

II.4.2.1. A VHGT teszt eredményei

	Matematika BSc		Matematika tanárszak	
	1. kitöltés (db)	**2. kitöltés (db)**	**1. kitöltés (db)**	**2. kitöltés (db)**
3. tesztszint	27	11	23	24
4. tesztszint	0	0	0	0
5. tesztszint	38	17	23	22
3.→5. ugrás	0		7	
5.→3. visszaesés	0		6	

A táblázat első oszlopában láthatjuk, hogy a 65 BSc hallgató közül az első kitöltés alkalmával 27 fő volt a teszt eredményei alapján a 3. szinten, 38 fő pedig az 5. szinten. Nem volt egy hallgató sem, akit 4. szintre sorolt a teszt. A második oszlopban láthatjuk, hogy az összlétszám a második kitöltetés alkalmával csökkent, összesen 28 fő töltötte ki újra a tesztet. Az alacsonyabb létszámnak az az oka, hogy nem tudtunk minden diákot elérni a vizsgaidőszak végeztével. A tesztet másodszor is kitöltő 28 fő közül 11 fő teljesített 3. szinten, 0 fő 4. szinten, 17 fő ötödik szinten. Az alsó két sorban látható 0 értékek azt mutatják, hogy nem volt olyan, aki a harmadik szintről az ötödik szintre ugrott volna vagy az ötödik szintről a harmadik szintre esett volna vissza a teszteredmények alapján. A második kitöltéskor 3. szinten teljesítő 11 hallgató aközül a 27 fő közül került ki, akik első alkalommal is 3. szinten töltötték ki a tesztet. Hasonlóan, az a 17 fő, aki a kurzus végén 5. szinten volt, már a kurzus elején is 5. szinten teljesített.

A táblázat harmadik oszlopában láthatjuk, hogy a 46 tanárszakos hallgató közül az első kitöltéskor 23 fő volt a teszt eredményei alapján a 3. szinten, 24 fő pedig az 5. szinten. Nem volt egy hallgató sem a 4. szinten. Ebből a csoportból mindenki kitöltötte a tesztet a második alkalommal, a sikeres vizsga után is. A teszteredmények alapján 24 fő teljesített 3. szinten, 22 fő ötödik szinten és ezúttal sem volt senki, akit 4. szintre sorolt a teszt. Ebben a csoportban 7 hallgató esetében fordult elő harmadikról ötödik szintre ugrás, 6 esetben pedig ötödik szintről harmadik szintre visszaesés a VHGT eredményei alapján.

II.4.2.2. A teszteredmények értelmezése és az általuk kijelölt kutatási kérdések

A fenti eredményekkel kapcsolatosan szeretnénk kiemelni és értelmezni néhány észrevételt. Az első ilyen észrevétel, hogy BSc-s diákoknál és a tanárszakosoknál is minden hallgató, aki értékelhető teljesítményt nyújtott, vagy az ötödik vagy a harmadik szinten áll(t). Ez két szempontból is problémás jelenség. Egyrészt, elképzelhetetlennek tűnt, hogy matematika szakos hallgatók a NAT szerint egy 8. osztályostól is elvárható szinten álljanak; emiatt már az első kitöltetés után felmerült a gyanúnk, hogy a teszt hibás. Másrészt, a hallgatók között nem volt 4. szinten lévő diák – aki elérte a negyedik szintet, az az ötödiket is. Sőt, számos olyan hallgató is volt, aki a 3. és 5. szint kérdéseit jól töltötte ki, a negyediket viszont nem. (Ilyenkor a szabályok szerint 3. szinten áll az illető.) Ez ellentétben áll a szintek egymásra épülésével. Már maga Usiskin (1982) is amikor megalkotta a tesztet, azt sejtette, hogy ez a teszt az 5. szintet nem jól méri, és a szakirodalomban több helyen is találunk erre vonatkozó kétségeket (Wilson 1990; Usiskin & Senk, 1990; Senk et al., 2022). Azonban, mint már említettük, a tesztet korábban főként 1-2. szint körül mozgó diákok körében töltötték csak ki, olyan alanyokkal nem, akik elérhették volna a magasabb szinteket. A mi eredményeink tovább erősítik a korábbi kétségeket arról, hogy az 5. szintet valóban lehet-e mérni és hogy ezek a kérdések tényleg mérik-e az 5. szintet.

Megfigyelhető volt az is, hogy az alapszakos hallgatóknál nem volt szintugrás, míg a tanárszakosoknál előfordult harmadik szintről ötödikre való ugrás és ötödikről harmadik szintre való visszaesés is a fél év eltelte során. Utóbbi jelenség annak mond ellent, hogy a Van Hiele-elmélet alapján nincs visszafejlődés a geometriai megértésben, egy már megszerzett szintet nem lehet elveszíteni. A szintugrások pedig a Van Hiele-elmélet kommunikációs vetületének mondanak ellent, amely szerint csak abban az esetben történhet szemléletfejlődés, ha az oktató és a hallgató közti kommunikáció megfelelő. Tehát az elmélet azt sugallja, hogy az év elején 3. szinten teljesítő hallgató a félév végén, a geometriakurzus ellenére sem vált szintet, ugyanis az egyetemi oktató által alkalmazott nyelv szintje magasabb az övénél: egy egyetemen matematikát oktató tanár minimum 4. szintet vár el a hallgatóságtól. Ezzel szemben 111 tanulóból mégis volt hét olyan, aki az első fordulóban 3., majd a második fordulóban 5. szinten teljesített.

A fentiek alapján személyes meggyőződésünkké is vált az, amit már maga Usiskin (1982) is felvetett: validálni kell a teszt eredményeit, vagyis tesztelni kell a tesztet. Annak érdekében, hogy ellenőrizzük, valósak-e a meglepő eredmények, interjúra hívtuk be a hallgatókat, azokat is, akik 3. szinten töltötték ki a tesztet és azokat is, akik 5. szinten teljesítettek.

II.4.3. A teszt tesztelése – Interjúk

Az interjúk a következőképpen zajlottak: Az összes diákot behívtuk egy interjúra. Az interjún általában a kutatócsoport két-három tagja vett részt és a diákok 1-3 fős csoportokban jelentek meg. Minden alkalommal ugyanazokat a kérdéseket tettük föl, és amikor egyszerre több fő vett részt az interjún, figyeltünk arra, hogy mindenkiről megkapjuk a szükséges információkat. Ez az információ az volt, hogy az illető valóban a teszt által kimutatott szinten van-e geometriából. Mindenkinek az alábbi két kérdést tettük föl:

1. feladat: *Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?*

2. feladat: *Igaz-e, hogy minden háromszögnek létezik köréírt köre?*

Elsősorban az első kérdésre adott reakciókra voltunk kíváncsiak. A válaszok minőségéből egyértelműen lehet következtetni a hallgató Van Hiele szintjére. Elsősorban azt szerettük volna megtudni, hogy:

1. Megadja-e a helyes választ.
2. Felmerül-e benne a bizonyítás igénye.
3. Látja-e, hogy a bizonyítás két részből áll.
4. Ad-e egy eljárást arra, hogy hogyan vette fel a két párhuzamos egyenest.
5. Visszavezeti-e a problémát egy másik problémára.
6. Visszavezeti-e a problémát az axiómákig.

Azt gondoljuk, hogy a 4. Van Hiele szinthez az 5. pontig el kell jutni. Felkészültünk arra is, hogy ha valaki nem jutna el a 2-3. pontig. Azért, hogy ezeknek az interjú alanyoknak ne legyen kudarcélménye, feltettük a második kérdést is. Sejtettük, hogy erre a kérdésre jól fognak válaszolni a hallgatók, ugyanis ez a kérdés a matematika érettségi tételek között is szerepel.

A BSc hallgatókkal készített interjúk során leszűrt tapasztalatok azt mutatták, hogy a teszt a negyedik szintig jól mér, megbízhatóak az eredményei. Ez alapján egy évvel később a tanárszakos hallgatókkal már nem az első kitöltés után végeztünk interjúkat, hanem a kurzus sikeres teljesítését követően. Ezzel az volt a célunk, hogy azt vizsgálhassuk, milyen hatással volt a kurzus a hallgatók fejlődésére, valóban igaz-e, hogy akik nem érték el az elvárt bemeneti szintet, azok nem tudtak fejlődni. A tanárszakosok közül főként azokat a hallgatókat hívtuk be, akik valamelyik alkalommal nem érték el az 5-ös szintet, de kontroll kedvéért néhány hallgatót azok közül is behívtunk, akik mindkét alkalommal 5-ös szinten teljesítettek. Amikor valaki nem mindkét alkalommal 5-ös szinten teljesített, az vagy azt jelentette, hogy a félév során szintváltás történt, vagy pedig azt, hogy a hallgató mindkét alkalommal 3. szinten írta meg a tesztet. A szintváltás mindkét irányba megjelent. Ezekről az esetekről a későbbiekben írunk.

A tanárszakosoknál a 2. kérdés az alapszakosakkal ellentétben az volt, hogy van-e minden háromszögnek beírt köre. A harminckét válaszolóból négy azt mondta, hogy igen, huszonnyolc pedig azt, hogy nem mindig. Voltak olyan interjúalanyok, akiknek miután nem sikerült bebizonyítaniuk, hogy minden háromszögnek van beírható köre, feltettük azt a kérdést, hogy van-e minden háromszögnek köréírt köre. A hallgatók közül volt olyan, aki miután ezt megoldotta, be tudta látni a beírt körre vonatkozó tételt is.

A teljesség kedvéért a dolgozatban nem csak összefoglaltuk az interjúk során tapasztaltakat, hanem néhányat pontosan le is írtunk.

II.4.3.1. *Példák alapszakos interjúkra*

Köszönés és leültetés után föltettük az 1. kérdést. (*Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?*) A diákok általában gyanakvóan néztek, keresték a csapdát. Megmondtuk nekik, hogy nem arra vagyunk kíváncsiak, hogy tudják-e a helyes választ, hanem a válaszadás közbeni reakcióikat figyeljük. A táblára felrajzoltunk egy egyenest és tőle távolabb egy d hosszú szakaszt, majd megkezdődött a feladatról való beszélgetés. A dolgozatban közölt interjúkban és interjúrészletekben **K** jelöli a kérdezőt, azaz az interjú készítőjét, **V** a válaszadót, azaz a hallgatót, akivel az interjú készült.

K: Mi a feladat megoldása?

V: Hát két egyenes.

K: Rajzolja be, hogy melyik két egyenes. (A hallgató odament a táblához és felrajzolt két látszólag párhuzamos egyenest.)

K: És miért pont ez a két egyenes? Most elegendő nekünk az, ha csak az egyik egyenesről beszél, látjuk, hogy a másiknál ugyanaz a helyzet.

V: Mert az egyenest azt úgy kapjuk, hogy merőlegest bocsátunk az eredetire, felmérünk d távolságot, ami megad nekünk egy pontot és ebben a pontban merőlegest bocsátunk az előbbi egyenesre.

K: És hogyan bizonyítaná be, hogy ez az egyenes a válasz?

V: Azt kell megmutatni, hogy az egyenes minden pontja jó, és más pont nem jó.

K: És azt hogy mutatná meg?

V: Felveszek az egyenesen egy tetszőleges pontot (közben rajzol) és ebből a pontból merőlegest bocsátok az eredeti egyenesre (felrajzolta az ábrára a harmadik derékszöget is). És akkor ez egy téglalap, tehát a szemben lévő oldalai megegyeznek. (Itt már tudtuk, hogy az interjúalany a 4-5. szinten van, de folytattuk a kérdezgetést.)

K: Honnan tudja, hogy ez téglalap?

V: Onnan, hogy négy derékszöge van.

K: Én csak hármat látok.

V: De akkor a 4. is derékszög.

K: Miért?

V: Mert egy négyszög belső szögeinek az összege 360°.

K: Ez miért igaz?

V: Húzzunk be egy átlót, és az a két háromszög egybevágó.

K: Honnan tudja, hogy ez a két háromszög egybevágó?

V: Hát mert mindkettőnek van egy szöge, ami derékszög, és ezen felül még egy szöge, ami megegyezik, és egy oldaluk pedig közös.

K: És miért egyenlőek azok a szögek?

V: Mert váltószögek.

K: Miért?

V: Mert az ábra szimmetrikus.

Itt megköszöntük a részvételt és elköszöntünk.

Az interjú során láthattuk, hogy a hallgatóban megvan a bizonyítás iránti igény, látja, hogy a bizonyítás két fő részből áll, egyaránt meg kell mutatni azt, hogy az egyenesnek minden pontja jó és azt is, hogy más pontok közül viszont semelyik nem jó. Az indoklásaiban törekszik arra, hogy ismert tételekre, definíciókra vezesse vissza a problémát, amit meg is tud tenni. Ezek alapján egyértelműen rendelkezik legalább a negyedik van Hiele-szinttel.

A válaszadók közül többen eljutottak a téglalap felrajzolásáig, és ettől a ponttól több eltérő bizonyítást is adtak. Volt, aki a négyszög szögeinek összegét úgy indokolta, hogy felosztotta azt két háromszögre és azt mondta, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180º. Ilyenkor megkérdeztük, hogy ezt honnan tudja. Válaszként felrajzolt egy háromszöget a táblára, melynek egyik oldalegyenesét a vele szemben található csúcsba tolta el és meghosszabbította a többi oldalegyenest is. Felhasználva, hogy az eltolás szögtartó és hogy metsző egyenesek metszéspontjában keletkező szemközti szögek egyenlő nagyságúak, belátta, hogy a háromszög szögeinek összege 180º, azaz a klasszikus bizonyítást mondta el. Mi itt csak arra figyeltünk, hogy a megfelelő résznél valóban kimondja-e a párhuzamossági axiómát, vagy legalábbis utal-e rá. Olyan is volt, aki berajzolta az oldalak felezőpontjait és megmutatta, hogy az ábra (négyszög) szimmetrikus. Interjúztattunk olyan hallgatót is, aki ezek között az állítások között körbe-körbejárt a beszélgetés alatt. A téglalap belső szögeinek összegét visszavezette a háromszög belső szögeinek összegére. Innen újra eljutott az eredeti feladathoz, majd az ekvivalens állítások között tovább mozgott – de nem jutott eszébe, hogy visszavezesse a feladatot az axiómákig.

Előfordult olyan hallgató is, aki másképp adta meg az egyenest: az eredeti egyenesen kijelölt két különböző pontot, merőlegest bocsájtott a két pontban az eredeti egyenesre, felmért *d*-*d* távolságot, majd az így kapott pontokra illesztett egyenest. Majd azt mondta, hogy ez az egyenes párhuzamos az eredetivel.

K: Mit jelent az, hogy párhuzamos?

V: Hogy nem metszik egymást.

(Ilyenkor úgy rajzoltuk az ábrát, hogy valahol távol a felrajzolt egyenes elmetszi az eredeti egyenest.)

V: Ilyen nem lehet.

K: Miért? (Itt kicsit többet gondolkozott a tanuló, de ráérzett arra, hogy a kapásból felmerülő válaszok nem lennének helyénvalóak.)

Rövid gondolkodás után azt válaszolta, hogy szimmetriai okok miatt a túloldalon is lenne egy metszéspont. Két egyenesnek pedig nem lehet két metszéspontja, hacsak nem egyeznek meg.

Mind a válasz alapos végiggondolása, mind az indoklás helyessége azt támasztja alá, hogy ez a hallgató is legalább negyedik van Hiele szinten van. Akadt azonban olyan matematika BSc-s hallgató is aki kevésbé mintaszerűen válaszolt a kérdésre. Bemutatunk egy ilyen típusú interjút is:

V: Hát 2 egyenes.

K: Melyik kettő?

V: Hát ez meg ez (felrajzolta a táblára).

K: És miért az?

V: Hát mert ez az egyenes.

K: De hogy kapta meg ezt az egyenest?

(Ekkor ő is megadta jól az eljárást, amivel az egyenest felvette. – Általában igy történt a többi, hasonló jellegű interjúkezdés után is. Kevesen voltak, akik az eljárást is hibásan vagy hiányosan mondták el.)

K: És miért ezek azok a pontok?

V: Mert ezek vannak rajta az egyenesen.

Ezen a ponton nyugtáztuk, hogy erős segítséggel sem kelthető fel a bizonyítás iránti igény a hallgatóban, azaz legfeljebb harmadik szinten lehet. Gyorsan témát váltottunk és megkérdeztük, hogy van-e minden háromszögnek köréírt köre.

A továbbiakban az interjúkból csak részleteket emelünk ki, amelyeket fontosnak tartunk egy-egy jelenség szemléltetéséhez.

A szerkesztési eljárást más formában is megadta egy interjúalany, az alábbi módon: az eredeti egyenesen kijelölt két különböző pontot, merőlegest bocsájtott a két pontban az eredeti egyenesre, felmért d-d távolságot, majd az így kapott pontokra illesztett egyenest és innen nem jutott tovább. Innen kicsit körülményesebb is az általunk ismert bizonyítás. Ezt az is mutatja, hogy számos 5. szintű hallgató is először így vette fel az egyenest, majd amikor megkérdeztük, hogy ennek az egyenesnek miért jó minden pontja, akkor hirtelen taktikát váltott, másképp vette fel az egyenest, mert látta, hogy az a módszer célravezetőbb.

Azoknál, akik nem tudták megválaszolni az eredeti kérdést, minden esetben feltettük a háromszög köréírt körével kapcsolatos kérdésünket is. Egy hallgató kivételével kis rávezetés után mindenki tudta, hogy igen, létezik minden háromszögnek köréírt köre és ez az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Minden alkalommal lerajzoltuk úgy a három egyenest, hogy nem egy pontban metszik egymást. Ekkor elmondták, hogy ez lehetetlen, ezek egy pontban metszik egymást és sikerült indokolniuk is. Érdekesség, hogy egy hallgató úgy bizonyította ezt be, hogy rajzolt egy háromszöget, köré egy nagy kört és annak a sugarát kezdte el csökkenteni.

II.4.3.2. *Példák tanárszakos interjúkra*

A tanárszakosok, akiket később teszteltünk, abban különböznek a matematika BSc szakosoktól, hogy nekik részben más a tananyag: náluk nagyobb hangsúlyt kap az elemi geometria (hiszen később a középiskolában is azt kell tanítaniuk), ezért az általuk tanult anyagrész közelebb áll az Usiskin-féle teszt kérdéseinek a szelleméhez. Ugyanakkor kevesebb „magas matematikát” tanulnak, mint az alapszakos hallgatók. Az azonban elmondható, hogy bár máshogyan és mást tanulnak a tanárszakosok, ezen a képzésen is elvárás velük szemben az első félév végén, hogy kialakuljon bennük egyfajta alapvető matematikai kultúra, melynek része a bizonyítás iránti igény is. Ez változó mértékben teljesült a kutatásunkban vizsgált hallgatókra, ahogyan a következőekben közölt interjúk során is láthatjuk.

Alább egy olyan hallgató válaszaiból idézünk, aki az első alkalommal 5-ös, második alkalommal 3-as szintet ért el a teszten, viszont az interjú során kétséget kizáróan meg tudtuk állapítani, hogy valójában csak 3-as szinten van.

K: Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?

V: Tehát van egy egyenes, nevezzük e-nek, és egy d távolság, vagyis egy szakasz. (Közben rajzolja.) Ezt most szerkesszem meg neked, vagy csak mondjam el, hogy hol vannak azok a pontok?

(Megkértük, hogy mondja meg, hol vannak a pontok. Ezt sikeresen megtette, majd ezután megpróbáltuk rávezetni arra, hogy ezt bizonyítsa is be.)

K: És ez biztos?

V: Miért ne lenne az? Szerintem biztos.

K: És miért biztos ez akkor?

V: Az e egyeneshez kettő párhuzamost szerkesztettünk, és mivel párhuzamosak, és ezt tudom, mert ugyanazt a... Öhm. Mivel kettő helyen is felmértem, és a végpontokat kötöttem össze, ezért biztos, hogy párhuzamost kaptam, mert hogy bármelyik következő ponton néznék egy merőlegest, akkor az is ugyanúgy d távolságra lenne.

K: És miért lenne az is?

V: Mert párhuzamos.

K: És nem lehetne például úgy, hogy: (ekkor összekötöttük a két kijelölt pontot egy olyan görbével, ami nem d távolságra volt e-től minden pontban).

V: Ez nem egyenes. Nem tudom mire vagy kíváncsi most még.

K: Be tudnád-e látni, bármelyik pontról, hogy ezek jók, vagyis hogy ezek mind d távolságra vannak?

V: Szerintem nem tudnám belátni, mármint most ide tudnék húzni, de ez nem számítana belátásnak…

Ezután rögtön áttértünk a második feladatra. Láttuk, hogy több rávezető kérdés kell ahhoz, hogy egyáltalán próbáljon érdemi indoklást adni a hallgató, nem csak az eljárást ismertetni, viszont ezután sem ér célt, a bizonyítás iránti igény mellett a képesség terén is mutat hiányosságokat. Azt mindenképpen pozitívumként értékeljük, hogy az utolsó idézett mondatából ítélve képes érzékelni, mit tekinthetünk bizonyításnak és mit nem – talán már jó úton volt ahhoz, hogy elinduljon a harmadik szintről a negyedik felé, de az interjú pillanatában még határozottan az előbbihez tartozott.

Volt olyan 3-as szintű hallgató, aki több alkalommal is az általa rajzolt ábrára igyekezett támaszkodni, nem tudott elvonatkoztatni tőle és általánosságban gondolkozni.

(A második, háromszög beírt körével kapcsolatos kérdés bizonyítási próbálkozásából idézünk.)

V: Várjál, rajzolok egy jobbat, hátha kitalálok tőle valami okosat.

K: Jó, és akkor egyáltalán létezik ez a metszéspont? Kettő metszéspontját ugye mindig ki tudjuk választani, de a harmadik biztos, hogy ugyanott metszi őket?

V: Szerintem mindig metszik egymást. Várj, most rajzolok egy nagyon absztraktat. Hát, ebből nem látok sokat… Erre nem tudok biztosat mondani, de ha kéne, tuti azt mondanám, hogy metszik.

Az ábrához való ilyen mértékű ragaszkodás (és mellette a szinte teljesen hiányzó bizonyítási igény) szerencsére ritkán fordult elő.

A következő példa olyan lesz, ami alátámasztja a 4. szint finomításának szükségességét, hiszen lényegi különbség van például a bizonyítási igény megjelenése, és a különböző nehézségű bizonyítások elvégzése között, valamint abban is jelentős különbségek mutatkoznak, hogy a hallgatók milyen bonyolultságú állításokra vezetik vissza a kérdést a bizonyítás során. Az alábbi részlet egy interjú második feléből, a háromszög köréírható körével kapcsolatos részből származik. A hallgató eljutott addig, hogy a köréírható kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja, majd az alábbi párbeszéd zajlott:

V: (…) És most megint meg fogod kérdezni, hogy ezek minden esetben metszik egymást? Mert arra nem tudok válaszolni, de mivel van mindegyik háromszög minden oldalának szakaszfelező merőlegese, ezek pedig egy pontban metszik egymást - ezt nem tudom bizonyítani, - akkor biztos, hogy van köréírható körük is, az összesnek.

K: Most már akkor tényleg csak az van hátra, hogy ezek egy pontra illeszkednek. Próbáld meg, aztán legfeljebb megyünk tovább, ha nem megy, nem muszáj.

V: Gondolkodom. De akkor ezt most már feltehetem, hogy van köréírható köre, vagy ezt csak akkor tehetem fel, hogyha ezt már bebizonyítottuk?

Itt arra láthattunk példát, amikor a bizonyítási képességek voltak hiányosak. Bár az igény megjelent az indoklásra, nem látta a hallgató, hogy mi az, amit fel szabad használnia a bizonyítás során és mit nem, nem volt ötlete, hogy hogyan kezdje el egyáltalán a bizonyítást.

Sok esetben pont a bizonyítási igényről világlott ki, hogy nem túl erős, ha van egyáltalán:

K: Van-e minden háromszögnek beírt köre?

V: Van.

K: És miért?

V: Mert a középpontja a (…) szögfelezők metszete.

K: És ez miért igaz?

V: Mert ezt tanultuk az iskolában.

Ezután nem folytatta a hallgató, egyáltalán nem érezte, hogy válaszát ebben a formában egyáltalán nem tekinthetjük indoklásnak. Nem próbálta még végiggondolni, hogy amit „tanultak az iskolában”, az miért van úgy – pedig már egy félévet tanult az egyetemen, ahol, ugyan geometriát nem tanult, de más tárgyakat igen és így a szemlélete részévé kellett volna válnia annak, hogy mindent indokolni próbáljon.

Egy másik példa a bizonyítás iránti igény hiányára:

(Miután nem sikerült a beírható kör meglétét bizonyítania egy másik hallgatónak, feltettük neki a kérdésnek a köréírt körrel kapcsolatos verzióját is:)

K: Van-e minden háromszögnek köré írható köre?

V: Van.

K: És miért?

V: Mert az oldalfelező merőlegesek mindig metszik egymást, egy pontban.

K: Miért?

V: Nem tudom, mert így működik a matek.

Ezt kimondva kis szünet után a hallgató megadta a klasszikus bizonyítást, két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helyével, „Ja, igen, ez volt a bizonyítás…” és miután ezt megoldotta, a beírt körre vonatkozó tételt is be tudta bizonyítani, azonban kijelenthető, hogy az igényt csak erős külső motiválásra lehetett felszínre hozni.

II.4.3.3. Az interjúk elemzéséből levonható következtetések

A tanárszakos hallgatók interjúi alapján egyértelműen látható volt, hogy aki legalább egyszer akár az első, akár a második alkalommal a 3. szinten töltötte ki a tesztet, az valójában a 3. szinten van. Azaz, sem a szintugrások, sem a visszaesések nem valósak. Az interjúk során kiderült a jelenségek valós magyarázata is.

A látszólagos szintugrások hátterében az áll, hogy a tanárszakosoknál az Edubase programnak a segítségével végeztük a tesztelést. Sajnálatos módon a program a kitöltést követően megmutatta az elrontott válaszokat, és azok helyes megoldását is. Így a diákok közül voltak néhányan akik emlékeztek, hogy előző alkalommal mit rontottak el, és ez alapján tudták javítani az eredményüket. Köztük két hallgató is volt, aki egy év orvosi egyetemi képzés után jelentkezett át a tanárszakra, így a gyors és hosszú távú memorizálás terén rendkívül rutinosak voltak.

Ahogyan azt korábban említettük, az elmélet az 5. szintről való visszalépést sem engedné, ennek ellenére voltak olyan tanulók, akik bár 5. szintet értek el az első teszten, a másodikon 3. szinten teljesítettek. Az interjúk során kiderült, hogy ők azon kevés emberek közé tartoztak, akik igen jó érzékkel tudtak tippelni, lehet véletlenül jól kitölteni egy tesztet. A véletlen jelleget igazolja az is, hogy másodjára már nekik sem sikerült jól tippelni és a jó helyett rossz választ jelöltek, mivel nem volt tényleges megértés a kezdeti jó válasz hátterében. Megállapítható tehát, hogy a Van Hiele-elmélet ezen része egyetemi szinten sem vezet ellentmondásra.

A látszólagos szintugrásokat és visszaeséseket az interjúk alapján korrigálva az alábbi eredménytáblázatot kapjuk:

	Matematika BSc		**Matematika tanárszak**	
	1. kitöltés (db)	**2. kitöltés (db)**	**1. kitöltés (db)**	**2. kitöltés (db)**
3. tesztszint	27	11	24	24
4. tesztszint	0	0	0	0
5. tesztszint	38	17	22	22
3.→5. ugrás	0		0	
5.→3. visszaesés	0		0	

A korrigált eredmények alapján is problémás jelenség maradt az, hogy egy hallgató sem teljesített negyedik szinten, illetve az is, hogy több, harmadik szintre sorolt hallgató helyesen töltötte ki az ötödik szintre vonatkozó kérdéseket a VHGT-ben. Ez alapján a szintek mérésére szolgáló teszt az 5. szinten megbukott, a szakirodalomban megfogalmazott kétségek igazolást nyertek azt illetően, hogy ha létezik is 5. szint, nem biztos, hogy mérhető – legalábbis ez a teszt biztosan nem azt méri.

II.4.4. Túl a Van Hiele szinteken

A következő néhány fejezet tartalmát cikk formájában benyújtottuk egy folyóirathoz. A kézirat a kapott bírálói vélemények alapján átdolgozás alatt áll.

A Van Hiele elmélet kommunikációs része nem vezetett ellentmondásra az egyetemi kísérletünk alapján. A Van Hiele-ék által meghatározott szintek valóban egymásra épülnek, és a 4. szintig jól mérhetőek az Usiskin által létrehozott teszttel. Ami viszont nem igaz, az az, hogy kizárólag ezek a geometria megértésének lehetséges szintjei. Az első három szint csak alakzatokkal foglalkozik, viszont a geometria egyáltalán nem csak síkbeli alakzatokról szól, főként nem csak a parallelogrammáról, hanem sok minden másról is. Az igaz, hogy léteznek olyan tipikus megértési szintek, amelyek egymásra épülnek és igaz rájuk a Van Hiele elmélet, de ez nem jelenti azt, hogy ne lehetne felírni másféle szinteket is, amik nincsenek ellentétben a Van Hiele elmélettel. Azt gondoljuk, hogyha az egész geometriát kell a tesztnek lefednie, akkor nincs bizonyítva, hogy ez a teszt azt is méri. Nem tudjuk, hogy aki itt 5. szinten teljesít, az a geometria más területén, más értelmezésénél hogyan szerepelne.

Az Usiskinre hivatkozó cikkek alapján úgy tűnik, hogy 1980-ban ezt a tesztet egységesen jónak ítélték a világban. Azóta is használják és működik, leszámítva egyetlen elemet. Ez a kivétel sok helyen, már magánál Usiskinnél is megemlítést nyer, kutatásunk során pedig be is bizonyosodott, ez pedig az 5. szint. Tapasztalataink azt mutatják, hogy még a matematikával komoly szinten foglalkozó egyetemistáknál sem merül fel triviálisan az 5. szint, azaz a más axióma rendszerben, és a más geometriában való gondolkodás és bizonyítás képessége. Ugyanakkor egyáltalán nem igaz, hogy tudni kell a mi geometriai rendszerünkben bizonyítani ahhoz, hogy valaki axiomatikusan gondolkozzon egy másikban. A teszten nem véletlenül tapasztaltuk, hogy 12 olyan hallgató is volt, aki teljesítette a 3. szintet és az 5. szintet is, de a 4. szint nem sikerült neki. Az 5. szint, úgy gondoljuk, megbukott, mert hol bukhatna meg máshol, mint egy egyetem matematika szakán; és főleg azért, mert a világon nagyon kevesen jutnak el odáig, hogy lehetőségük legyen ilyen szinten gondolkozni. Ezt a szintet lehet, hogy be kellene illeszteni valahova, de az nem igaz, hogy lineárisan fejlődik és a 4. Van Hiele szint után következik, hanem ennek a szintnek a fejlődése párhuzamosan történik a matematikai érettséggel, és nem pedig a geometriai megértéssel.

II.4.4.1. A negyedik szint finomítása

A Van Hiele házaspár által megalkotott elmélet továbbfejlesztésének egy lehetséges iránya a 4. szint finomítása és az elmélet kibővítése további lexikai tudással. Több feltételezett tudásanyagra építve összetettebb kérdések feltevésére nyílik lehetőségünk. Ez a gondolat azért is merül fel, mert a van Hiele-elmélet a legjobb szándékkal nézve sem fedi le a teljes középiskolai, még kevésbé az egyetemi geometria tananyagot és gondolkodást. A negyedik van

Hiele-szint finomításának szükségességét egy feladaton keresztül szeretnénk illusztrálni, amely az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny (OKTV) második fordulójában került kitűzésre a II. kategória versenyzői számára a 2021-2022-es tanévben [4]. A verseny 3 fordulóból áll és 3 kategóriába sorolják a résztvevő diákokat a heti matematika óraszámuk alapján.

A feladat:

A hegyesszögű ABC háromszögben $AB \neq CB$, az AC oldal felezőpontja F. Legyen a B-ből induló magasságvonal talppontja az AC oldalon T, az A és C pontok merőleges vetülete a háromszög B csúcsából induló belső szögfelezőjének egyenesén pedig rendre P és Q.

(a) Bizonyítsuk be, hogy P, Q, F és T egy körön helyezkednek el.

(b) Legyen R az ABC köré írt kör sugara, r pedig a P, Q, F és T pontokat tartalmazó kör sugara. Határozzuk meg az ABC háromszög legnagyobb és legkisebb szögének arányát, ha $ABC\angle = 72°$ és $R : r = 2 : 1$.

Mi az (a) feladatrészre fogunk fókuszálni a továbbiakban. A feladatot és mintamegoldását a honlapon [4] szereplő formában közöljük alább, a jobb érthetőség érdekében saját készítésű ábrákkal kiegészítve.

3. feladat A hegyesszögű ABC háromszögben $AB \neq CB$, az AC oldal felezőpontja F. Legyen a B-ből induló magasságvonal talppontja az AC oldalon T, az A és C pontok merőleges vetülete a háromszög B csúcsából induló belső szögfelezőjének egyenesén pedig rendre P és Q.

(a) Bizonyítsuk be, hogy P, Q, F és T egy körön helyezkednek el.

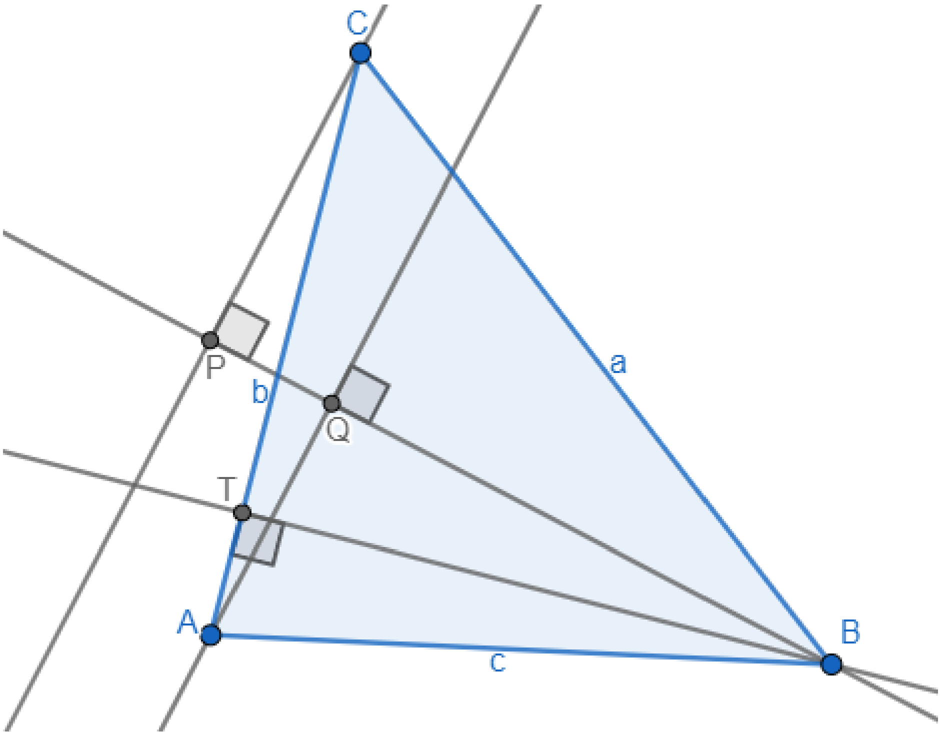
(b) Legyen R az ABC köré írt kör sugara, r pedig a P, Q, F és T pontokat tartalmazó kör sugara. Határozzuk meg az ABC háromszög legnagyobb és legkisebb szögének arányát, ha $ABC\angle = 72°$ és $R : r = 2 : 1$.

Megoldás: (a) Legyen $ABC\angle = \beta$ és az ABC köré írt kör B-t nem tartalmazó AC ívének felezőpontja S. Az ív felezőpontján áthalad AC felezőmerőlegese és a B-ből induló belső szögfelező is. Az alábbiakban az $AB < CB$ esetet tárgyaljuk, ekkor a pontok elhelyezkedése az ábrának megfelelő, azaz $AT < TC$ és a szögfelezőn a pontok sorrendben B, P, Q és S. Az $AB > CB$ eset ehhez hasonlóan tárgyalható, vagy az alábbi gondolatmenet irányított szögekkel tekintve általánosan megfelelő. 1 pont

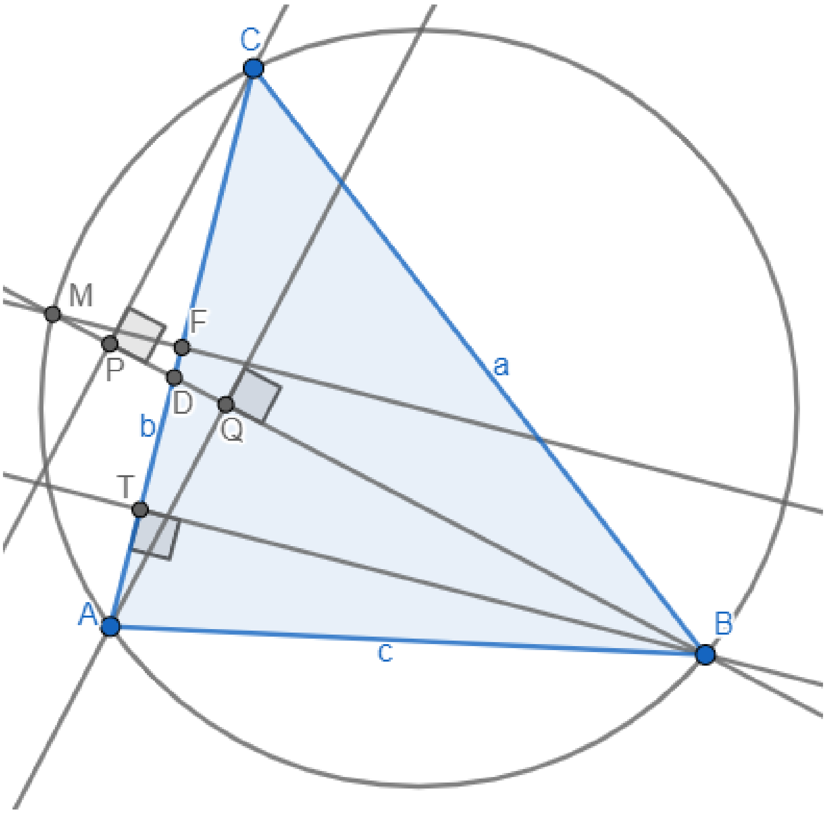
AB Thalesz körén rajta van P és T, így $ATPB$ húrnégyszög. Mivel a húrnégyszögek szemközti szögeinek összege 180°, ezért $ABP\angle = CTP\angle = \beta/2$. 1 pont

CS Thalesz körén rajta van Q és F, így $CFQS$ húrnégyszög, amelyben $FCS\angle = FQB\angle$. Másrészt $FCS\angle = \beta/2$, hiszen az AS ívhez tartozó kerületi szög, ebből adódóan $FQB\angle = \beta/2$. 1 pont

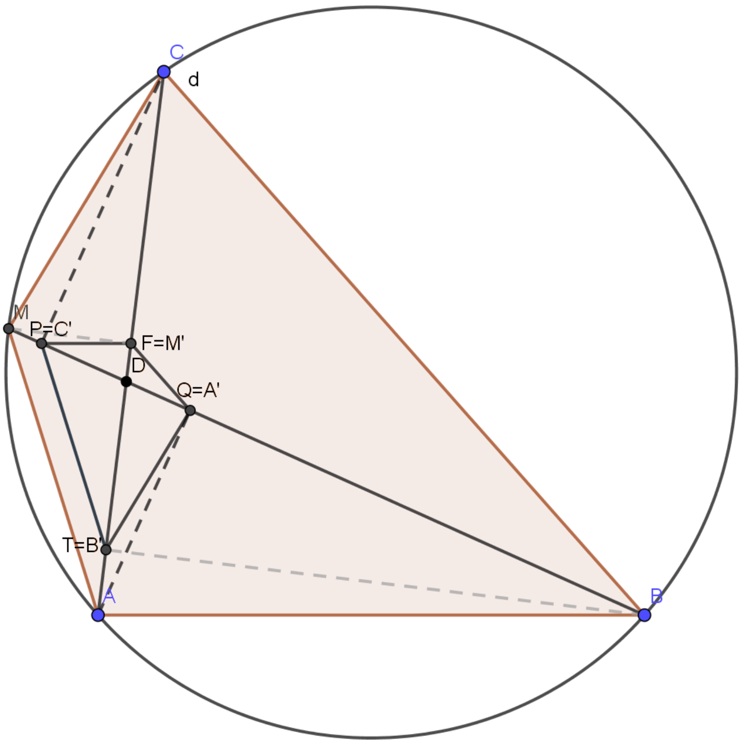
$CTP\angle = FTP\angle = \beta/2 = FQB\angle = FQP\angle$ és a PF egyenes ugyanazon oldalán van T és Q, így a PF szakasz $\beta/2$ szögű látókörén van T és Q. Ezzel megkaptuk, hogy P, Q, F és T egy körön helyezkednek el. 1 pont



1. ábra – saját készítésű ábra a Geogebra online verziójával készítve



2. ábra.- saját készítésű ábra a Geogebra online verziójával készítve



3. ábra - saját készítésű ábra a Geogebra online verziójával készítve

Van egy olyan megoldás is, ami a kerületi szögek tételét alkalmazza az ABC háromszög körülírt körében, majd folytatódik másik körökkel, például a CB szakasz rajta van a CPAM köréírt körén és a CPTB köréírt körén, a PT szakasz emellett rajta van a PTFQ körön, az FQ rajta van a FMAQ körön stb. Ha valaki a kerületi szögekkel próbálja ezt a feladatot megoldani, akkor azt találja, hogy szinte minden szakasz legalább két körön van rajta. A problémamegoldás során ezen a ponton felmerülhet a kérdés, hogy vajon az összes körre szükség van-e, milyen sorrendben lenne érdemes felhasználni őket, illetve hogy elég információt adnak-e, be lehet-e fejezni a megoldást csak a kerületi szögek tételével.

Kézenfekvő lehet az az észrevétel, hogy rengeteg hasonló háromszög és derékszögű háromszög fedezhető fel. Például, az alábbi hasonlóságok a köröket használó megoldáshoz képest sokkal könnyebben, kevesebb eszköz használatával felfedezhetők: $BTD\,\Delta \sim AQD\,\Delta \sim CPD\,\Delta \sim MFD\,\Delta \sim ATX\,\Delta \sim BQX\,\Delta$.

A megoldáshoz nem csak egyesével ezekre az információkra van szükség, akár a körökre, akár a háromszögekre, hanem szükséges mellé egy geometriai szemlélet, azért, hogy az egész rendszert egészében lássuk. Az első ötletek összegyűjtése után ki kell választani, melyek azok az információk, amelyekre szükségünk van és azokat milyen sorrendben kell felhasználnunk.

A probléma egy másik lehetséges megoldása azon a megfigyelésen alapul, hogy a T,Q,F,M pontokat úgy kapjuk, hogy az AC és MB szakaszokat merőlegesen levetítjük egymásra. Emiatt a CBAM és a FQTP négyszögek hasonlóak, a hasonlóság aránya $cos\ \delta$, ahol δ a két szakasz által bezárt szög.

Nézzük meg kicsit alaposabban a vetítésen alapuló megoldásmenetet. A DT az AC-ra vett merőleges vetülete a TB-nek. Ahol a szögfelező és az oldal metszi egymást, azt a szöget elnevezzük deltának. Észrevesszük, hogy rávetítjük az egyik csúcsot a másikra, a másikat meg az egyikre, tehát ezek a szakaszok koszinusz deltaszorosára változnak. Ugyanígy koszinusz deltaszorosára változik a másik két szakasz is, amikor a C és az M pontokat kapjuk vetítéssel.

A DAB háromszögnek és a DCB háromszögnek közös szöge a δ; a vetület után kapott DQT háromszögnek ugyanúgy megmaradt a δ szöge (mivel ugyanaz a szög). A DQ szakasz a DA vetülete, a DT pedig a DB-é, azaz, $cos\,\delta$ -szorosára csökkentettük a háromszöget (miközben tükröztük is). Hasonló gondolatmenet mondható el a másik háromszögről. Tehát megállapítható, hogy ugyanebből a D csúcsból ugyanúgy kiindul két háromszög, amik hasonlóak az eredeti háromszögekhez, csak éppen helyet cseréltek; a hasonlóság aránya ugyanaz, a metszéspont ugyanolyan arányban vágja szét az átlókat, ezért az a kapott háromszögek által alkotott négyszög hasonló az eredeti négyszöghöz és hasonlóság aránya $\cos\delta$.

Emiatt, ha az első négyszög húrnégyszög, akkor a második is, és ha a második húrnégyszög, akkor az első is. Azt, hogy az első négyszög húrnégyszög, be is láttuk azzal, ha ismerjük az információt, hogy a szögfelező és az oldalfelező merőleges egy pontban metszi egymást.

Láthattuk, hogy a feladatot többféle gondolatmenettel lehet megközelíteni. Az egyik a vetítéseken alapul. Egy másikhoz meg kell keresni számtalan kerületi szöget és alkalmazni a Thalész-tételt. Egy harmadik lehetőség, hogy észrevesszük: fel tudunk rajzolni hat egymáshoz hasonló háromszöget. A mintamegoldás ezeknek egy kombinációja. Bár az ember azt gondolná, hogy a hasonló háromszögek észrevétele tudásban megelőzi a kerületi szögek tételének felhasználását, ami pedig megelőzi vagy egy szinten van a vetítések észrevételével, ezek a bizonyítások tartalmilag lényegében függetlenek. A geometriai szintek szempontjából nézve ezt úgy fogalmazhatjuk, hogy attól függően, hogy ki milyen tudással rendelkezik, máshogy áll(hat) neki ennek a feladatnak. A kerületi szögeken alapuló megoldás nem használta a hasonlóságot, a vetítésen alapuló gondolatmenet nem használta a kerületi szögeket. Azt az alaptudást mindegyik megoldás használja, hogy a belső szögfelező egyenese és az oldalfelező merőleges a köríven metszik egymást, de a különböző eszköztárak, amelyeket az egyes esetekben emellett felhasználtunk, lényegében függetlenek.

Vegyük észre, hogy az ismertetett megoldások során nem használtunk fel konkrét hosszakat vagy szögek nagyságát, nem használtunk mértéket. Nem használtuk a szinusztételt, sem a koszinusztételt, amelyek szintén fontos részei a geometriának. Az azonban mindegyik esetben egyértelmű, hogy több vagy legalábbis más lexikális tudást használtunk fel, mint ami a van Hiele-elmélet 4. szintjében megjelenik. Itt már nem elég a bizonyítás iránti igény, itt már kell tárgyi tudás, amit a feladat megoldásának leíráskor részleteztünk, de ezeket semmiképp nem neveznénk ötös szintnek.

Tehát akkor, hogyha a negyedik VH szintet szeretnénk valamilyen formában mérni, akkor ez már egy szerteágazó szint lenne, a kitöltők attól függően teljesítenek egy-egy párhuzamos szintet, hogy mi az a lexikális tananyag, aminek a tudását róluk feltételezhetük. Ha valóban feltételezhetjük, hogy ők a többféle gondolatmenethez szükséges különböző tudásanyagok közül csak az egyiket tudják, akkor lehet jobban a megértést tesztelni. Emellett annak is tudatában kell lennünk, hogy ugyanazon tudásanyagra építve többféle gondolkodási szint létezhet; akár kevés lexikai tudást felhasználva is feltehetőek kifejezetten nehéz kérdések.

Az a véleményünk, hogy a teljes negyedik szint összeállítása egy lehetetlen feladat, de a negyedik szint különböző elemeit ki lehet dolgozni, esetleg egy tesztet is készíteni a mérésükre.

II.4.4.2. Az ötödik szint újragondolása

Annak megvizsgálása érdekében, hogy egyáltalán milyen felépítések képzelhetőek el az 5. szint helyett, vagy az eddigi Van Hiele szintekkel párhuzamosan, először megpróbáltuk feltérképezni, és megtudni azt, hogy manapság mit értünk geometria alatt. 1957 illetve 1980 óta sokat változott a világ, és még ha ez a teszt meg is felel az akkori geometria szellemének, érdemes felülvizsgálni. Tehát fontos lenne először megtudni, hogy mit kell érteni a mai világban geometria alatt, majd pedig az alapján kéne tesztet készíteni. Megtettük az első lépéseket, megkérdeztük mi az a geometria. Három egyetemi geometria oktatót kérdeztünk meg arról, hogy ők mit értenek ma geometria alatt: Dr. Csikós Balázs habilitált egyetemi docenst, az ELTE TTK Geometria Tanszék vezetőjét, Dr. Naszódi Márton szintén habilitált egyetemi docenst és Dr. Muzsnay Zoltán egyetemi tanárt, a Debreceni Egyetem TTK Geometria Tanszék vezetőjét.

Csikós Balázs a lineáris algebra és a geometria összekapcsolását tekinti kiemelkedően fontosnak. Azt, hogy a determinánsra gondolhatunk úgy, mint egy lineáris leképezésre a tér fölött, vagy például a mátrixszal való szorzásra tekinthetünk úgy, mint egyfajta transzformációra. Lényegesnek tartja azt is, hogy lássuk, hogy az algebrai egyenleteket össze lehet kapcsolni geometriai alakzatokkal. Erre egy kézenfekvő példa a lineáris programozás, ahol van sok-sok egyenlőtlenségből álló rendszer, és a maximalizálás a feladat: ilyenkor nekiállhatunk számolgatni, de valószínűleg egyszerűbben megoldható a feladat, ha látjuk, hogy az egyenlőtlenségekre úgy is gondolhatunk, mint félsíkokra vagy félterekre, és azoknak a metszetét keressük. Meg kell érteni a feladathoz kapcsolódó geometriai képet.

Naszódi Márton hasonlóképpen gondolkozik a geometriai szemléletről, megértésről. Szerinte is az összefüggéseket kell látni: azt, hogy az alakzatokhoz kapcsolható algebrai egyenlet, és az, hogy valaki az algebrai egyenletet össze tudja kötni adott alakzat képével, az egy fontos képesség. Ne csak mint formális egyenletet lássa, hanem lássa, hogy geometriailag az milyen élőlény. Amikor például egy többváltozós függvénynek tanulja a diák az érintőjét, akkor lássa, hogy ott egy geometriai vektorfogalomról van szó, illetve egy érintősíkról.

Muzsnay Zoltán egy másik nézőpontot képvisel. Az előzőekkel ellentétben ő pont azokat a tulajdonságokat, mennyiségeket emelné ki, amelyek paraméterezéstől, koordináta-rendszertől függetlenek. Ahogy Einstein is megfogalmazta, a fizikai törvények igazából geometriai tulajdonságok, és egy törvény nem függhet viszonyítási rendszertől, koordináta-rendszertől. Azokra a geometriai tulajdonságokra, összefüggésekre, jellemzőkre helyezné a hangsúlyt, amik nem függenek attól, hogy milyen segédeszközt használunk.

II.4.4.3. Egy szerteágazó ötödik szint

A Van Hiele elmélet kiterjesztésének egy másik lehetséges iránya annak vizsgálata, hogy a geometriai fogalmak, jelenségek, tételek hogyan jelennek meg felsőfokú tudományokban, hogyan alkalmazhatók más kontextusban, hogyan általánosíthatók. Ha a geometriai megértés magasabb szintjeit szeretnénk definiálni, ahhoz el kell mélyülnünk a matematikában. Vannak olyan, felsőbb matematikai területek, amelyeknek geometriai gyökerei is vannak, például az algebrai geometria, diszkrét geometria, differenciálgeometria, funkcionálanalízis, és természetesen a topológia. Gondoljunk egy kicsit bele, milyen típusú, geometriából származó tudásanyag, ötletek és gondolatok jelennek meg ezeken a területeken. A dimenzió jelentése a geometriában jól definiált, azt pedig tudjuk, hogy minden geometria koordinátázható egy ferde test felett, amelyre a Desargue-tétel teljesül – és minden 3 vagy annál több dimenziós geometriára teljesül a tétel.

Emiatt, nem meglepő módon szinte az összes fenti témakörben megjelenik a koordinátázás és az egyenletek. Az algebrai geometria a lehető legegyszerűbb függvények, a többváltozós polinomok által meghatározott ponthalmazokat foglalja magában. A geometriában például az $y - 3x$ gyökeit egyenesnek, az $y - x^2$ gyökeit parabolának, vagy az $x^2 + y^2 - 1$ nullhalmazát körnek tekintjük. A ponthalmazok metszéspontját, például két egyenes vagy egy kör és egy egyenes metszéspontját geometriai és algebrai úton, párhuzamosan lehet kezelni. Például egy egyenesnek lehet 0,1 vagy 2 közös pontja egy körrel. Két sík metszheti egymást egy egyenesben, vagy lehet diszjunkt. Az algebrai geometria egyik alapvető megfigyelése, hogy két objektum metszéspontjának ún. dimenziója kiszámítható az objektumok dimenziójából. Ez a dimenzió pedig a meghatározó polinomok fokszámából számítható ki. Ebből adódik az egyenlet segítségével definiált ponthalmazok és azok közös zérushalmazainak magasabb szintű megértése. Ha az egybevágóság általánosítását keressük, akkor eljutunk az algebrai topológiához és a geometriai objektumokhoz rendelt csoportokhoz. Ezen csoportok segítségével definiálhatjuk a fenti ponthalmazok ekvivalenciáját.

A differenciálgeometriában a koordináták differenciálható függvényeket tartalmaznak, de mindannyian tudjuk, hogy a deriváltak függenek x-től és y-tól, a koordinátatengelyektől. A differenciálgeometriában vizsgálhatjuk a koordinátáktól független tulajdonságokat, úgynevezett invariánsokat. A Theorema Egregum például azt mondja, hogy a görbület koordinátarendszerfüggetlen. Vagy, feltehetjük ismét a kérdést, hogy mely objektumok egyenértékűek. A sík- vagy térgeometriában az egybevágóság és a hasonlóság ekvivalencia-relációk és pl bármely két szabályos háromszögek hasonló egymáshoz. A differenciálgeometriában egy egyenessel ekvivalensek például az $\mathbb{R}$, a valós számok által paraméterezett görbék. Egy kör ekvivalensei közé tartoznak a zárt, nem önmetsző görbék, amelyek megfelelő differenciálható függvényekkel a kör képei. Az ekvivalenciát a diffeomorfizmusok határozzák meg. Síkgeometriában tudjuk, hogy két háromszög egymással egybevágó, ha oldalaik hosszai páronként egyenlőek, és hasonló, ha szögeik egyenlőek. A differenciálgeometriában is vannak ekvivalencia fogalmak. Egy egyenes egyenértékű egy parabolával, egy spirállal vagy akár egy baseballban dobott görbe labdával a 3. dimenzióban. Ezen ekvivalenciák egyikét az objektumok szerkezeti invariánsainak egy halmaza alapján állapíthatjuk meg, nevezetesen egy diffeomorfizmus akkor és csak akkor létezik, ha az összes szerkezeti invariáns megfelelően meghatározott értelemben megegyezik. Tehát ha például a síkon azt állítjuk, hogy egy szög egy másik szög tengelyes tükörképe, akkor ugyanezeket az érveket a differenciálgeometriában diffeomorfizmussal fogalmazzuk meg, és a hosszak és szögek szerepét más invariánsok veszik át.

A topológia mindezen részterületek alapjai közé tartozik, mégsem mondhatjuk, hogy a topológia axiomatikus kezelése magasabb rendű geometriai tevékenység lenne. Azonban, geometriai kérdések megalkotása topológiai terekben magasabb geometriai ismeretnek tekintendő, és a topológiai kérdések megalkotása a geometriákban szintén magasabb geometriai tudás. Gondoljunk egyszerűen a kétdimenziós felületek jellemzésére a lyukakat és fogantyúkat tartalmazó térben.

Komolyan el kell gondolkodnunk azon, hogy érdemes-e taxonómiákat és teszteket létrehozni, amelyek a geometriai szemléletet vagy a geometriai tudást mérik a matematika ezen területein. A gondolkodás során ismét geometria professzorok véleményét kértük, hiszen ki más tudná jobban megítélni a kérdést, mint az, aki a legmagasabb szinten kutatja és oktatja a geometriát?

Az egyik interjúból idézünk alább. Interjúalanyunk kutatási területe a diszkrét geometria, és konvex halmazokkal foglalkozik. Elmagyaráztuk neki a van Hiele-szinteket, és megkérdeztük, hogyan terjesztené ki az egyetemi hallgatókra, akik az ő óráján vesznek részt, és a kutatókra/doktoranduszokra, akik az ő területével foglalkoznak.

Prof: Értem a szintjeidet, de nem tudom, hogyan lehet lineárisan kiterjeszteni. Nem vagyok teljesen biztos benne, hogy mit értesz ez alatt. Az biztos, hogy szükségem van arra, hogy a diákok megkülönböztessék a definíciókat a tételektől és megértsék a definíció jelentését.

K: Megfogalmazom másként a kérdést. Hogyan ellenőrizned, hogy egy diák tudása alkalmas-e az órádra, vagy arra, hogy a doktoranduszod legyen. Mit várnál el?

Prof: Most már értem a kérdést. Amiről meggyőződnék egy órán, hogy a diákok rutinszerűen tudnak-e vektorokkal bánni, ismerik-e a skaláris szorzat fogalmát, az ortogonalitást, és értik-e, hogy a lineáris egyenletrendszerek leírják a hipersíkokat stb. A kutatásomhoz nekem elég, ha a diák megérti, hogy a vektorok ortogonálisai hipersíkok, az egyenlőtlenségek féltereket és félterek metszéspontjait írják le, a konvexitás pedig skaláris szorzattal írható le. A skaláris szorzat nagyon fontos a magasabb geometriában, és például a funkcionálanalízis csupa skaláris szorzattal dolgozik. Ezek után be tudom mutatni a kutatási témáimat, és elmagyarázni minden részletet. Ellenőrizni, hogy egy (diszkrét) geometria kutató érti-e a területemet, nagyon kényes kérdés. Ha valaki csak egy kicsit más területen dolgozik, akkor semmit sem tudna az eredményeinkről és a technikáinkról. Tehát, ez nem egy ellenőrizendő dolog. Egyébként, ha megkérdezted volna a kollégámat, ő mindkét kérdésedre teljesen más választ adott volna. Középiskolában jó voltam matekból, de a matematikának az a területe, amit a legjobban utáltam, a geometria volt. Soha nem értettem meg, és soha nem is tudtam, hogy miért és hogyan kell az ábrára egy plusz vonalat húzni, hogy meglegyen a megoldás. Az egyetemen aztán láttam, hogy a geometria szép és világos. A fogalmak természetesek és logikusan kezelhetők.

Nagyon hasonló választ adott egy másik professzor is, akinek a kutatási területe a diszkrét geometria. „Általában a hallgatók, akik hozzám kerülnek, már tisztában vannak a lineáris algebra alapjaival, ismerik az ortogonalitást és a belső szorzatot, és komplex számtest fölött diagonalizálni tudják a mátrixokat. Nekem ez a tudás elég ahhoz, hogy felépítsem a kurzusomat. Ha egy doktorandusz jönne? Most például van egy külföldi doktoranduszom, akinek a tudása teljesen hiányos. Neki az alapoktól meg kell tanítani mindent, külön foglalkozom vele. A kérdés második felére válaszolva, ha egy kollégámat kérdeznék meg a kutatásomról, nem sokat tudna hozzászólni.”

A téma alapos körüljárása és a professzori interjúk alapján egyértelműen levonható az a konklúzió, hogy az ötödik Van Hiele szinthez nem érdemes egy sztenderd teszt, taxonómia készítésén gondolkozni. Az elmélet kiszélesítésekor több lehetőségünk is van, ahogyan láttuk, ráadásul ezek a módok lehetnek egymástól függetlenek. Úgy gondoljuk, hogy különböző irányokat lehet kijelölni attól függően, hogy milyen lexikális tudást feltételezünk. A geometria megértésének ilyen magas szintjei csak nagyon kevés embert érintenek, lényegében éppen azokat, akik alkalmasak volnának a felső szintek leírásának, mérési módjának kidolgozására. Éppen ezért feleslegesnek tartjuk az ötödik szint kidolgozására időt és energiát szánni.

II.4.4.4. Levelezés Usiskin professzorral

Korábbi kutatásainkból írt cikkünkre, melyben magyarországi középiskolások Van Hiele szintjeit mérjük fel és elemezzük, maga Usiskin professzor is reagált emailben, ami megerősített minket abban, hogy a kérdésfelvetésünk aktuális és releváns.

Dear Csaba, Janka, Csilla, and Anna:

I have gazed over your paper with obvious interest and would like to comment on what is in the paragraph below Table 9 on page 8.

"Although the results are from different schools, the performances of the schools are similar and based on these results we can estimate the Van Hiele levels of students attending to other schools in the country. Based on this estimation most of the Hungarian high-school students are on the level of a primary school student in geometry. This raises the question how students can be successful on the final exam. This question requires a deeper investigation, a part of it could be the analysis of the geometry problems and their sample solutions in the final test. Reading through the past fifteen years’ final exams it is reasonable to question the amount of geometrical proving skills needed to solve the tasks."

While Sharon Senk and I were developing the van Hiele test in the CDASSG project 40 years ago, Pierre van Hiele visited us. We showed him a draft of the test of van Hiele levels that we had devised. We were surprised that Pierre responded to many of the items we had created as "No level", by which he meant that the thinking needed to do the item was outside the realm of the theory of development that he and his wife had created. Often these items had to do with problems involving lengths and angle measures that required the application of theorems or formulas. Even though deduction from theorems was required to do the problems, they did not - in Pierre's vision - fit into the hierarchy of levels to which his name is attached.

It seems to me that your paper supports the idea that there is more to the understanding of geometry than just nesting geometry in the domain of careful mathematical language, mathematical systems, and proof. As your study shows, people (i.e., students in Hungary) can learn to solve even difficult problems without necessarily being able to distinguish a statement from its converse, or realize the importance of careful definitions, etc. The van Hiele theory at its best does not cover all of geometrical thinking.

So I think your collective intuition is correct! It is "reasonable to question..."

Sincerely,

Zalman Usiskin
Professor Emeritus of Education
The University of Chicago

II.5. Összefoglalás

Dolgozatunkban a magyarországi matematika-és matematikatanár szakos hallgatók geometriai megértési szintjét vizsgáltuk a Van Hiele modell segítségével. A Van Hiele-elmélet tekintélye széles körben elismert a nemzetközi szakirodalomban, hasonlóan a rá alapuló mérés, amely 1982-es megalkotása óta a mai napig gyakorta alkalmazott. Azonban a teszt magasabb, egyetemi szinten való alkalmazhatóságának vizsgálata nemzetközi színtéren is hiánypótló vállalkozás. Kutatásunk során az ELTE elsőéves matematika alapszakos valamint elsőéves matematika tanárszakos hallgatóival töltettük ki az Usiskin-féle tesztet.

A tesztet a kísérletben résztvevő minden diák két alkalommal töltötte ki, egyszer a tavaszi félév elején, egyszer pedig ugyanazon félév végén. A két kitöltés között mind az alap- mind a tanárszakos hallgatók elvégezték első egyetemi geometriakurzusukat, az alapszakosok Geometria 1., a tanárszakosok Bevezetés a geometriába címen. Korábban már megállapítottuk, hogy a NAT és a kerettanterv követelményei alapján egyértelműen behatárolható, hogy a diákok a középiskola évei folyamán mely szintek eléréséig kellene eljussanak, megvizsgáltuk és megállapítottuk azt is, hogy a tanulók valós teljesítményei azonban lényegesen ezen szintek alatt vannak. Ezek alapján a középiskolába belépő elvárt szint a 3., a kilépő pedig a 4., így az volt a feltételezésünk, hogy a felmérésünkben résztvevő matematika területén továbbtanuló hallgatók már mind legalább a 4. szinten vannak, a geometriakurzus elvégzése után pedig akár az 5. szintet is elérhetik.

A tesztek eredményei alapján azonban a hallgatók mindegyike a 3. vagy az 5. szintet érte el. Saját eredményeink is alátámasztották az Usiskin által és a szakirodalomban azóta is többször megfogalmazott kétséget arra vonatkozóan, hogy a teszt kérdései valóban jól mérik-e az 5. szintet. Erre további bizonyítékként szolgál az a tény, hogy a hallgatók között sok olyan volt, aki a 4. szintet nem érte el, viszont az 5. szint kérdéseire jól tudta a választ. Ez a szintek alapvető tulajdonságának, az egymásra épülésnek is ellentmond. A geometriakurzus elvégzése után pedig azt tapasztaltuk, hogy általánosan érdemi fejlődés a szintek alapján nem történt a tanulók geometriai megértésében. Ennek okaként a Van Hiele elmélet kommunikációs részével egybehangzóan azt feltételezzük, hogy az oktató által feltételezett hallgatói megértési szint magasabb, mint a diákok valós eredményei, hiszen az ismert elméletek alapján a tanítási folyamat akkor lehet sikeres, vagyis akkor járulhat hozzá eredményesen a tanuló gondolkodási és problémamegoldó készségének fejlesztéséhez, ha az oktató a hallgatók valós megértési szintjének megfelelően alakítja kommunikációját. A Van Hiele elmélet részét képezi az a meggondolás is, hogy a különböző szinten lévő egyének „különböző nyelvet beszélnek", tehát nem értik meg vagy nem fogadják el egy másik szinten lévő indoklásait. Ezáltal a feltételezett és a valós szintbeli különbségek kommunikációs akadályokhoz, majd a tanítási folyamat meghiúsításához vezethetnek.

Annak érdekében, hogy megállapíthassuk, valóban a NAT által elvárt 8. osztályos szinten van-e a matematika szakos hallgatók jelentős része, teszteltük a teszt eredményeit és a hallgatókkal interjúkat készítettünk. Megfigyelhettük, hogy minden olyan hallgató, aki nem teljesített mindkét alkalommal 5. szinten, valójában 3. szinten áll. Az interjúk eredményei alapján azt mondhatjuk, hogy a Van Hiele elmélet egyetemi szinten sem vezet ellentmondásra, az elmélet kommunikációs vetülete is igazolódni látszik az egyetemisták és egyetemi oktatók körében is. Azt is megállapítottuk, hogy a VHGT ötödik szintre vonatkozó kérdései valójában nem mérnek magasabb geometriatudást.

Bár kutatásunk alátámasztotta, hogy az elmélet egyetemi szinten sem vezet ellentmondásra, az továbbra sem bizonyított, hogy a teszt a teljes geometriát lefedné. Úgy gondoljuk, hogy felállíthatók másfajta megértési szintek is, amelyek nincsenek ellentmondásban a Van Hiele-elmélettel. Egy ilyen teszt készítésének első lépéseként megkezdtük feltérképezni, egyáltalán mit is értünk manapság geometrián. Első körben két geometria tanszékvezető és egy habilitált docens véleményét kértük ki arról, hogy mi igazán fontos geometria területén, a válaszaikban egyrészt az algebra és a geometria összekapcsolásának képességét, másrészt a viszonyítási rendszertől független geometriai tulajdonságok, összefüggések vizsgálatát emelték ki. A negyedik szint átfogó kidolgozását a teljes középiskolai tudásanyag felhasználásával nem látjuk lehetségesnek, mivel ekkor már túlzottan szerteágazó az ismeretek, eljárások és szemléletmód rendszere. Adott részterületek megértési szintjei viszont feltérképezhetők és akár teszt készítését is lehetségesnek látjuk a szintek mérésére.

Ezután megkérdeztünk professzorokat arról is, hogy mit gondolnak, mi lenne egy ötödik van Hiele szinten, ami már az elemi geometria fölött áll tudásszintben. Mindegyiküktől azt kérdeztük, hogy a szakterületükre hogyan terjesztenék ki ezt a szintezést. Azt a választ kaptuk, hogy ezen a szinten a tudás már nagyon specifikus, egy-egy kutató kutatási területére már a közvetlen kollégáinak sincs rálátása. Arra a következtetésre jutottunk, hogy egyetemi és annál magasabb szintű geometria tudás megértési szintjeinek kidolgozása és mérése felesleges befektetett energia lenne, mert csak nagyon szűk rétegre vonatkozna.

III.

MetamatemEtikai dilemmák a tehetséggondozásban

III.1. Etikai kérdések a tudományban

Napjainkban gyakori, a közbeszédben is jelen lévő dilemmák a művészetek és a tudomány terén is a mesterséges intelligencia használatával kapcsolatos kérdések – Mikor jogos használni? Milyen feltételekkel használhatjuk mesterséges intelligencia szellemi termékét és hogyan tudunk rá korrektül hivatkozni? Ki felel az önvezető autó által okozott balesetért? stb. Azonban a tudományhoz kapcsolódó etikai kérdések nem mai keletűek, kifejezetten a matematikával kapcsolatban is találunk ilyen jellegű kérdésfelvetéseket és állásfoglalásokat.

„A matematika egy hasznos eszköz. Ezzel az eszközhasználattal etikai kérdések is felmerülnek, amelyek azzal kapcsolatosak, hogy milyen a matematika hatása a világra. A matematika az emberi tudás legabsztraktabb része, és nem más, mint az abszolút tudás keresése. A matematika tételei önmagukban megkérdőjelezhetetlenek, ez is az oka annak, hogy a matematika az ember egyik leghasznosabb és legjobban kidolgozott eszköze.” (Chiodo és Clifton 2019)

A Chiodo és Clifton által megkérdőjelezhetetlennek mondott tételek azonban tisztán elméleti jellegűek és jól meghatározott feltételrendszerrel rendelkeznek. A való életben mégis sokszor alkalmazzák ezeket a tételeket, összefüggéseket, képleteket úgy, hogy a feltételek nem pontosan teljesülnek – általában szinte lehetetlen tökéletes modellt találni egy-egy problémahelyzetre. A következtetések ezzel együtt is általában igazak – de nem mindig. Amikor nem megfelelően használják fel a matematikai tételeket, kimaradnak feltételek, akkor komoly problémák merülhetnek fel. Jó példa erre a 2007-2008-as globális pénzügyi válság, amely a modern világgazdaságot meghatározó események egyike volt, hatásai az egész világon érezhetőek voltak. A globális pénzügyi válság okai nagyon összetettek, azonban a matematikai modellezés vitathatatlanul nagy szerepet játszott benne. Kiderül, hogy az adósságkötelezettségekre és a jelzálogokra írt matematikai modellekben olyan alapvető hiba volt, amelynek esetleges következményeire a modellkészítők nem gondoltak. Ezek a modellek a biztosítékkal fedezett adósságkötelezettségeket írták le. Itt a matematikusok kamatozó javakból, elsősorban jelzáloghitelekből egy óriás adatállományt készítettek, majd ezt újra "darabokra vágták". Így kamatozó termékek egy olyan halmaza alakult ki belőlük, amelyek kisebb kockázattal és ezáltal nagyobb értékkel rendelkeztek, mint az eredeti javak. A tőzsdén nagy forgalmat bonyolítottak ezekkel a termékekkel. A modell felépítése mögött álló matematika rendkívül nem triviális, sztochasztikus számításokat, differenciálegyenleteket stb.

igényelt. Alkalmazásukhoz azonban elegendőek voltak alapvető, de egyetemi szintű matematikai ismeretek. Az alkalmazók tehát nem voltak tisztában modellek mélységeivel és korlátaival, de tudták, hogyan kell használni. Az egyik apróság, amit a modell rosszul vett figyelembe, az volt, hogy mi történik, ha ugyanabban az utcában van két jelzáloghitellel terhelt ház. Ez a hiba 2007 és 2008 között 700 milliárd dollárnyi veszteséghez vezetett. A többi már történelem. (Chiodo és Clifton 2019).

A tudomány egyik legismertebb etikai kérdése a 20. századi fegyverkezéssel kapcsolatos, ezen belül a Robert Oppenheimer által irányított Manhattan-tervvel, amely az első atombomba létrehozására irányult. A terv résztvevője volt Szilárd Leó is, aki Albert Einstein, Wigner Jenő és Teller Ede bevonásával kereste meg Roosevelt elnököt 1939 augusztusán az ún. „Einstein-Szilárd levél"-ben. [6] Ebben tájékoztatják az elnököt arról, hogy friss kutatási eredményeik alapján az uránium láncreakciója energiaforrásként is használható, valamint, „Ez az új jelenség bombák készítéséhez is vezetne, és elképzelhető – bár sokkal kevésbé biztos – hogy új típusú, extrém erejű bombák is készíthetőek így. Egyetlen ilyen új típusú bomba, hajón szállítva és a kikötőben felrobban(t)va jó eséllyel teljesen elpusztítaná a kikötőt és vele együtt a környező terület egy részét. Azonban, az ilyen bombák valószínűleg túl nehezek volnának a légi úton való szállításhoz." A tudósok azért is tartották fontosnak az elnök tájékoztatását tudományos eredményeikről és az abban rejlő lehetőségekről és veszélyekről, és azért szorgalmazták a kutatásokat a fegyverként való felhasználásával kapcsolatban, mert tartottak annak esetleges következményeitől, ha a náci Németország lesz képes a világon elsőként atombomba készítésére. A folytatást ismerjük a történelemkönyvekből: a háború előrehaladtával a kutatási projekt intenzitása is nőtt, az atombombák elkészültek – és bevetésre is kerültek. Teller Ede így fogalmazza meg álláspontját az ezen a ponton felmerülő etikai dilemmákkal kapcsolatban: „A tudós feladata az, hogy a tudománnyal foglalkozzék. Használnia kell tudását, felelőssége abban rejlik, hogy el kell magyaráznia mindazt, amit létrehozott, a következményekkel egyetemben. Ezen a ponton ér véget a tudós felelőssége". (Teller, 1990)

Manapság számos kutatócsoport, titkos és nem titkos laboratórium próbál kvantumszámítógépet megépíteni. Amint ez sikerülne, az összes bank összes titkosítása egy pillanat alatt feltörhető lenne, az összes titkosított adat minden portálon olvasható lenne. Felmerül a kérdés, hogy ennek ismeretében etikus-e kvantumszámítógépet készíteni? Etikus-e használni? Etikus megoldás-e, ha megépítjük a kvantumszámítógépet, de az elkészültének pillanatában bejelentjük, hogy egy megadott idő múlva használni tervezzük, így esélyt adva a biztonsági rendszerek újragondolására? Tom Clancy 1999-ben írt Net Force: Night Moves c. könyvében vízionál egy ilyen esetet. A regényben a számítógépek jelentik az aktuális szupererőt, amin keresztül akár a világot is irányítani lehet. Ennek megfelelően a jog érvényesítésére a digitális világában az FBI külön számítógépes titkosügynökséget hoz létre Net Force néven. Egyszer csak megjelenik a képben egy hacker, aki kvantumszámítógép segítségével a világ összes számítógépéhez hozzá tud férni és ezt gátlástalanul használja fel akár nemzetek közötti konfliktus szítására is. De hogyan tudnának a szakértők és a Net Force nyomára bukkanni valakinek, aki minden biztonsági kód feltörésére képes és az internetes rendőrség szervereit is kiiktatva követhetetlenné válik?

III.2. Etikai kérdések a matematikatanításban

A tudomány művelésével és annak alkalmazásaival kapcsolatos kérdések után gondoljuk át, milyen etikai kérdések merülhetnek föl a matematika tanításával kapcsolatosan. Néhány példa, a teljesség igénye nélkül: Taníthatok-e olyan anyagot, amit nem tanultam, hogyan kell tanítani? Elvállalhatok-e magántanítványt úgy, hogy csak megoldom vele a házi feladatát – de nem biztos, hogy szakszerűen tanítom és fejlesztem? Tovább léphetek-e a következő tananyagra egy osztályban úgy, hogy tudom: van, aki nem érti még az előzőt sem? Mondhatom-e azt egy középiskolába belépő diákra, hogy „nem tud törteket összeadni, de én már nem tanítom meg, mert ezt már tudnia kéne”? Mondhatom-e azt egy egyetemre belépő diákra, hogy „azért az érettségi szint alá nem megyek, amikor magyarázok neki”? Inkább arra szánjak időt, hogy minél több mindent maguktól oldjanak meg a diákok, vagy inkább próbáljam megmutatni a lehető legmagasabb szintű példákat is? Tudok-e úgy differenciálni, hogy senki ne szenvedjen nagy hátrányt – a gyengébb képességűek ne maradjanak le, a kiemelkedőek is kapjanak kihívást, a „középsők” se érezzék elhanyagolva magukat? Mondhatunk-e szándékosan hibás definíciót egy matematikai fogalomra az órán?

A fenti kérdések mindegyike összetett problémákra mutat rá és ha csak egy mondatban válaszolhatunk rájuk, akkor a lekorrektebb talán az mondani: „Az attól függ.” Ennek illusztrálására az utolsó kérdést vizsgáljuk meg kicsit közelebbről. A matematika tananyag felépítése hazánkban olyan, hogy fokozatosan vezet be anyagrészeket, a spiralitás elve mentén: egy-egy témakör többször, de más szemszögből, más módszerekkel, egyre mélyebben kerül feldolgozásra (Fűzi 2015). Így, amikor először találkozunk egy fogalommal, akkor még nem teljes precizitással tárgyaljuk, utána lépésről lépésre pontosítjuk. Két példát mutatunk most a számelmélet témaköréből.

A számelmélet alaptétele (SZAT) már a hatodik osztályban előkerül bújtatott formában, amikor több lépésben egyszerűsítünk törteket és látjuk, hogy mindig ugyanaz a végeredmény, illetve amikor számok prímtényezős felbontásakor más-más sorrendben haladva is mindig ugyanazokat a tényezőket kapjuk meg. Ekkor azonban még nem mondjuk ki magát a tételt. Később, hetedik-nyolcadik osztályban újra előkerül a számelmélet témaköre és vele a SZAT, ekkor már többnyire kimondjuk, hogy a felbontási folyamat egyértelmű, de nagyon kevés olyan iskola van, ahol pontosan, a matematikai szabályoknak megfelelően hangzik el az állítás. Az előző NAT szerint 9. osztályban, az új tanterv szerint 11. osztályban kerül sor először a SZAT mint tétel kimondására. A matematika módszertana nem tekinti etikai kérdésnek, hogy 6. ill 8. osztályban kegyesen hallgatunk az eljárásainkat lehetővé tévő tételről. Ekkor még csak tapasztalatokat gyűjtünk és észrevételeket fogalmazunk meg - középiskolában már megérik a legtöbb gyerek arra, hogy a SZAT-ot ne definícióként használjuk, hanem tételként mondjuk ki.

Másik példánk a pímszámok definíciójának kérdése. Legtöbb esetben általános iskolában, középiskolában így tanuljuk: *„Azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan két osztójuk van, prímszámoknak nevezzük.”* A prímszámok valódi definíciója azonban nem ez. Prímszámnak azokat a számokat nevezzük, amelyekre igaz, hogy ha egy szorzatnak osztója, akkor a szorzat valamelyik tagjának osztója. A felbonthatatlan számok definíciója az, hogy nincsen az egységtől és önmagától különböző osztója – ennek egy, a természetes számok körére szűkítve értelmes változata a fenti „prím-definíció”. Ami miatt mégis használni tudjuk ezt a hibás változatot, az az, hogy az általános iskolában a természetes számok körében, a középiskolában az egész számok körében foglalkozunk csak számelmélettel és ezen halmazokon értelmezve egymással ekvivalens a felbonthatatlan- és a prímtulajdonság. Ez azonban nem minden számhalmaz esetén van így, például a páros számok halmazán vizsgálódva már különböznek egymástól a felbonthatatlan számok és a prímszámok. (Pl. a 2 felbonthatatlan, de nem prím.) (Utóbbi jelenség többnyire csak egyetemi számelmélet órákon kerül elő.)

Nem csapjuk-e be a diákokat akkor, amikor hiányos vagy hibás definíciókat adunk nekik, vagy puszta gondolatmeneteket mondunk bizonyítások helyett? Károsítjuk-e őket azzal, hogy ilyenkor tulajdonképpen hamis képet festünk a matematikáról és a matematikai gondolkodásról? Szerencsére ezt a kérdést a matematika módszertan oktatása felismerte, kezeli, és már lassan klasszikussá válik az a szólás, ami Vásárhelyi Éva tanárnőtől ered, hogy „engedményeket kell tennünk a matematikai szabatosság rovására a tanulók fejlettségi szintjétől függően az érthetőség javára” (Csányi, Fábián, Szabó 2016). Az ilyenfajta engedmények teszik lehetővé a tananyag spirális felépítését, ami növeli a tanítási folyamat hatékonyságának azáltal, hogy mindig a diák által aktuálisan befogadható legmélyebb szinten dolgozzuk fel az egyes témaköröket. (N. Kollár és Szabó 2004)

A közoktatás legkézenfekvőbb matematikai etikai kérdése azonban az, hogy mit tanítsunk, milyen tananyagrészek, tudáselemek, kompetenciák, matematikatörténeti vagy – filozófiai gondolatok kerüljenek átadásra a felnövekvő generációknak. A NAT törvényi szinten szabályozza, hogy minek kell benne lennie a tananyagban, így az első kérdés, hogy mi kerüljön NAT-ba, melyek azok a kompetenciák, amik elsajátítása ez által kiemelt fontosságot kap. Kérdés az is, hogy ez valóban tükrözi-e az elképzeléseinket a matematikai nevelésről. Az jelenik-e meg a NAT-ban, amit matematikai nevelésnek szeretnénk hívni vagy máshonnan nézve, ami a NAT-ban megjelenik, azt szeretnénk-e a matematikai nevelésnek hívni? További etikai kérdések merülhetnek fel azzal kapcsolatban, ahogyan a tananyag és a kimeneti követelmények kisebb-nagyobb mértékben átalakulnak, ahogy a NAT átfogó, törvényi szabályozást jelentő szintjéről a mindennapi gyakorlatig eljutunk. Az első lépcsőfok ebben az, ahogyan a NAT tartalmai bekerülnek a kerettantervbe. A kerettantervi szint még mindig országosan egységesen szabályozza a tanítási folyamatot, azonban már nagyobb részletességgel, a négyéves periódusok helyett két éves periódusokra bontva, az egyes képzési típusok esetén különböző módon. Például a középiskola 9-10. osztályában más-más kerettanterv vonatkozik a nyolc-, a hat- és a négyosztályos gimnáziumi osztályokra, a szakképzésre és az iskolarendszerű felnőttképzésre. Itt már jelentős hangsúlyeltolódások, különbségek jelenhetnek meg az egyes verziók között, azonban ahogy tovább közelítünk szintről szintre a hétköznapi gyakorlatig, minden egyes átmenettel változások és velük együtt etikai kérdések jelenhetnek meg. Az eddig említett dokumentumokat kevesen forgatják napi szinten a tanítási folyamat tervezésekor, mivel a 2-4 éves periódus nehezen átlátható. A tananyagnak a tanéven belüli időbeli elosztását, a témák sorrendjét és sok más, konkrétabb támpontot és részletet a tanmenet tartalmaz, amelyet már minden tanár magának ír vagy dolgoz át minta-tanmenetekből, kollégák jól bevált tanmeneteiből. A tanmenetek már közeli rokonságban vannak a ténylegesen megvalósuló tanítási-tanulási folyamattal, azonban folyamatos rugalmas kapcsolat szükséges köztük és a gyakorlat között. Ha a gyakorlat eltért a tanmenettől, akkor a terveken módosítani kell, hogy továbbra is iránymutatóként tudjanak szolgálni. Ezzel kapcsolatosan jellemző dilemma, amikor év végéhez közeledve el vagyunk maradva a tanmenethez képest. Mivel teszünk jobbat ilyenkor a diáknak? Ha megpróbálunk minden hátralévő témát érinteni (akár csak mese-szinten), hogy legalább halljon róla – de ezzel lehet, hogy csak összekavarjuk? Vagy ha továbbra is a szokott tempóban és módszerrel haladunk, hogy amit tanulunk, azt alaposan tudja – viszont így lesz, amiről egyáltalán nem fog hallani? Vagy ha köztes megoldást keresve az interaktivitáson próbálunk spórolni és „letanítjuk" az anyagot, nem törődve a diák szintjével és a számára optimális tempóval? A felmerülő kérdésekből is látható, hogy van még egy további lépcsőfok, a tanmenetek még nagyon sok elemét nem szabályozzák egy tényleges tanórának, így ez is egy újabb szintátmenetet és vele etikai dilemmákat jelent. Emellett a teljes folyamatot átfogó etikai kérdés az az a sokat vitatott felvetés, hogy a tanárok puszta jó szándékból a NAT-beli célok megvalósítása helyett az érettségin elért lehető legnagyobb pontszámot tekintik mérvadónak, arra trenírozzák a diákokat a középiskolai oktatás során (Kovács és Palotay 2012). Ez azonban azt is eredményezi, hogy az érettségin nem számonkért kompetenciák az oktatási folyamatban nem vagy sokkal kisebb hangsúllyal jelennek meg.

III.3. Etikai kérdések a tehetséggondozásban

A matematikatanításnak nagyon sokféle színtere, formája, szintje van, más-más jellemző kihívásokkal, módszertani, pszichológiai és etikai kérdésekkel. A felmerülő dilemmák egészen különbözőek lehetnek egy teljes létszámú, vegyes képességű osztályban, mint egy kiscsoportos felzárkóztató foglalkozáson vagy éppen egy egyéni versenyfelkészítésen.

Néhány kérdés, amely a tehetséggondozás területén felmerülhet: Lehet-e a tehetséggondozásban is engedni a precízségből a jobb érthetőség kedvéért? Szabad-e olyan feladatot kitűznünk a diákoknak, amelyre azután nem fogunk vagy nem tudunk precíz megoldást megbeszélni velük? Tisztázhatók-e a tehetséggondozás keretei között az iskolai tanórán megjelenő elhallgatások, csúsztatások? Hogyan lehet jól kommunikálni a kialakuló ellentmondásos helyzetekben, hogy sem tudás, sem tekintély ne sérüljön?

Kutatási kérdésünk a következő: Szemben a reguláris, tantermi órákon elfogadott, megengedhető esetleges pontatlansággal, adhatunk-e matematikailag hibás választ vagy megoldást egy kérdésre vagy egy feladatra a tehetséggondozásban?

A kutatási kérdés vizsgálatához három, a tehetséggondozásban gyakran előkerülő, tipikusnak mondható feladattípust veszünk górcső alá, amiket mérleges, tevés és állításos feladatoknak neveztünk el. A problémák és mintamegoldásuk ismertetése után elemezzük, milyen etikai kérdések merülnek fel ezekkel a feladatokkal kapcsolatban.

III.4. Feladatok a tehetséggondozásban

Ebben a fejezetben három feladattípust fogunk leírni, amelyeknek elemezzük a megoldását. Mindhárom feladattípus megjelenik a tehetséggondozásban. Olyan feladatokat mutatunk be, amik a matematikusokat is foglalkoztatják napjainkban is.

III.4.1. Mérleges feladatok

Tekintsük az alábbi feladatokat:

„9 érme közül egy hamis

9 érme közül egy hamis, s ez könnyebb, mint a többi (a többi egyenlő súlyú). Egy kétkarú mérlegen súlyok felhasználása nélkül két mérlegeléssel keressük ki közülük a hamis érmét.

Hogyan lehet ezt megtenni?” (Róka 2013: 74)

A könyvben szereplő hivatalos megoldás a következő:

„Tegyünk a serpenyőkbe 3-3 érmét, s a maradék 3 érmét az asztalon hagyjuk. A mérlegelés után tudjuk, hogy mely 3 érme között van a hamis. Ha a mérleg egyensúlyt mutat, akkor a kimaradt 3 érme között kell keresni a hamis érmét, ha pedig nincs egyensúly, akkor a könnyebbnek bizonyuló 3 érme között. A második mérésnél ebből a 3 érméből egyet-egyet tegyünk a serpenyőkbe, s most már kiderül, hogy melyik a hamis.” (Róka 2013: 187-8)

„8 érme közül melyik a hamis érme?”

„Előttünk van 8 egyforma pénzérme, amelyek közül az egyik hamis, ennek a súlya különbözik a többiétől – amelyek azonos súlyúak. Azt nem tudjuk, hogy a hamis érme könnyebb vagy nehezebb, mint a többi.

Egy kétkarú mérleggel mérősúlyok nélkül kell megtalálnunk a hamis érmét minél kevesebb méréssel.

Hány méréssel tudod megtalálni a hamis érmét?” (Róka 2013: 75)

A könyvben szereplő hivatalos megoldás a következő:

„Három méréssel megtaláljuk a hamis érmét. Az első mérés után tudjuk, hogy melyik 4 érme között van a hamis érme (ezek a „gyanús” érmék), a második mérés után 2 gyanús érme marad, a harmadik mérés után pedig egyetlen gyanús érme, azaz megtaláljuk a hamis érmét.

1. mérés: Tegyünk a serpenyőkbe 2-2 érmét. Ha nincs egyensúly, akkor tudjuk, hogy a mérlegen vannak a gyanús érmék, a többi 4 érme valódi.

2. mérés: A 4 gyanús érméből 2 érmét az egyik serpenyőbe teszünk, a másikba pedig 2 valódi érmét. Ekkor kiderül, hogy a hamis érme a mérlegen levő 2 gyanús érme között van-e (ha nincs egyensúly), vagy pedig a másik 2 gyanús érme között. A második mérésnél már azt is fogjuk tudni, hogy a hamis érme könnyebb vagy nehezebb a többinél.

3. mérés: A 2 gyanús érme egyikét és egy valódi érmét teszünk a mérlegre, ha elbillen a mérleg, akkor a feltett gyanús érme a hamis, különben a másik gyanús érme hamis." (Róka 2013: 188)

Mielőtt a témakör további elemzésébe kezdenénk, leszögezzük, hogy mindkét mintamegoldás hiányos. Egyik esetben sem látjuk be, hogy kevesebb méréssel nem lehetséges a hamis érme megtalálása. (Tulajdonképpen ki sem mondja a mintamegoldás, hogy így van, csak sejteti, a „miért"-ről pedig nem esik szó.)

A mérleges feladatokról azt gondolnánk, hogy hagyományos, akár több ezer éves feladatok, ez azonban meglepő módon nem így van. A probléma ebben a formájában 1945 környékéről származik és Grossman írta le először (Grossman 1945: 360-1). A feladattal legtöbbször két változatban találkozhatunk. Az egyik változatban tudjuk, hogy a hamis érme könnyebb vagy nehezebb, mint a valódi érmék. A másik változatban csak azt tudjuk, hogy eltérő súlyú, azt nem, hogy könnyebb vagy nehezebb-e a többihez képest. Az első változat teljes megoldása olvasható D. O. Skljarszkij, N. N. Csencov és I. M. Jaglom által írt Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből című könyv első kötetében (Skljarszkij, Csencov, Jaglom 1979). Mostantól a dolgozatban ezt a kötetet „Jaglom"-nak fogjuk nevezni.

A mérleges feladatok kevésbé ismert változata, amikor több hamis érme is van a valódi érmék közé keverve. Tekintsük most azt az esetet, amikor több hamis érme van. Azt nem tudjuk, hogy pontosan hány darab, de azt igen, hogy könnyebbek vagy nehezebbek-e, mint a valódi érmék. Ekkor a hamis érmék megtalálásához szükséges mérések számát illetően az információelméleti alsó határ $n \cdot \lceil log_3 2 \rceil$. Erről a határról már láttuk, hogy éles, amikor egy hamis érme van. Ismeretlen számú hamis érme esetén bebizonyították, hogy az információelméleti határ nem éles. Az eddig létező legnagyobb alsó becslés n érme esetén $log_3(2^n + 2^{n-5} + 2^{n-6} + 2^{n-7} + 2^{n-9} + 2^{n-10} + 2^{n-12} + 2^{n-13})$ (An-Ping és von Eitzen 2009). Már a becslést megadó képlet bonyolultságából is sejthető, hogy ennek a feladatnak az általános megoldása nem könnyű. Ekkor még mindig járható útnak tűnhet, hogy kis, rögzített számú érmék esetén fel lehet adni a feladatot a diákoknak, ők próbálkozhatnak, kísérletezhetnek és ezután már jobban meg tudják érteni az általunk elmondott indoklást arra, hogy a megadott alsó és felső határ megegyezik. Sajnos ez az út sem járható. A 11 és a 2 kis számok, így az előző feltételezés alapján a 11 érméből a 2 hamis megtalálása egy középiskolásoknak is feladható feladat kellene, hogy legyen, de nem az. Ebben a feladatban a szükséges mérések száma 5, amit 2015-ben állapították meg és a bizonyításban a háromelemű test feletti Golay-kódokat használták (Chudnov 2015).

III.4.2. Tevés feladatok

A tevés feladatoknak két fő típusa ismert. Mindkettőben vannak tevéink és vizünk. Mindkettőben szeretnénk átjutni a sivatagon. A tevék tudnak magukkal vinni meghatározott mennyiségű vizet, és tudnak egymásnak vizet átadni. A tevék folyamatosan vizet fogyasztanak. Az egyik feladattípusban lehet létesíteni vízraktárakat a sivatagban, a másik feladattípusban nem. Az a kérdés, hogy milyen messzire tudunk így eljuttatni egy tevét a sivatagban. Mindkét típusnak többféle megfogalmazása lehetséges.

A Logika-land (Róka, 2013) című könyvben szerepel a következő két feladat:

„Sivatagi vándorlás"

„Ali Ben Juszuf szülőfalujától távol dolgozik. Munkahelye és szüleinek lakhelye között egy 100 km széles sivatag terül el. Ali meg akarja látogatni a szüleit. Kérdezősködik, számolgat; kiderül, hogy a sivatagban naponta 20 km-t tud megtenni, és egyszerre csak háromnapi élelem- és víztartalékot tud magával vinni. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy csak egész napi út után lehet a magával vitt élelmiszerből és vízből tartalékot létesíteni.

Hány nap alatt jut át a sivatagon?" (Róka 2013: 54)

A feladatnak a kötetben szereplő mintamegoldás a következő (Róka 2013: 159):

„A 100 km-es útszakaszon a kiindulóponttól 20, 40, 60 és 80 km-re képzeljünk egy-egy kilométerkövet. Forgassuk visszafelé a vándorlás filmjét. Tegyük fel, hogy a vándor elérkezett az út végére; akkor 3 nappal ezelőtt a 40-es kilométerkőnél kellett lennie 3 napi élelmiszerrel és vízzel. A 40-es kilométerkőnél ezt a készletet el kell helyezni. (Innen 3 napi út a cél.) Hogyan tud a 40-es kilométerkőhöz 3 napi élelmiszert eljuttatni? Egyszeri nekifutásra lehetetlen. A 20-as kilométerkőnél kellett az első raktárt létesítenie. Most kiszámítjuk, hány napi élelmet kellett felhalmoznia a 20-as kőnél ahhoz, hogy a 40-es kőnél háromnapit tudjon összegyűjteni. Ha a 20-as kőnél felvesz hármat, 1 nap alatt eljut a 40-eshez, ezalatt elfogyaszt egynapi élelmet.

Egyet letesz, egy nap alatt visszatér a 20-ashoz, ezalatt elfogyasztja a harmadikat. Megint felvesz hármat, egy nap alatt eljut a 40-eshez 2 csomaggal: megvan a szükséges 3 csomag. (Ehhez összesen 3 nap kellett.) Ezek szerint a 20-as kőnél 6 csomagnak kellett lennie. Egyszeri fordulással itt is 2 napot tölt el, 4 csomag odajuttatása 8 napig tart. Az utolsó fordulónál 2 csomagot már 1 nap alatt juttat el. Összesen tehát $3 + 3 + 8 + 1 = 15$ nap szükséges az út megtételéhez."

A feladat egy másik változatában nem lehetséges rakátrakat létesíteni, viszont nem egyedül kell megküzdenie a sivatagi átkelés kivívásaival a főhősnek, hanem két segítőtársa is akad. Ez azonban újabb feltételt is hoz magával, a segítőknek vissza kell tudnia jutni a kiindulási pontra:

„Átkelés a szavannán"

„Egy kutató két teherhordó segítségével át akar jutni a szavannán. Mind a kutató, mind a teherhordók legfeljebb nyolc napra elegendő élelmet és vizet tudnak magukkal vinni. A kutatónak biztosítania kell, hogy a teherhordók visszatérhessenek oda, ahonnan elindultak. A szavannában élelmiszert nem tárolhatnak, nem hozhatnak létre lerakatokat. Az átkeléshez és a teherhordók visszatéréséhez csak ez a $3 \cdot 8 = 24$ napi élelmiszerkészlet használható.

A kutató ilyen segítséggel hány napos túrát tehet meg?" (Róka 2013: 55)

Erre a feladatra az alábbi mintamegoldást adja a kötet:

„Hárman elindulnak, és a teherhordók mindig úgy fordulnak vissza, hogy visszatérésükkor már nincs náluk élelmiszertartalék. 2 napi túra után az egyik teherhordó feltölti két társa készleteit, majd visszafordul. Így az ő 8 napi készletéből 4 napi adagot saját maga fogyaszt el, és 4 napi adagot a társainak ad át. A kutató és a másik teherhordó tovább indul, mennek 2 napig, és ekkor a teherhordó átad a kutatónak 2 napi adagot, és visszafordul a nála maradó 4 napi készlettel. A kutató 8 napi készlettel indul tovább. Összesen 12 napos utat tehet meg a kutató."

Mindkét megoldásnak hiányossága az, hogy nem mutatja meg, hogy nincs olyan konstrukció, amellyel messzebb lehet menni. Egy igazán teljes megoldáshoz még az is hozzátartozna, hogy van-e más konstrukció, ahogyan ide el lehet jutni. Az első feladat „jeep problem" néven ismert a nemzetközi szakirodalomban, Juszuf helyett egy dzsipről szól, ami élelem helyett benzint tud szállítani és lerakni a sivatagban. Ennek is több változata van, például a „teve és banánok", az „utazók a sivatagban" és az „autó a sivatagon át" problémacsaládok. A második feladat az „utazók a sivatagban” problémacsaládhoz tartozik, ahol az a kérdés, hogy milyen messze tudunk eljuttatni egy embert a sivatagban, hogyha csak adott mennyiségű élelmet vihet magával, de vannak segítői, akik átadhatnak neki bármikor élelmet, ám nekik vissza kell térniük a bázisra. A feladatok tevés és terepjárós megfogalmazása lényeges matematikai különbséget is okozhat, ugyanis eltérés lehet a raktárak létrehozásának és felhasználásának módjában, feltételeiben, amely más matematikai struktúrákat tesz lehetővé a probléma megoldása során. Mindegyik problématípusban vannak viszonylag jól feltérképezett részkérdések, azonban egyes változatokra a mai napig nincs teljes megoldás. A helyzetet jól illusztrálja, hogy Gale (1998) a Tracking the automatic ANT c. könyvében több esetet is megold, de bevallottan hiányérzete marad és egy teljes oldalt szán arra, hogy elemezze, melyek azok a változatok, amiket nem tudott megoldani .

A sivatagon való átkelésről szóló feladatok 1947-ben kerültek a köztudatba (Fine 1947). Fine cikke ezzel a problémafelvetéssel indul: „Tegyük fel, hogy egy dzsip maximum n gallon üzemanyagot tud magával vinni és c mérföldet tud megtenni gallononként. A dzsipnek egy x széles sivatagon kell átkelnie. A feladat az, hogy találjunk egy módszert az utazás leggazdaságosabb kivitelezésére és meghatározzuk a szükséges üzemanyag minimális mennyiségét. Nem nyilvánvaló, hogy létezik optimális módszer, és precízebb volna legnagyobb alsó becslésről beszélni a minimum létezésének igazolásáig.” A cikkben az x távolság megtételéhez szükséges üzemanyag mennyiségére a $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \exp(2x - C) + O(e^{-2\pi})$ közelítést adja, ahol C az Euler-konstans, $C \approx 0.5772156649$.

Egy alapos elemzést találhatunk az egy dzsippel kapcsolatos problémákról a Gale's Round-Trip Jeep Problem című cikkben (Hausrath, Jackson, Mitchem, Schmiechel 1995). A cikk azokkal az esetekkel is foglalkozik, amikor a terepjárónak vissza kell térni a kiindulási pontra, és amikor a cél felől is kaphat segítséget, azaz a sivatag túloldalán is van üzemanyag. A cikkben két fontos tétel szerepel bizonyítással együtt, a következők. Tegyük fel, hogy van n napra elegendő üzemanyagunk. Ekkor a maximum távolság, ahová egy terepjáróval el tudunk jutni, az $D_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ (Hausrath, Jackson, Mitchem, Schmiechel 1995: 300). Legyenek m és k egész számok, ahol $m > k$. Ekkor a legnagyobb távolság, ahová egy terepjáró el tud raktározni k tanknyi benzint, az $D_2 = \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m-2} + \cdots + \frac{1}{2k+4}$ (Hausrath, Jackson, Mitchem, Schmiechel 1995: 301). Alway több terepjáró együttes továbbjutását is vizsgálta. (Alway 1957).

Azt a kérdést, amely a feladatgyűjteményből idézett első feladatnak felel meg, hogy n tank benzinnel és egy olyan autóval, ami a saját tankján kívül még pontosan egy tanknyi üzemanyagot tud szállítani, amit azonban csak egyben lehet felhasználni, Rote és Zhang 1996-ban oldották meg, bizonyítva azt is, hogy a megoldásuk optimális – azonban ehhez már többek között lineáris programozásra is szükségük volt. (Rote és Zhang 1996) Így most már hatványozottan merül föl a kérdés, hogy ezek a feladatok feladhatóak-e egy középiskolásoknak szánt feladatgyűjteményben.

A feladatgyűjtemény második feladatához hasonló problémákról, melyekben egy embernek/tevének/dzsipnek kell átjutnia a sivatagon, de több segítője is lehet, akiknek viszont a kiindulási pontra kell visszajutnia, 2009-ben jelent meg Herb Baileynek egy cikke, amelyben két stratégiát vet össze. Az egyik az, amelyben egyszerre indulnak az utazók és átadhatnak egymásnak élelmet. Elemi matematikai eszközökkel megmutatható, hogy így nem juthat el senki 2 egység távolságig (ahol az 1 egység az egy dzsippel egy teli tank üzemanyag segítségével megtehető maximális távolság). Cikkében mutat egy olyan módszert is, amelyben nem egyszerre indulnak az autók, és a táborban maradottak elébe mehetnek a visszatérőknek, hogy a visszaúton lássák el őket. A második stratégiája már 4 ember esetén jobb, mint az első; és az ő módszerével $\frac{7}{3}$ távolságig lehet eljutni. Mi most mutatunk egy módszert, ahol $2^n - 1$ autóval el lehet jutni $\frac{n}{3}$ távolságra, azaz, meglepő módon, végtelen messze.

A módszer a következő: Az egyszerűség kedvéért úgy vesszük, hogy a dzsip egy teli tankkal 3 napi járóföldet tud megtenni és innentől „x távolság” alatt azt értjük, hogy „x napi járóföld távolság”, igy a gondolatmenet könnyebben átültethető a tevés változatra is. Azt állítjuk, hogy *n* napi távolságra el tudunk juttatni *d* dzsipet tele tankkal, ahol *n* és *d* tetszőleges pozitív egészek. Állításunkat indukcióval bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy el tudunk juttatni 2*d* dzsipet tele tankkal *n-1* távolságig. Ekkor az *n-1* távolságig eljuttatunk először *2d* embert tele tankkal (azaz 3 napi üzemanyaggal), onnan elindítjuk mindegyiket egy napi távolságra. *d* dzsip ott marad (ők fognak tovább menni). A másik *d* dzsip átad nekik 1-1 napnyi üzemanyagot és visszamegy az *n-1* távolságra – eddigre ürül ki épp a tankja. (Vagy gondolhatunk erre úgy is, hogy *d/2* dzsip átad nekik 1-1 napi üzemanyagot, majd a maradék *d/2* dzsip „visszahozza” az így kiürült tankú autókat: a „maradék” *d/2* autó mindegyikénél 2 napi készlet van, ennek felét átadják egy-egy kiürült autónak és így mind a *d* autó, aki nem megy tovább, vissza tud jutni n-1 távolságba, üres tankkal.). Ez azt jelenti, hogy leétre tudtunk hozni olyan szituációt, hogy van *n* távolságra annyi emberünk, amennyit oda szerettünk volna eljuttatni és van ugyanannyi emberünk *n-1* távolságra 0 tankkal. Az indukció szerint ide el tudtunk juttatni másik *d* dzsipet tele tankkal – akik vissza tudják őket hozni *n-2* napi távolságra és akkor az indukciós feltétel tovább működik. □

Nézzünk egy konkrét példát, ha úgy tetszik, egy modellt. Ha valakit el akarunk juttatni a kezdőponttól 5 távolságra tele tankkal, akkor ehhez a 4 messzire kellett juttatni 2 embert tele tankkal, akik mennek 1 napot (ezzel eljutva az 5 távolságig), az egyikük átadja a másiknak 1 napi üzemanyagját, majd visszatér a 4 távolságra. Akkor van 1 emberünk 5 messze tele tankkal és 1 emberünk messze üres tankkal. Ahhoz, hogy ő haza tudjon jutni, kell lennie még 1 embernek 3 távolságon tele tankkal, aki tovább megy a 4 távolságra és visszahozza őt (átad neki egy napi üzemanyagot és így mindketten vissza tudnak menni a 3 távolságra. Így van két üres dzsipünk 3 messze, akiknek a visszahozásához szükségünk van 2 teli dzsipre a 2 távolságon, akik vissza tudják őket juttatni a 2-es távolságra. Így 4 üres dzsipünk lesz 2 messze … Az eljárás az eddigiekhez hasonlóan folytatódik. Ez azt jelenti, hogy 31 dzsip segítségével el tudjuk juttatni az egy kiválasztott autót 5 távolságra.

Megmutattuk, hogy módszerünkkel végtelen nagy távolságra el tudunk juttatni egy dzsipet, ha kellő számú segítő autó áll rendelkezésre. Azonban ez sem teljes körű megoldás, hiszen azt nem vizsgáltuk, hogy nincs-e a miénknél hatékonyabb módszer, amelyhez azonos távolság esetén kevesebb autó szükséges, mint az általunk leírt eljáráshoz.

A mérleges feladatokhoz hasonlóan a tevés is egy olyan feladattípus, amelynek vannak kézenfekvő általánosításai. Ezek megoldása gyakran túlmutat középiskolai vagy akár az egyetemi tananyagon. Az első feladat kézenfekvő általánosítását, hogy adott távolságra mennyi víz szükséges, 1995-ben oldották meg teljeskörűen (Hausrath, Jackson, Mitchem, Schmiechel 1995: 300), és azt állapították meg, hogy azt kell megnézni, a $D_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ összeg mikor lépi túl a megadott távolságot, ennyi liter víz szükséges. A második feladat általánosítása, hogy ha n emberünk van, meddig lehet eljutni, még megoldatlan.

III.4.3. Állításos feladatok

Ebből a feladattípusból két feladatot szeretnénk megmutatni Róka Sándor feladatgyűjteményéből, a 100+100 állítással kapcsolatost és a 8 állítással kapcsolatost.

„Egy papírlap egyik oldalán a következő szöveg olvasható:

1. Ezen a papíron legalább egy állítás igaz.
2. Ezen a papíron legalább két állítás igaz.

3. Ezen a papíron legalább három állítás igaz.

…

99. Ezen a papíron legalább kilencvenkilenc állítás igaz.

100. Ezen a papíron legalább száz állítás igaz.

Ha megfordítjuk a lapot, a másik oldalán ezt olvassuk:

1. Ezen a papíron legalább egy állítás hamis.

2. Ezen a papíron legalább két állítás hamis.

3. Ezen a papíron legalább három állítás hamis.

…

99. Ezen a papíron legalább kilencvenkilenc állítás hamis.

100. Ezen a papíron legalább száz állítás hamis.

A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le mind a 200 állítást. Hány igaz állítás van a lapon?” (Róka 2013: 88-9)

Ez a feladat első ránézésre nem tűnik problémásnak, oda-vissza gondolkodással könnyű megoldani. Az első oldalon mind a száz állítás igaz. A második oldalon az első állítás is igaz, mert ha hamis lenne, akkor önmagának mondana ellent. Emiatt viszont legalább egy igaz állítás van a papír ezen oldalán is, azaz legfeljebb 99 hamis állítás lehet, a századik állítás ezen az oldalon biztosan hamis. Hasonlóan tovább folytatva a gondolkodást megállapíthatjuk, hogy a lap második oldalán az ötvenedik és minden előtte lévő állítás igaz, az ötvenegyedik és minden utána következő pedig hamis. Így összesen 150 igaz állítás van a lapon.

„Egy papíron az alábbi állítások olvashatók:

1. Ezen a papíron legalább egy állítás hamis.

2. Ezen a papíron legalább két állítás hamis.

3. Ezen a papíron legalább három állítás hamis.

4. Ezen a papíron legalább négy állítás hamis.

5. Ezen a papíron legalább öt állítás hamis.

6. Ezen a papíron legalább hat állítás hamis.

7. Ezen a papíron legalább hét állítás hamis.

8. …

Sajnos a 8. állítás olvashatatlan.

A 8. állítás igaz vagy hamis?” (Róka 2013: 88)

A mintamegoldás az előző feladathoz hasonló gondolatmenet során eljut addig, hogy három állításról tudja, hogy hamis, négy állításról tudja, hogy igaz. Azt is megmutatja, hogy lennie kell négy hamis állításnak. Ebből arra következtet, hogy az ismeretlen nyolcadik állítás hamis (Róka 2013: 200-1). De mi történik akkor, ha például a nyolcadik állítás az, hogy „Peti levest főz.”? Ennek az állításnak az igazságtartalmát nem határozhatja meg az előtte leírt hét állítás, hanem Peti döntésén múlik. Vagy a hét állítás kényszerítheti Petit a levesfőzésre vagy épp arra, hogy ne tegye? Most már kezdjük érezni, hogy valami nincs rendben ezzel a feladattal.

Az ellentmondást nem lehet azzal feloldani, hogy ennek a feladatnak nincs megoldása, hiszen ha az előzőnek és több más hasonló feladatnak van, akkor ennek miért ne lenne? A feloldást többféleképpen el lehet képzelni. Az egyik lehetőség a nyelvek hierarchiáján alapul, amelyet Chomsky dolgozott ki (Jager és Rogers 2012). Az elmélet szerint mindig csak a hierarchia alapján felsőbb nyelv beszélhet egy adott nyelv igazságairól. Egy másik lehetséges feloldás az, ami Raymond Smullyan könyveiben is szerepel (Smullyan, 2016), hogy nem minden mondat állítás. A matematika nyelve különbözik a mindennapi nyelvünktől. Az állítás fogalma a matematikában pontosan definiált, és attól, hogy valamit leírunk vagy mondunk, az nem lesz állítás. Mi ezzel oldanánk fel a látszólagos ellentmondást. Ekkor viszont sokkal bonyolultabb lenne a feladat, mint első olvasásra tűnt, mert minden mondatról el kellene dönteni, hogy állítás vagy nem állítás és ha állítás, akkor igaz vagy hamis.

III.5. Diákok lehetséges dilemmái a feladatokkal kapcsolatban

Pólya György munkásságával kezdődően kapott figyelmet a matematikai problémamegoldás módszertana (Pólya 1971), mely azóta a matematikadidaktikai kutatások önálló és jelentős ágává vált (Schoenfeld 1985). A problémamegoldással kapcsolatos szerteágazó kutatások kis részének ismertetése is szétfeszítené jelen dolgozat kereteit, ezért egyetlen, a vizsgált témánk szempontjából fontos megállapítást emelünk ki, amely már Pólyánál is megjelenik és azóta is időtállónak bizonyult. Ez a gondolat a következő: a problémamegoldás, mint gondolkodási tevékenység, többek között magában foglalja a probléma újrafogalmazását, elemzését, kiterjesztését, általánosítását (Ceglédi 2011).

Akár már a problémamegoldás korábbi lépései során is merülhetnek fel dilemmák a diákokban, de legkésőbb a kiterjesztésen, általánosításon való gondolkodás során ez szinte biztosan megtörténik a fenti három feladattípus esetén. Vegyük először például az állításos feladattípust. A feladatgyűjteményben szereplő feladat-variációkban is az egyik változó tényező az, hogy hány állításról beszélünk. Így adja magát az ötlet, hogy további állításszámokra is kiterjessze a diák feladatot – azonban ekkor szembesül vele, hogy páratlan számú állításra nem talál megoldást. Ekkor akár azt is gondolhatja, hogy ő értette félre a feladatot, vagy valami más hibát követett-e el vagy most, vagy az eredeti probléma megoldásakor. A tehetetlenség, hogy egy már megoldotthoz nagyon hasonló feladattal nem tud megbirkózni, frusztrációt válthat ki belőle, akár matematikai szorongás kialakulását is elősegítheti. A nyolc állításról szóló feladat esetében valószínűleg már hamarabb felmerülnek dilemmák. Kézenfekvő gondolat ugyanis megvizsgálni, hogy egy-egy konkrét állítás beírásakor mi történik, megoldható-e ekkor a feladat. Azonban ez zavart okozhat, mert a különböző esetekben különböző következtetést lehet levonni – ami alapján kétséges, hogy vajon mi lehet az eredeti feladat megoldása. Például, ha azt írjuk nyolcadik állításnak, hogy minden rombusz téglalap, akkor mind a nyolc állításról egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy igaz-e vagy hamis. Ha viszont azt írjuk, hogy minden négyzet téglalap, akkor ellentmondásra jutunk, mert az előző hét állítás alapján az utolsónak hamisnak kellene lennie. De mi a helyzet, ha azt írjuk, hogy „Egy egyeneshez egy külső ponton át egyetlen párhuzamos húzható.”? Ekkor egy papírra felírt hét mondat meghatározza, hogy a párhuzamossági axióma nem teljesülhet?

A mérleges feladattípussal kapcsolatban az első észrevételünk az volt, hogy nem teljes a mintamegoldás. Mindkét esetben kapunk egy konstrukciót, hogy hogyan tudjuk viszonylag kevés mérésből megtalálni a hamis érmét, a második feladat esetében három mérésből. Azt még könnyen meg tudjuk indokolni magunknak, hogy miért nem több mérést használó megoldást mutat a könyv – a kérdésben benne van, hogy minél kevesebb mérés a cél. De azt honnan tudjuk, hogy a könyv által mutatott a lehető legkevesebb? Erre nem tér ki a mintamegoldás, pedig a pontos válasznak két része lenne: az egyik, hogy belátjuk, háromnál kevesebb mérés biztosan nem elég, a másik, hogy mutatunk egy konstrukciót arra, hogy három méréssel hogyan lehetséges megtalálni a hamis érmét. A mintamegoldás azt a benyomást kelti a diákokban, mintha teljes választ adna, nem is említi, hogy a három mérés szükségességét indokolni kellene. A diákok elolvasva ezt a megoldást (miután valószínűleg több mérésből tudták csak megoldani a feladatot) azt látják, hogy ez egy jól átgondolt konstrukció, ráadásul azt gondolhatják, hogy mivel megjelent egy könyvben, biztosan helyes és megkérdőjelezhetetlen. Így nem marad bennük hiányérzetés elkönyvelik, hogy ez egy bizonyítás. Ezáltal a mintamegoldások, melyek nem adnak bizonyítást az eredeti probléma megoldására, de mégis valamit bizonyítanak - ezzel hitelesnek, jónak feltüntetve a megoldást – torzítják a diákok bizonyításról alkotott képét.

Hasonló dilemmák felmerülhetnek a tevés feladatokkal kapcsolatban is, hiszen ezek esetében sem ejt szót a mintamegoldás arról, hogy biztosan az optimális megoldást találta-e meg, miért nem lehet más módszerrel messzebb jutni vagy éppen kevesebb nap alatt megtenni az adott távolságot. Az feladatvariánsok egy része is kézenfekvő általánosítás, amelyet az eredeti feladat közeli rokonának gondolna egy diák, azonban esetenként akár teljesen más mögöttes konstrukciót rejt.

III.6. Etikai dilemmák a tehetséggondozásban

A három ismertetett feladattípus többféle etikai dilemmát vet fel, melyek lehetnek matematikai, tanári, szerzői és feladatkitűzői dilemmák.

Matematikai jellegű dilemmák például a következők: Mit jelent, miről szól pontosan a feladat? Egyértelműek-e a feltételek? Van-e olyan információ, amit csak sugall a feladat szövege és ezért automatikusan feltételezzük, de valójában nincs ott? Tisztán matematikai formában adott feladatról van szó vagy valóságközeli problémáról, esetleg beöltöztetett feladatról? Torzítja, torzíthatja-e a beöltöztetés az eredeti matematikai gondolatot? Lehet-e, hogy a feladat kitűzőjének valójában más matematikai probléma megfogalmazása volt a szándéka, de a beöltöztetéssel módosult a tartalom, anélkül, hogy ő észrevette volna? Egyértelműek-e a feltételek a feladatban? Pontosan használja-e a feladat a matematikai fogalmakat? Megoldható-e a feladat? Milyen matematikai eszköztárral oldható meg a feladat?

Egy tanárban többek között ezek a dilemmák merülhetnek fel: Meg tudom-e oldani a feladatot? Meg tudom oldani középiskolás/általános iskolás/a diákjaim számára elérhető módszerrel? A mintamegoldással kapcsolatban: Értem-e teljes mélységében? El tudom-e dönteni, hogy helyes-e, teljes-e? Hiszen az semmiképp nem jó, ha egy hiányos megoldással esetleg a diákokban megválaszolatlan kérdés és ezáltal feloldatlan feszültség marad.

A tevés és a mérleges feladatoknál a számszerű végeredmény ismeretében is szép feladat és kihívást jelent egy jó konstrukció megtalálása. Ez motiválja a következő tanári kérdésünket: Feladhatok-e egy feladatot annak érdekében, hogy megmutathassak egy szép konstrukciót – úgy, hogy közben a feladat teljes megoldását nem mutatom meg? Ez a dilemma áthidalható azzal, ha olyan megfogalmazásban adom fel a feladatot, hogy megadott számú mérésből találják meg a hamis érméket. Így etikus a feladat kitűzése, azonban sokkal kevésbé elegáns és egyúttal nyitva hagyva azt a kérdést, hogy vajon elég-e kevesebb mérés. Valószínűleg lesz olyan, aki elégedetten hátradől, amikor talál egy viszonylag kevés mérésből álló konstrukciót és nem gondolkozik azon, hogy lehet-e tovább csökkenteni a mérésszámot. Viszont számítanunk kell arra is, hogy akad majd olyan diák, akiben felmerül ez az igény és megpróbálja a lehető legkevesebb méréssel megoldani a feladatot. Mi tanárként tudjuk, hogy a konstrukció megtalálása is komoly matematikai hátteret igényel sokszor, de még amikor a konstrukciót meg tudják találni, akkor is messze túlmutathat a számukra elérhető nehézségen és tudásanyagon annak belátása, hogy az adott mérésszámnál minimális. Tanárként ilyenkor érdemes tisztáznunk a diákokkal, hogy létezik olyan mérésszám, aminél kevesebbel biztosan nem oldható meg a feladat és elmondani, hogy ennek belátása sokszor komolyabb matematikai eszköztárat igényelne, mint amivel ők rendelkeznek. Itt felmerül egy újabb kérdés: Megmutassuk-e nekik a megoldást akkor is, ha előre tudjuk, hogy nem fogják teljesen érteni? Lehet értelme, hiszen ezáltal hitelesebben alátámasztjuk, hogy valóban meg lehet oldani a feladatot – más esetben pedig felesleges is lehet, ha nagyon kis részét értenék csak és inkább összezavarná őket. Azt is megtehetjük, hogy elmeséljük, az ilyen típusú problémák közül vannak, amiket már megoldottak a matematikusok, de olyanok is vannak, amiket még nem. Megemlíthetjük azt is, hogy kik oldották meg azt a feladatot, amivel éppen foglalkozunk.

A feladatkitűzőben mindamellett, hogy osztja a tanár dilemmáit, számos más dilemma is felmerül. Hogyan, kinek, mikor lehet feladni ezeket a feladatokat. Milyen korosztálynak adhatjuk fel a feladatot? Melyik korosztálynak mennyi segédkérdést, segédfeladatot adjunk fel és ezek mik legyenek? Látja-e a diák a feladat minden oldalát? Nem okozunk-e frusztrációt azzal, ha nem tudja megoldani a feladatot vagy nem érti a mintamegoldást? Feladatkitűzői szempontból fontos kérdés, hogy a diákok mennyire jártasak a bizonyításban, felmerül-e bennük maguktól a bizonyítás igénye. Előfordulhat, bár tehetséggondozásban csak ritkábban, hogy ha a feladat megfogalmazása nem sugallja, akkor bizonyos diákokban nem merül fel a bizonyítás igénye és nem feltétlenül okozunk pillanatnyi feszültséget bennük. Számukra viszont később jelenhet problémát, hogy bizonyításnak gondolnak olyan gondolatmeneteket, amik nem bizonyítások. Másrészt azokban a diákokban, akikben a feladat megoldásakor már felmerül a bizonyítás igénye, okozhatunk pillanatnyi feszültséget a feladattal, ha még nem rendelkeznek kellő szintű matematikai ismeretekkel a pontos megoldáshoz. Ez áthidalható azzal, ha a feladatot úgy fogalmazzuk meg, hogy csak a könnyen megoldható részekre kérdezünk rá. Ekkor hasonlóak lesznek a dilemmáink, mint az előző bekezdésben, a tanári szemszögből felvetettek.

Szerzői dilemmák merülhetnek fel könyvek, feladatgyűjtemények szerkesztésekor. Itt tulajdonképpen a feladatkitűzői dilemmák egészülnek ki néhány további kérdéssel. Az első ilyen az, hogy beválogathatok-e a gyűjteményembe olyan feladatot, amire tudom, hogy hiányos vagy hibás megoldást adhatok csak ahhoz, hogy a célközönség számára érthető legyen. Sokszor találkozhatunk annak az eredményével, amikor erre „igen” választ adott a szerző. Nemleges válasz esetén az a lehetőség marad, ha a feladatot nem akarjuk teljesen „kidobni”, hogy csak egy részét adjuk fel. Ekkor azonban sokszor veszít a feladat az érdekességéből, kevésbé lesz vonzó, akár nem is illik már a kötetbe. A teljes kihagyással viszont esetleg az olvasótábort megfosztjuk egy-egy szép, érdekes, mély gondolat megismerésétől.

III.7. Interjúk

Szerettünk volna a felmerülő dilemmákról minél teljesebb képet alkotni és a lehető legnagyobb részükre feloldási javaslatot is találni. Ennek érdekében interjút készítettünk doktorandusz hallgatókkal. Az interjú során többek között az alábbi kérdésekre szerettünk volna választ kapni: Hogyan, milyen módszerrel oldják meg a hallgatók ezeket a feladatokat? Felmerül-e bennük a kiterjesztés igénye? Felmerülnek-e a feladatokkal kapcsolatban dilemmáik? Ha igen, képesek-e önállóan azok feloldására?

Másik interjúnk alanya Róka Sándor, aki a magyarországi tehetséggondozás kiemelkedő alakja. Szakköri feladatgyűjtemények és matematikai rejtvénygyűjtemények szerzője, melyek széles körben ismertek és kedveltek. Egyik legismertebb könyve a 2000 feladat az elemi matematika köréből, ami ajánlott irodalom a matematika tanárszakos hallgatóknak is (Róka 2010). Emellett nagy tapasztalata van tehetséggondozó szakkörök vezetésében is alsó tagozattól egészen a főiskoláig. Korábban a Nyíregyházi Fősiskolán is oktatott, jelenleg az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó keretei között tanít hétvégente.

III.7.1. Interjú doktorandusz hallgatókkal

Szabó Csaba tanár úr vezetésével interjút készítettünk három doktorandusz hallgatóval a száz állításos feladatról. Az interjú leírása során a tanár úr, azaz a kérdező megszólalásait **K**, a három hallgatóét **A**, **B** és **C** jelöli. Az interjú során elhangzott neveket is lecseréltük a betűjelekre a követhetőség és az anonimitás érdekében.

Kilencvenkilenc állítás

Egy papíron az alábbi állítások olvashatók:

1. Ezen a papíron pontosan egy állítás igaz.
2. Ezen a papíron pontosan két állítás igaz.
3. Ezen a papíron pontosan három állítás igaz.

…

99. Ezen a papíron pontosan kilencvenkilenc állítás igaz.

A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le mind a 99 állítást.
Határozd meg, hogy mely állítások igazak a papíron! (Róka 2013: 87)

C: Próbálkozzunk! Lehet-e az 1. igaz? Ekkor a többi hamis. Ez működhet.
Lehet-e a többi igaz? Pontosan 2, pontosan 3… nem lehet.

K: Bármely két állítás kizárja egymást. Akkor legfeljebb egy lehet csak igaz.

A feladatra nagyon gyorsan talált ügyes próbálgatással megoldást az egyik doktorandusz, amelyet a kérdező röviden kiegészített és lezárt, hogy ne akadjon el az interjú ennél a feladatnál, hanem rá lehessen térni a továbbiakra.

Száz állítás

Egy papíron az alábbi állítások olvashatók:

1. Ezen a papíron pontosan egy állítás hamis.
2. Ezen a papíron pontosan két állítás hamis.
3. Ezen a papíron pontosan három állítás hamis.

…

99. Ezen a papíron pontosan kilencvenkilenc állítás hamis.
100. Ezen a papíron pontosan száz állítás hamis.

A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le mind a 100 állítást.
Határozd meg, mely állítások igazak a papíron! (Róka 2013: 87-8)

A: Mi a kérdés?

K: Melyikek igazak?

A: *(átfordította a másikra)*

B: Ezek is kizárják egymást. A 99. igaz, akkor a többi hamis.

K: Ezek az állítások ellentmondanak egymásnak. Akkor legfeljebb egy lehet igaz. A 99. lehet igaz, ekkor a többi hamis.

A: Lehetne-e, hogy egyik sem igaz? Akkor 100 hamis van, de akkor a 100. igaz.

Kétszáz állítás

Egy papírlap egyik oldalán a következő szöveg olvasható:

1. Ezen a lapon legalább egy állítás igaz.
2. Ezen a lapon legalább két állítás igaz.
3. Ezen a lapon legalább három állítás igaz.

…

99. Ezen a lapon legalább kilencvenkilenc állítás igaz.
100. Ezen a lapon legalább száz állítás igaz.

Ha megfordítjuk a lapot, a másik oldalán ezt olvassuk:

1. Ezen a lapon legalább egy állítás hamis.
2. Ezen a lapon legalább két állítás hamis.
3. Ezen a lapon legalább három állítás hamis.

…

99. Ezen a lapon legalább kilencvenkilenc állítás hamis.
100. Ezen a lapon legalább száz állítás hamis.

A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le mind a 200 állítást. Hány igaz állítás van a lapon? (Róka 2013: 88-9)

K: Most pontosan helyett legalább van. Pech: egyszerre rajta van az igaz és a hamis is.

Valaki: Miért nem a 3. feladattal folytatjuk?

K: A 3-as hibásan lett oda berakva, így nem didaktikus.

C: Nézzük ***A*** gondolatát: Meg tudjuk feleltetni egymásnak?

A: A legalább x-ből következik a legalább x-1.

K: Tehát megadható egy lineáris rendezés.

B: Lehet, hogy ez egy nyitott feladat, vagyis nem egy válasz van rá. Az állítás definíciója: egy állítás akkor állítás, ha eldönthető róla, hogy igaz vagy hamis.

(csak az első oldalt nézte)

A: Úgy se jó.

C: Ha mind a 100 igaz, akkor igaz mind a 100.

Egymást kell hogy meghatározzák.

B: A feladat szövege megmondta, hogy állítások, akkor nem mondhatjuk azt, hogy nem.

K: ***B*** azt mondja: ***C*** szereti a mogyorót. ***A*** szereti az almát. …
Ezektől külön-külön eldönthető, hogy igaz vagy hamis.

Ezen a ponton a kérdező szándékosan nem akar még rátérni arra a metamatematikai kérdésre, hogy mit nevezünk állításnak, ezért olyan felvetéseket fogalmat meg, amik elterelik a figyelmet erről a kérdésről. A célja ezzel az, hogy az interjú jól megmutassa a gondolkodási folyamatot, fel legyen építve. Ellenkező esetben, ha itt rögtön kimondanánk, hogy ez a probléma, akkor valójában nem mutatnánk be igazán, nem tennénk láthatóvá és érthetővé az olvasók számára. Egyúttal az is látható, hogy az interjú alanyaiban felmerül a sejtés, hogy mi lehet a probléma forrása, de nem látják át elég tisztán ahhoz, hogy ne lehessen őket könnyen elterelni.

C: Legalább 50 igaz és legalább 50 hamis egyszerre tud teljesülni. De 200 állításunk van. Máshol lesz a bűvös határ. Ha valamelyik igaz, visszafelé igaz lesz az összes többi.

K: [Rajzol egy függőleges vonalat, ami az állítások sorát jelképezi, majd rámutat egy pontra.] Alatta minden igaz, felette minden hamis. Ez maximum 100^2 próbálkozás.

C: Ha legalább 100 igaz, akkor a lapnak az a fele teljesen igaz.

K: Lehet-e az összes maradék igaz?

A: Nem, mert akkor kéne, hogy legyen hamis is.

K: Hány hamisnak kell lenni ahhoz, hogy kellő számú igaz állítás legyen?

A: Legalább 50-nek.

C: Az már 150 igaz állítás. Nem jó.

A: De jó, mert az legalább 100.

K: ***B*** ötletét nézzük meg. Lehet-e, hogy nem igaz, hogy legalább 100 állítás igaz? Akkor kéne legalább 100 hamis állítás.

C: Akkor az mind a 100 igaz. Hamisakat határozzuk meg.

K: Az első 100 mind igaz biztosan.

Látható, hogy a doktoranduszok, miután a kezdeti dilemmákról elterelte a figyelmüket a kérdező, egy jól követhető és logikus úton indultak el afelé, hogy meghatározzák, hány állítás igaz – lényegében a könyv által adott mintamegoldás kezdeti lépéseit láthatjuk tőlük. A kérdező ekkor rátért következő feladatra.

A rejtélyes kő

Valamikor régen két hatalmas király háborúzott egymással. Végül az egyik győzött és elkergette a másikat. Az utóbbi palotájának kertjében különös kősziklára bukkantak, amelyre ezt a mondatot vésték, pontosan hetvenhétszer:

„Erre a kőre legalább hetvenhét hazug mondatot véstek."

Mellette kis kőtáblácska állott, amin a következő magyarázat volt olvasható:

„A nagy kő alsó részén ugyanannyi mondat van, mint a felsőn, de ezt emberi szem nem láthatja."

Hány igaz állítás van a kőre vésve? (Róka 2013: 89-90)

B: (értelmezi a feladatot)

C: Mi az állítás?

B: „Erre a kőre legalább hetvenhét mondatot véstek."

C: Ugyanebből a mondatból van 77? Vagy 77 igaz? Nincs-e valami csavar a történetben?

A feladat értelmezése nagy hangsúlyt kap és ezúttal teret enged neki a kérdező. Érezhetően keresik a csavart, rejtett információt a feladatban az interjú alanyai, vagy legalábbis szeretnének nagyon biztosak lenni abban, hogy nem hagytak semmit figyelmen kívül.

A: Hetvenhét amit ír, azok igazak és felette van hetvenhét hamis.

B: Kell alatta 77 hamis. De honnan tudjuk, hogy amit nem látunk, azok között nincs-e igaz?

C: A kő aljára írták ugyanazt? Mert ha igen, az úgy nem lehet.

A 77 állításos feladat megoldását sem vitték végig az interjúban, hanem rátértek az interjú fókuszát jelentő problémára, amely a korábban is ismertetett nyolcállításos feladat volt.

K: Mi jutott eszembe, amikor ezt olvastam?

C: Mátrix.

Nyolc állítás

Egy papíron az alábbi állítások olvashatók:

1. Ezen a papíron legalább egy állítás hamis.
2. Ezen a papíron legalább két állítás hamis.
3. Ezen a papíron legalább három állítás hamis.
4. Ezen a papíron legalább négy állítás hamis.
5. Ezen a papíron legalább öt állítás hamis.
6. Ezen a papíron legalább hat állítás hamis.
7. Ezen a papíron legalább hét állítás hamis.
8. …

Sajnos a 8. állítás olvashatatlan.

A 8. állítás igaz vagy hamis? (Róka 2013: 88)

K: Ha nem is mátrix, egy predikátumos logikai formula lesz. Mi jut eszünkbe?

B: Nekem a 100+100. De ***K***-nak a köves, mert le van törölve és nem látszik az állítás. Kis világos út, amin megyek, a többi sötét erdő…

A: Ha legalább 4 igaz, akkor 3, 2, 1 is igaz. Akkor a maradék hamis, akkor az utolsó is hamis.

C: Nem vághatunk el máshol, például 5-nél. Ha legalább 5 igaz, akkor legalább 5 hamis is, ami nem lehet. A 4-nél többet ezzel kizártuk, úgy érzem.
Ha legalább 3 hamis, akkor a 4. is hamis, de akkor igaz, hogy legalább 4 hamis.

Az interjú alanyai ezúttal nem álltak meg alaposabban megvizsgálni, hogy értelmes-e a feladat és hogyan lehet értelmezni, azonban így is hamar felmerült egy ellentmondás lehetősége. A kérdező ekkor látta jónak visszaterelni a figyelmet azokra a dilemmákra, amelyeket az elején még háttérbe szorított a másfelé vezető kérdésekkel.

K: Itt van n db állítás. Mi az n-edik? Az n-edik nem lehet igaz. Nézzük az n-1-ediket. Ha legalább n-1 hamis, akkor 1 lehet igaz. …
Tudunk-e n=99-re sejtést megfogalmazni? Vagy arra az általános megfogalmazásra, hogy a_1-szer van az leírva, hogy „Legalább a_1 állítás hamis.”, a_2-ször, hogy legalább a_2 állítás hamis, stb. Elég nehezen tudnánk, kis számból lehet könnyebben sejtéseket megállapítani.
Mi történik, ha azt mondom, hogy a 8. állítás az, hogy „Süt a nap.”, ami igaz?

B: Most.

C: A többi állítás miatt szükséges, hogy a 8. hamis legyen, akkor nem lesz a rendszerben ellentmondás.

B: Oda kéne írni, hogy a feladatnak van megoldása.

C: Hamis lesz-e attól a „Süt a nap.”, hogy a többi állítás miatt hamisnak kéne lennie? Hát nem.

C: Nem kell, hogy önmagában tudjuk eldönteni?

K: Mi az az állítás?

C: Mondat.

K: Mi az, hogy mondat?

A: Van egy axiómarendszer és abból le lehet vezetni.

K: Mi a probléma a 8 állításos feladattal? A fő probléma didaktikailag meg matematikailag.

B: Didaktikailag olyan, mint az, hogy folytasd a sorozatot: 5, 10, 15, 20, 25.

K: Mi a matematikai hiba?

C: Mi az, hogy állítás?

B: Vannak dolgok, amiket tudunk. Megegyezünk például egy axiómarendszerben. A definiált műveleteinkkel lépésről lépésre tudunk haladni.

K: Lehet „Süt a nap." helyett „2+2=4 az egész számok között". Ott definiált művelet szerepel, de a probléma fennáll azzal kapcsolatban, hogy a többi mondat alapján hamis, de egyébként tudjuk, hogy igaz.
Jól mondtátok korábban, ezek nem állítások. Mi az, hogy állítás? Összegezzük, hogy miért problémás a feladat.

Az egyik probléma az, hogy „Süt a nap." nem lehet egyszerre igaz is meg hamis is.
A másik probléma, hogy a feladat alapján olyan, mintha az egyik mondat kikényszeríthetné a másikról, hogy milyen legyen (t.i. igaz vagy hamis).
Beszélhetnek egymásról állítások. De állítás csak az a valami lehet, amiről el lehet dönteni, hogy igaz vagy hamis.
Így leginkább azt tudjuk mondani, hogy nincs ennek a feladatnak megoldása.

B: Miért nem feloldás, hogy ezek állítások?
Oda olyan állítás van írva, amiről a szerző tudja, hogy az.

K: Ezen a papíron legalább egy állítás hamis.
Ezen a papíron legalább két állítás hamis.
Ezen a papíron legalább három állítás hamis.
Ezen a papíron legalább egy állítás igaz.
Ezen a papíron legalább két állítás igaz.
Ezen a papíron legalább három állítás igaz.

Én, mint szerző azt mondom, hogy ezek állítások. Hány igaz és hány hamis?

Egyre világosabban körvonalazódik, hogy a probléma azzal kapcsolatban, hogy mit mondhatunk állításnak és hogy a feladat által állításnak nevezett mondatok valójában nem azok, egy mély probléma, amelynek nem magától értetődő a feloldása. Ahhoz, hogy legyen esély feloldani a dilemmákat, még egy kicsit mélyebbre kell ásni.

B: Nem találok jó arányt.

K: Pedig én megmondtam. Akkor ez hazugság.

C: Didaktikailag az a baj, hogy félrevezetőek. Állításnak mond valamit, ami valójában nem az. Hamis képet alakít ki.

K: Ha azt mondjuk, hogy egy állítás igaz vagy hamis, akkor ezek nem állítások, mert nem lehet mindegyik igaz vagy hamis. Mondhat-e egy állítás másik állításról valamit? Most éppen ez történik, állításokról beszélünk állítások segítségével… amikor azt mondom, hogy „ez nem állítás", akkor is ez a helyzet. El kell szakadni a középiskolai definíciótól.

B: Kell egy axiómarendszer, amiből le lehet vezetni.

K: ***C***, mondj egy mondatot!

C: Hódmezővásárhely Magyarország második legnagyobb alapterületű városa…

K: …volt.
Debrecen ***C*** második legpirosabb alkonyatú pohara zuhogott.
Ez nem egy értelmes mondat.

B: Magyar nyelvben ezek is értelmes mondatok.

C: Ez így már tényleg butaság.

B: Értelmesnek kell lennie.

K: Felismerjük-e az értelmes mondatokat?

B: Fel.

K: A rendszerben beszélek vagy nem? Formulába minden megfelelő kategóriaelemet be tudok helyezni. Előre meg van szabva, mit hová tehetek.

Axiómarendszer: változók, függvényjelek, relációk, aritás (hány változó van benne). Mondjuk, hogy megmondtam mi a mondat. Akkor mi az állítás? Vektortérben gondolkodva: skalárral való szorzás, összeadás, ellentettjel.

B: Akkor ez a második mondat is mondat.

K: Viszont nem értelmes. Logikával a második mondat is értelmes.

B: Mikor válik állítássá egy mondat?

K: Ezt többféleképpen meg lehet oldani. Például vannak levezetési lépések. Megmondok szabályokat, bevezetek axiómákat. Le tudjuk vezetni, hogy néhány mondatból következik-e a másik. Axiómákból következnek. Használhatók a formális logika lépései.

Ha igazságtartalmat akarok eldönteni, akkor meg vagyok lőve. Eddig még nincs igaz vagy hamis, csak ebből az állításból levezetve a másik. Ha azt mondjuk, hogy az axiómák igazak, akkor a levezetés is. Vannak teljesülő állítások, ezeket nevezzük mostantól igaznak.

A probléma az, hogy minden axiómarendszerben van olyan állítás, ami eldönthetetlen. Van levezethető, meg nem levezethető állítás. Kimondható olyan mondat, ami nem vezethető le, de nem bizonyítható be, hogy nem vezethető le. Szeretnénk, hogy az igaz állítások legyenek a levezethetők.

Visszatérve: a fejezet első feladata hibás. Mert a harmadik biztosan hibás, hiszen nem mondhatom valamiről kívülről, hogy állítások. Ilyen típusú állításra nem mondhatom, hogy állítás, mert nem mondtam meg, mi a rendszer. Meg kell adni a rendszert: Ezek az állítások, ezek vagy igazak vagy hamisak. Vagy van benne ellentmondás vagy nincs.

B: Mi lett volna ebben az alaprendszer?

K: Lovagok és lókötők.

B: És ha ezt mondom.

Ezen a papíron … darab 0 számjegy van.

Ezen a papíron … darab 1 számjegy van.

…

K: Itt már van axiómarendszerem.

Van megoldható és nem megoldható feladat. 77-tel már nem lehetett ugyanazt feladni, ezért ugyanazt írta 77-szer. Meg kellett volna mondani, hogy mi az állítás.

Feloldás lehet ilyenkor, hogy a feladatkitűző hazudott, tehát ő lókötő.

Igazságtartalmat csak kívülről tudok adni. Például a Peano-féle axiómarendszerben nem tudom bebizonyítani a számelmélet alaptételét.

Nézzük meg ilyen szemmel, miért nincs ennek a feladatnak nincs megoldása. Szeretnénk bebizonyítani, hogy létezik a feladat feltételeinek megfelelő mondat-rendszerünk és nincs benne ellentmondás. Tétel: egy axiómarendszer saját magáról nem tudja bebizonyítani, hogy ellentmondásmentes. Tehát nem fogjuk tudni bebizonyítani. Átverés, hogy nem közlik a diákkal, hogy itt vannak paradoxonok.

Összegezve az interjú tapasztalatait elmondható, hogy a doktoranduszok is a feladat megoldására fókuszálnak először, nem pedig a mély értelmezésére. Felvetik ugyan röviden, hogy vizsgálni kellene az állítás fogalmát, de a közbevetett kérdések hatására hamar visszaterelődnek a megoldás keresése felé. A több mint egy órás interjú vége felé térnek csak vissza a feladattal kapcsolatos problémákra, aminek ahhoz is lehet köze, hogy az állítás precíz definícióját nem tudták elmondani. Ez a fogalom nem tananyag a tanárszakon, mióta A matematika alapjai c. tárgy két félévét összevonták 2000-ben. Az interjú szemlélteti, hogy komoly matematikai háttér és matematikai intelligencia kell ahhoz, hogy valaki magában a feladatkitűzésben kételkedjen. Doktoranduszi szinten ez elérhető. Egyúttal arra is rávilágított az interjú, hogy ennek a témának a letisztázása középiskolás szinten nagyon nehéz lenne.

A feladattípus ismertetésekor röviden beszéltünk a feloldási lehetőségekről. A nyelvek Chomsky-féle hierarchiáján alapuló részletesebb elemzést mellőzzük, a középiskolás tudással is elérhető Smullyan-féle, „lovagok és lókötők” világában (axiómarendszerében) működő verzióra fókuszálunk. Szép feloldást ad a következő lovagokról és lókötőkről szóló példa. „Tegyük fel, hogy A ezt mondja: ’Lókötő vagyok, vagy kettő meg kettő az öt.’ Mire következtethetünk ebből?” (Smullyan 2016: 18) A könyvben szereplő hivatalos megoldás a következő. „Az egyetlen levonható következtetés az, hogy a feladat szerzője nem lovag. Az igazság az, hogy sem lovag, sem lókötő nem tehet ilyen kijelentést. Ha A lovag lenne, akkor az az állítás, hogy ’A lókötő, vagy kettő meg kettő az öt’, hamis lenne, hiszen A nem lókötő, és kettő meg kettő sem öt. Így A lovag létére hamisat állítana, ami lehetetlen. Másrészt, ha A lókötő lenne, akkor az az állítás, hogy ’A lókötő, vagy kettő meg kettő az öt’, igaz lenne, mivel az első fele, miszerint A lókötő, igaz. Így A, aki lókötő, igazat állítana, ami ugyanúgy lehetetlen. Tehát a feladat feltételei ellentmondásosak (…). Vagyis én, a feladat szerzője vagy tévedtem, vagy hazudtam. Arról biztosíthatom önöket, hogy nem tévedtem, ebből következik, hogy nem vagyok lovag. A teljesség kedvéért szeretném megjegyezni, hogy életem során legalább egyszer igazat is mondtam már, így lókötő sem vagyok.” (Smullyan 2016: 24-5)

Vagyis feloldást jelenthet az ellentmondásos feladatoknál, ha belátjuk, hogy a feladat kitűzője vagy tévedett, vagy hazudott.

III.7.2. Interjú Róka Sándorral

Róka Sándor tanár úrral kutatócsoportunk tagja, Szenderák Júlia készített interjút, melyet teljes terjedelmében a Függelékben közlünk. Itt röviden foglaljuk össze a Tanár úr néhány fontos meglátását.

Az interjú során Róka Sándor tanár úr rávilágított arra, hogy a könyvei, feladatgyűjteményei szerkesztésekor az egyik legfontosabb szempont volt a diákok érdeklődésének felkeltése, a szereplő feladatok ezt a célt szolgálják. Ennek érdekében fontos, hogy izgalmas és érdekes legyen a feladat szövegezése, megragadja a diákokat és motiválja őket, hogy meg akarják oldani a feladatot. Az gondolja, hogy a szakkörön hozzátartozik a feladatkitűző szerepéhez, hogy egy-egy feladatot a diákokkal minél jobban körüljárjanak, a lehető legpontosabb megoldást adják rá. Az általunk elemzett feladattípusok közül a mérlegesről beszélve kiderült, korábban a tanár úr is abban a formában tette fel a kérdést a pontosság kedvéért, hogy meg tudják-e oldani 5 mérésből a feladatot. Most már inkább úgy teszi fel a kérdést, hogy próbáljuk meg megoldani minél kevesebb mérésből. Ez azért van így, mert a csoportokban általában van olyan, aki nem találja meg a módszert a lehető legkevesebb mérésre, de így nekik is van sikerélményük, amikor találnak egy viszonylag jó konstrukciót (viszonylag kevés méréssel). Így sokféle gondolatmenetet meg lehet beszélni, a legkevesebb méréssel megoldók is láthatják, hogy a több mérést használó gondolatmenetekben is lehet szép gondolat, azután arra is láthatnak példát, hogy esetenként sokféleképpen lehet akár kevesebb mérésből is eljutni a megoldásig. Érdeklődőbb diákokkal a Tanár úr is körbe szokott járni sok oldalról, sokféle kérdéssel egy-egy problémát. A felmerülő kérdések tisztázására, a pontatlanságok javítására ekkor nyílik lehetősége a tanárnak. Az pontatlanságot okozó részletekre való rávilágítás, a kérdések tisztázása a tanár feladata a Tanár úr szerint, könyveiben is ezt a szellemiséget követi.

III.8. Feloldás, összegzés

Dolgozatunk jelen részében a matematikaoktatás egyik etikai kérdésével foglalkoztunk. A reguláris, tantermi matematikaóráknak a spirális tananyagelrendezés miatt természetes velejárói a matematikai pontatlanságok a fogalomalkotás során – de megengedhetőek-e hasonló pontatlanságok a tehetséggondozásban? Adhatunk-e matematikailag hibás választ vagy megoldást egy kérdésre vagy egy feladatra?

Két fő kérdéskör merült fel az általunk vizsgált három feladattípus – az állításos, a tevés és a mérleges feladatok – kapcsán. Az egyik, amelyet az állításos feladatok indukálnak, hogy szabad-e olyan fogalmakkal játszani, amelyeket nem ismernek pontosan a diákok. A válaszunk az, hogy szabad. Az állítás fogalmának köznapi és matematikai szétválasztása nem egyszerű, azonban találhatunk módot arra, hogy a diák számára értelmezhető módon adjunk feloldást az ellentmondásra, ahogyan Smullyan is tette a lovagok és lókötők univerzumának egyik feladatában. A tevés és a mérleges feladatokban a szélsőértékek és a konstrukciók fogalma közötti különbség okozza a nehézséget. A feladatgyűjteményből ismertetett feladatok esetén és a feladattípushoz tartozó feladatok többsége esetén komoly matematikai kihívás már az optimális konstrukció megmutatása is. Azonban még ennél is nehezebb feladat és sok esetben túlmutat a középiskolások képességein annak megmutatása, hogy nincs jobb konstrukció az általunk mutatottnál.

Többféle szempontból (diák, tanár, feladatkitűző, feladatgyűjemény-szerző) merülhet fel sokféle dilemma és metamatemEtikai kérdés. Miután ezekből jónéhányat ismertettünk, interjúk segítségével próbáltunk választ találni a kérdések egy részére. Az első interjú doktorandusz hallgatókkal készült, és a megoldások matematikai hátterét feszegeti. A második interjú teljes terjedelmében a mellékletben található, alanya Róka Sándor, ismert feladatszerző, számos közismert feladat- és rejtvénygyűjtemény szerzője, a magyar tehetséggondozás egyik kiemelkedő alakja, aki az összes lehetséges nézőpontból találkozott már az általunk vizsgált feladattípusokkal és ezáltal a kapcsolódó dilemmákkal.

Az első interjúból kiderült, hogy még doktorandusz hallgatók számára is okoz kihívást a feladat megoldása és feloldása. Komoly matematikai háttérre és intelligenciára van szükség ahhoz, hogy valaki magában a feladatkitűzésben kételkedni kezdjen. Ez az interjú rávilágított arra, hogy középiskolás szinten nagyon nehéz lenne ennek a témának a letisztázása.

A második interjú tanulsága, hogy feladatkitűzőként sok szempontot kell figyelembe venni és ezek közül szinte soha nem lehetséges figyelembe venni mindegyiket úgy, hogy semelyik ne sérüljön. Róka Sándor tanár úr ars poeticája az, hogy az első szempont a figyelem, az érdeklődés felkeltése. Ez szükséges ahhoz, hogy a diákok matematikai elköteleződésének kialakulását segítsük – anélkül ugyanis a többi kérdés fel sem merül. Később, amikor az érdeklődés és elköteleződés megléte mellett az általunk ismertetett feladatokhoz és a velük kapcsolatos dilemmához eljut a diák és a tanár, együtt kell feloldaniuk az ellentmondásokat, tisztázni a pontatlanságokat.

A tehetséggondozás sok előkészítést, alapos átgondolást, folyamatos figyelmet és rendszeres újragondolást igénylő, komoly feladat. Amikor I. Ptolemaiosz megkérdezte Eukleidésztől, hogy vajon a geometria megtanulásának nincs-e rövidebb és könnyebb módja, mint az, amelyet az Elemek mutatnak, akkor a nagy geométer így válaszolt: „A geometriához nem vezet királyi út." Mi is ennyit tudunk mondani a tanulságok összegzésére: **A tehetséggondozáshoz nem vezet királyi út.**

IV. Irodalomjegyzék

- An-Ping, Li – von Eitzen, Hagen 2009. An improved lower-bound on the counterfeit coins problem. *arXiv*. arXiv:0906.0693.

- Alway, G. G. 1957. Crossing the desert. *The Mathematical Gazette Vol. 41*.

- Bailey, H. (2009). Jeeps Penetrating a Hostile Desert. *The College Mathematics Journal*, *40*(3), 182–187. http://www.jstor.org/stable/25653715

- Bereczky-Zámbó, C., Szabó, C., Muzsnay, A., & Szeibert, J. (2022). Passing the exam and not mastering the material in geometry. *Annales Mathematicae et Informaticae, 55,* 189–195. http://doi.org/10.33039/ami.2022.12.009

- Brendefur, J., Frykholm, J. Promoting Mathematical Communication in the Classroom: Two Preservice Teachers' Conceptions and Practices. *Journal of Mathematics Teacher Education* **3**, 125–153 (2000). https://doi.org/10.1023/A:1009947032694

- Bruner, Jerome Seymour 1966. *Toward a Theory of Instruction*. Mass.: Belkapp Press. Cambridge.

- Bruner, Jerome Seymour 1986. *Actual Minds, Possible Worlds.* MA: Harvard University Press. Cambridge.

- Bruner, Jerome Seymour 1990. *Acts of Meaning.* MA: Harvard University Press. Cambridge.

- Bursics Anna – Fehér Ágnes Csenge – Muzsnay Anna 2016. *Geometriai szemléletfejlődés a magyar középiskolákban.* TDK dolgozat

- Dr. Ceglédi István 2011. *A matematika tanításának pedagógiai – pszichológiai vonatkozásai*. EKF TTK

- Chew, Cheng Meng 2009. Enhancing Students' Level of Geometric Thinking through Van Hiele's Phase-based Learning. *Indian Journal of Science and Technology.* U. Science Malaysia.

- Chiodo, Maurice – Clifton, Toby 2019. The importance of Ethics in Mathematics. *EMS Newsletter December 2019.* 34-37.

- Chong, L. H. 2001. *Pembelajaran geometri menggunakan perisian GSP dak kaitannya dengan tahap pemikiran Van Hiele dalam geometri.* Unpublished master's thesis. Universiti Malaya. Kuala Lumpur.

- Chudnov, Alexander M. 2015. Weighing algorithms of classification and identification of situations. *Discrete Mathematics and Applications Volume 25: Issue 2*. 69-81.

- Clancy, Tom (1999.) Net Force: Night Moves. Berkley

- Crowley, M. L. (1987). The van hiele model of the development of geometric thought. *Teaching and Learning, K-12 – 1987 Yearbook.* Virginia, USA: NCTM.

- Csányi Petra – Pozsonyi Enikő – Szabó Zsanett 2014. *A számelmélet oktatásának hatékonysága általános- és középiskolában.* TDK dolgozat

- Csányi Petra – Fábián Kata – Szabó Zsanett 2016. *Hogyan építsünk számelméletet?* TDK dolgozat. Budapest.

- Csencov, N. N. – Jaglom, I. M. - Skljarszkij, D. O. 1979. *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből* (ford.: Varga Dénes). Tankönyvkiadó. Budapest.

- Dehaene, Stanislas 1992. Varieties of numerical abilities. *Cognition*,

- Dr. Fűzi Beatrix 2015. *Didaktika és oktatásszervezés.* Óbudai Egyetem.

- Fine, N. J. 1947. The jeep problem. *The American Mathematical Monthly Vol. 54 (1)*. 24-31.

- Gale, David 1998. *Tracking the Automatic ANT*. Springer. New York.

- Gardner, Martin (1994). My Best Mathematical and Logic Puzzles. Dover. pp. 53. ISBN 0-486-28152-3

- Grigoriadou, Olga 2012. *Reasoning in geometry How first learning to appreciate the generality of arguments helps students come to grips with the notion of proof*. Msc Thesis. U. of Amsterdam

- Grossman, Howard D. 1945. The twelve-coin problem. *Scripta Mathematica 11*. 360-361.

- Győry, Á.; Kónya, E.: Development of high school students' geometric thinking with particular emphasis on mathematically talented students, *Teaching Mathematics and Computer Science.* (1) pp. 93-110.

- Herendiné Kónya Eszter 2003. A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei. *Iskolakultúra*. Debreceni Egyetem

- Hausrath, Alan – Jackson, Bradley – Mitchem, John – Schmiechel, Edward 1995. Gale's Round-Trip Jeep Problem. *The American Mathematical Monthly Vol. 102 (4).* 299-309.

- Jäger G, Rogers J. Formal language theory: refining the Chomsky hierarchy. 2012. *Philos Trans R Soc Lond B Biol Sci*. 2012 Jul 19; 367(1598):1956-70. doi: 10.1098/rstb.2012.0077. PMID: 22688632; PMCID: PMC3367686.

- Jones, Keith 2002. Issues in the teaching and learning of geometry. *In*: Linda Haggarty (Ed), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics*. London, Routledge

- Kospentaris, George; Spyrou Panayiotis 2008. Assessing the development of geometrical thinking from the visual towards the analytic-descriptive level. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*. Strasbourg.

- Kovács Veronika – Palotay Dorka 2012. *Ez is hungaricum – A modern tudomány és az oktatás kapcsolata.* TDK dolgozat. Budapest.

- N. Kollár Katalin – Szabó Éva 2004. *Pszichológia pedagógusoknak.* Osiris Kiadó. Budapest. 194-212.

- Pólya György 1971. *A gondolkodás iskolája*. Gondolat Kiadó. Budapest.

- Rafidah Mohd Nor 2003. *Mengenalpasti tahap pemahaman pelajar sekolah menengah mengenai konsep geometri berdasarkan kepada teori van Hiele.* Unpublished master's thesis, Universiti Kebangsaan Malaysia. Bangi.

- Rékasi, A., & Szabó, C. (2021). Modification of the geometry curriculum in relation to thecurriculum reform in the light of the van Hiele levels. In É. Vásárhelyi & J. Sjuts (Eds.),Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken (pp. 273-290).Münster. (https://doi.org/10.37626/GA9783959872003.0.15)

- Rote, G.; Zhang, G. (1996). Optimal logistics for expeditions. The jeep problem with complete refilling. Project paper. https://page.mi.fu-berlin.de/rote/Papers/pdf/Optimal+logistics+for+expeditions+-+the+jeep+problem+with+complete+refilling.pdf

- Róka Sándor 2001a. *Négyzetszámok.* Tóth Könyvkereskedés Kft. Debrecen.

- Róka Sándor 2001b. *Kombinatorika.* Tóth Könyvkereskedés Kft. Debrecen.

- Róka Sándor 2002a. *Szakköri feladatok matematikából 7-8. osztály.* Tóth Könyvkereskedés Kft. Debrecen.

- Róka Sándor 2002b. *Prímszámok.* Tóth Könyvkereskedés Kft. Debrecen.

- Róka Sándor 2007. *Szakköri füzetek – Számelmélet.* Tóth Könyvkereskedés Kft. Debrecen.

- Róka Sándor 2010. *2000 feladat az elemi matematika köréből.* Typotex Kiadó. Budapest.

- Róka Sándor 2013. *Logika-land.* Typotex Kiadó. Budapest

- Schoenfeld, Alan H. 1985. *Mathematical problem solving.* Academic Press INC. Orlando, Florida.

- Selkirk, C. H 2011. An investigation into the level of understanding of two-dimensional shapes among learners at the end of the Intermediate Phase in a well-resourced former Model school in the Eastern Cape: A case study, M. Ed., U. of Fort Hare.

- Senk, Sharon & Thompson, D & Chen, Yi-Hsin & Voogt, K & Usiskin, Z & Usiskin, Z. (2022). The Van Hiele Geometry Test: History, Use, and Suggestions for Revisions.

- Skljarszkij, D. O.; Csencov, N. N.; Jaglom I. M. 1979. *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 1.* Tankönyvkiadó Vállalat. Budapest.

- Smullyan, Raymond 2016. *Mi a címe ennek a könyvnek?* (ford.: Török Judit). Typotex Kiadó. Budapest. 18-25.

- Tay Bee Lian 2003. *A Van Hiele-based instruction and its impact on the geometry achievement on form one students*. Unpublished master's thesis. Universiti Malaya. Kuala Lumpur.

- Teller Ede 1990. *Légiposta*. Háttér Lap- és Könyvkiadó. Budapest.

- Usiskin, Zalman 1982. Van Hiele levels and achievment in secondary school geometry. *Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project* Department of Education. University of Chicago. US.

- Usiskin, Z., & Senk, S. (1990). Evaluating a Test of van Hiele Levels: A Response to Crowley and Wilson. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 242–245. https://doi.org/10.2307/749378.

- Vigotszkij, Lev Szemjonovics (1967). *Gondolkodás és beszéd.* Akadémiai Kiadó. Budapest

- Weaver, J. F. (1972). Some concerns about the application of Piaget's theory and research to mathematical learning and instruction. *The Arithmetic Teacher, 19*(4), 263–270. http://www.jstor.org/stable/41190669

- Wilson, Mark 1990. Measuring a van Hiele Geometry Sequence: A Reanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education*

- Wang, Sasha 2011. *The van Hiele theory through the discursive lens: Prospective teachers' geometric discourses*. PhD dissertation. Michigan State University.

- Zachos, I. 1994. *Problem Solving in Euclidean Geometry in Greek Schools*, PhD dissertation, The U. of Leeds School of Education.

- [1] *Kerettanterv 5-8. osztály,* 2012.
http://kerettanterv.ofi.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html

- [2] *Kerettanterv 9-12. osztály,* 2012.
http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html

- [3] *Nemzeti alaptanterv*, 2018.
https://www.oktatas2030.hu/wp-content/uploads/2018/08/a-nemzeti-alaptanterv-tervezete_2018.08.31.pdf

- [4] A 2021-2022. tanév matematika OKTV feladatai és megoldásaik.
https://matek.fazekas.hu/images/konyvek/moktv_20212022_fsormo.pdf

- [5] RUBICONline Kalendárium.
http://www.rubicon.hu/magyar/oldalak/1945_julius_16_az_elso_sikeres_atomkiserlet_vegrehajtasa

- [6] Az Einstein-Szilárd levél: http://www.dannen.com/ae-fdr.html

- [7] NAT 2020:
https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/letoltes

V. Függelék

V.1. További részletek az elsőéves egyetemisták Van Hiele-szintjének megállapításához készített interjúkból

Feladat: Adott a síkon egy e egyenes és egy d távolság. Adjuk meg azokat a pontokat a síkon, melyek d távolságra vannak az e egyenestől.

Az interjú vezetőjének (kérdező) megszólalásait **I**, az interjú alanyáét **A** jelöli.

V.1.1.– 1. interjú

K: Na, szóval. Elmondom, mi a feladat, jó? Van egy e egyenes és van egy d távolság. Hol vannak azok a pontok a síkon, amelyek ettől az egyenestől d távolságra vannak?

A: A síkon? Hát, párhuzamost húzol ezzel.

I: Mivel párhuzamos?

A: Az e egyenessel.

A: d távolságra? /közben lerajzolja a két párhuzamos egyenest/

I: Szuper!

I: Ennyi?

A: Azt hiszem igen.

I: Akkor most bizonyítsuk be!

A: Nem tudom hogyan lehetne… tudnál kicsit segíteni?

I: Na, az első része az, hogy bizonyítsuk be, hogy ezek /közben az egyenesekre mutatok/ „jók”.

A: ….

I: Jó? /nevetés/

I: Vegyünk fel egy olyan pontot, ami rajta van az egyik egyenesen.

A: Jó.

I: Bizonyítsd be, hogy ez a pont d távolságra van az e egyenestől.

I: Vegyünk fel egy P pontot az egyik egyenesen. Jó?

A: Jjó.

I: Akkor most bizonyítsd be, hogy ő, hogy ez a pont d távolságra van az e egyenestől.

A: De hát egyértelmű, hogy d távolságra van, hiszen rajta van a d távolságra lévő egyenesen. Direkt úgy húztam az egyenest! Mit kell ezen bizonyítani?

I: De te csak a megszerkesztett egy darab pontról tudod, hogy d távolságra van…

A: Hát jó. Ja…jó, akkor itt keletkezett egy téglalap 90°-os szögekkel.

I: Igen, ez igaz.

A: Akkor most ez be van bizonyítva?

V.1.2.– 2. interjú

(A feladat ismertetése után a hallgató önállóan elkezdte elmondani a gondolatmenetét.)

A: Vegyünk fel az e egyenesen egy tetszőleges P pontot. Állítsunk merőlegest a P ponton keresztül az e egyenesre. Mérjük fel mindkét oldalra a d távolságot. Így keletkezik még két pont (M, N). Ezekből is állítsunk merőlegest az egyenesekre (f, és g egyenesek). Ezen f és g egyenesek pontjai jó lesznek, mert ha ezekről kiválasztunk egy Q pontot, és merőlegest állítunk a Q ponton keresztül, akkor keletkezik egy téglalap, mert minden szöge derékszög. És mivel a téglalap szemben lévő oldalai egyenlő hosszúak, ezért a megszerkesztett párhuzamos egyenesek minden pontja d távolságra van az e egyenestől.

I: Végeztél a bizonyítással?

A: Azt hiszem nem, valami még zavar………… ja, igen: még be kell látni, hogy más pont nem jó. Tehát a megoldás valóban csak két párhuzamos egyenes lesz.

I: Nagyon jó, igen.

A: Felveszek egy R pontot, ami nincs rajta semelyik egyenesen, de távolsága az e egyenestől szintén d. Hm…………..látszik, hogy nem lehet ez a pont d távolságra az egyenestől, de most kicsit megakadtam…

I: Gondolkozz nyugodtan, ha nem haladsz, majd segítünk.

A: Például ha összekötöm az R és az M pontot (a rajzán ők egy oldalra estek), akkor egy téglalapot kapunk – ami amúgy nyilván nem téglalap, hanem egy derékszögű trapéz. De azért téglalap, mert kettő szöge derékszög, és a két szemközti oldala d hosszúságú. Azaz téglalap. ez is… mondhatom esetleg, hogy az <M, R> egyenes párhuzamos az e egyenessel? Hiszen van két pontja is, ami d távolságra van az e egyenestől. Ha ezt mondhatom, akkor kész, mert adott pontot, csak egy olyan egyenest húzhatunk, ami párhuzamos az e egyenessel (axióma).

I: ???

Alternatív befejezés hasonló gondolatmenethez (a jelöléseket egységesítettük):

Az interjú első része a második interjúval lényegében megegyezik, azonban a befejező gondolatok különböznek, csak utóbbiakat közöljük:

A: Hosszabítsuk meg azt az e-re merőleges egyenest, amit R-ből húzunk. Így metszeni fogja az f egyenest. Legyen ez a metszéspont S. Mivel ez a „meghosszabbított" egyenes merőleges e-re és S rajta van az f egyenesen, ezért S és a talppont távolsága szintén d. Tehát R=S, tehát nincs ilyen pont. Kész!

Alternatív befejezés hasonló gondolatmenethez 2. (a jelöléseket egységesítettük):

A: R-ből állítsunk merőlegest az f egyenesre. Így kapunk egy háromszöget, amiben két szög is derékszög. Mivel a háromszög belső szögeinek az összege 180°, ezért ez nem lehetséges, nincs más pont a két egyenes pontjain kívül.

V.1.3.– 3. interjú

A: Tehát akkor most bebizonyítom, hogy egy adott e egyenestől egy adott d távolságra lévő pontok halmaza, az két olyan egyenes, amelyek párhuzamosak a e egyenessel, és d távolságra vannak tőle. Úgy fogom bebizonyítani…két része lesz a bizonyításomnak. A bizonyítás első részében azt fogom csinálni, hogy bebizonyítom, hogy a párhuzamos egyenesek pontjai tényleg d távolságra vannak….na…az e egyenestől, tehát akkor fölveszek az egyik egyenesen egy P pontot, és ugyebár ez volt az….igen…………..igen… fölveszünk egy pontot………legyen ez az a pont, amit megszerkesztettem, tehát tudom, hogy ez a pont d távolságra van. S akkor az a kérdés, hogy egy másik pontot, ha fölveszek, mondjuk egy Q pontot, akkor ő is d távolságra lesz-e. És hát………….hmmm……………. azért lesz d távolságra, mert szerkesszünk a Q-ból az e-re merőleges egyenest, és akkor kapunk egy …………………..téglalapot, amelynek a szemben lévő oldalai egyenlő hosszúak. …………………………………………… Jó, tehát mivel a téglalap szemben lévő oldalai egyenlő hosszúak, ezért ez is d hosszú lesz. Most akkor ott van a másik része a bizonyításnak, hogy be kell látni, hogy másik pont nem jó. Vegyünk fel egy T pontot, ami nincsen rajta ezen az egyenesen, és akkor ebből is húzzunk merőlegest az e egyenesre. És akkor azt vehetjük észre……….nem. Tegyük fel, hogy ez a T pont, ez jó, őőőőőő és akkor az azért érdekes, hogyha a T pont az jó, mert akkor ő d távolságra van, és akkor van egy olyan négyszögünk, ami a két szemben lévő oldala egyenlő hosszú, van két derékszöge, hm. ez így nem jó, nem, akkor más…………………metszi a másik párhuzamos egyenest, legyen az is egy pont, és akkor kapunk egy olyan……………………..háromszöget, amelyben ez az oldal 0.

A: Tehát. Adott az e egyenes és a d távolság. Oksi. Szerkesszünk az e egyenesből merőlegest. ..tetszőleges pontjából. És akkor mérjük rá a d távolságot, ami meg van adva. Legyen ez a végpontja a P pont, és akkor a P pontból erre a merőleges egyenesre szerkesszünk még egy merőleges egyenest, és akkor az az állításom, hogy ennek az egyenesnek minden pontja d távolságra van az e egyenestől. S akkor ez azért lesz igaz, mert ha fölveszek egy másik pontot, legyen mondjuk az Q, szerkesszünk. Q-ból is merőlegest az e egyenesre. Akkor már van egy négyszögünk, amelyben három szög, az derékszög. S nem tudom, felhasználhatjuk-e azt, hogy a négyszög belső szögeinek az összege 360°, mert akkor létrejött egy téglalap egyenlő hosszúak. Tehát akkor kész vagyunk.

I: Próbáld meg axiomatikusan.

A: jó, akkor be kéne látni, hogy a téglalap belső szögeinek összege 360°. Szóval akkor azt kéne belátni, hogy a háromszög belső szögeinek összege az 180°. Az hogy is volt? … Nem tudom már, Uram, Atyám. Hm….Najó, ezt nem tudom.

V.1.4.– 4. interjú

I: A feladat a következő – közben rajz. Adott a síkon egy e egyenes – ez itt egy egyenes – és egy d távolság.

A: Igen?

I: Add meg azon pontokat a síkon, amelyek ettől az e egyenestől d távolságra vannak.

A: A síkon?

I: A síkon. Azokat a pontokat a síkon, amelyek ettől az egyenestől d távolságra vannak.

A: Egyenes?

I: Igen.

/Rajzol, de nem mondja a megoldást/

I: Ezek mik?

A: Ez az a két egyenes, hogy ha kiválasztjuk akármelyik pontot, akkor látszik, hogy ezek d távolságra vannak, mert ez a két egyenes párhuzamos az e-vel.

I: Kész vagyunk?

A: Igen. Szerintem kész.

I: Várj, akkor arról a pontról mit tudunk? /rámutatok egy pontra az egyik párhuzamos e gyenesen.

A: Azt, hogy d távolságra van az e egyenestől.

I: De hát te azt honnan tudod?

A: Jajj ☺

I: Miért jajgatsz? Mi van a fejedben? Mi jutott eszedbe?

A: Igazából mindegyik pontra csak ugyanazt tudom mondani.

I: Hogyan jön létre az egyenes?

A: Azt csináltam, hogy vettem egy pontot, ami d távolságra van az egyenestől, és azon át húztam egy párhuzamost.

I: Hogy keletkezett ez az egyenes? Hogyan szerkesztenéd meg?

A: Szerkesztenék e-re egy merőlegest. Az e egyenesen lévő P pontból felmérek d távolságot, akkor a D pontot kapom. Szóval tudom, hogy a D távolsága az e egyenestől d.

I: Igen, ez így nagyon jó. Mi a következő lépés?

A: Erre az f egyenesre (e-re merőleges egyenes) állítok merőlegest, ami átmegy a D ponton.

I: Jó, oké.

A: És akkor ezt megcsinálom lefele is.

I: Nagyon jó, akkor tudunk egy pontról, ami d távolságra van az egyenestől…

A: Sok ilyen pontot tudunk.

I: Nem, csak egy ilyen pontról látom.

A: Jó…azt szeretnétek tudni, honnan tudom, hogy ezek a pontok is d távolságra vannak az egyenestől?

I: Ahha.

A: Hát azért, mert ezt a P pontot én akárhol kiválaszthatom az e egyenesen. Ha tudom, hogy erre az f egyenesre az e is merőleges, és ez a keletkező párhuzamos egyenes is merőleges, tehát ez a kettő párhuzamos.

V.2. Interjú Róka Sándor tanár úrral

Róka Sándor tanár urat elsősorban feladatgyűjteményeiről és feladatkitűző szellemiségéről szerettük volna kérdezni. A Tanár úr már az interjú előtt is megnyílt felénk, és szinte kérdések nélkül mesélt feladatkitűzői és tehetséggondozói szemléletéről. Az interjút Szenderák Júlia készítette, az ő megszólalásait **J** jelöli, míg Róka Sándor tanár úrét az **RS** monogram.

J: Nagyon sok könyve ismert, én is rengeteg könyvével találkoztam, meg nagyon sok feladatgyűjteményével is, amiket azért főleg a tehetséggondozásban használunk, használnak a tanárok. De azért az egyetemen is többször előkerülnek a kötetei, főleg a 2000 feladat az elemi matematika köréből. Hogyan kezdődött ezeknek a feladatgyűjteményeknek az írása? Miért kezdte el? Miért írta őket? Mi volt velük a célja?

RS: Nekem mindig voltak szakköröseim. Városi szakkör, válogatott diákok, akiket érdekelt a matek. Amikor milyen korúak. Volt vagy két olyan csoport is, akikkel negyedikben elkezdtem alsósként, és érettségiig együtt voltunk. A szakköri munkához válogattam amúgy is szép feladatokat, hogy ne unatkozzanak. Ezek a feladatok szépek, jó őket megoldani, gyönyörködni bennük. Diákkorom óta érdekeltek. Akkor gyűjtögettem a feladatokat, például orosz feladatgyűjteményekhez hozzá lehetett jutni, azokban voltak nagyon szépek, a KöMaL-ban, versenyeken. Tehát lehetett ilyeneket találni, ha az ember keresett, kellett a szakkörre. Csináltam levelező pontversenyt több éven át, aztán lett az Opus, ahhoz is kellettek szép feladatok. Tehát sok-sok feladat ott volt kéznél. Meg igen, a főiskoláshoz is kellett jegyzet. Meg írtam cikkeket ilyen feladatsorokról. Szóval ott voltak körülöttem a feladatok., és hogy sok könyv lett belőle, az egy szerencsének is köszönhető. Volt Debrecenben egy könyvkiadó, a Tóth Könyvkereskedés és én Tóth Csabát ismeretem, itt tanult, itt végzett tanárként a főiskolán, tanítottam. Neki is jó piaci körülményei voltak, nagyon sok könyvet, sokféle könyvet eladott, ezt ő ügyesen csinálta. Nála sok könyvem megjelent. Persze máshol is, de valahogy így történt.

J: Azt említette, hogy nagyon sok feladat állt rendelkezésére. A feladatgyűjteményekben szereplő feladatok főleg ezek közül kerültek ki, vagy van köztük rengeteg olyan is, amiket Ön gyártott? Ezekben van valamilyen tematika?

RS: Vannak saját feladataim. Például a KöMaL-ban egészen sok feladatom megjelent, például a 90-es évek környékén, meg mostanában is vannak. Ezek egy része olyan volt, hogy láttam valahol, és voltak közte saját készítésűek. Valamin gondolkozik az ember, valamit úgy megtalál, kitalál, és ha sikerül belátni, lesz belőle egy feladat. Túráztatni kell azért a memóriámat, hogy ilyenek előkerüljenek, de mondjuk eszembe jut az, hogy például tanulják analízisből a Dirichlet függvényt. Van-e olyan folytonos függvény, amelyik racionális helyen irracionális, irracionális helyen racionális? Ez egy elég érdekes kérdés, nekem tetszett. Gondolkoztam rajta, de nem fejtettem meg. Egészen rövid megoldása van. Például Papp Júlia debreceni diák volt akkoriban, középiskolás. Olimpikon is volt a bátyjával együtt. Együtt utaztunk valahova és akkor elmondtam neki, ő percek alatt megoldotta. Ezt olyan jó volt látni. Most is van olyan érdekes feladat, ami most is foglalkoztat.

J: Van esetleg kedvenc kötete a saját kiadványai közül? Vagy kedvenc sorozata?

RS: Nyilván mindegyik amikor megszületett kedves volt számomra és azért ez nem változott meg, csak eltompult legfeljebb. A legtöbb munka azt gondolom a 2000 feladatban volt.

Az nagyon sok időbe telt. Hiszen meg sem született akkor, 1992-ben volt az első változat, akkor még 1000 feladatként. Aztán lett belőle pár év múlva 1500, aztán lett 2000, és itt abbahagytuk. De sok könyv elég gyorsan született, a 2000 feladathoz képest mindenképpen. Szóval abban rengeteg munka volt, abba sok mindent beletettem.

J: Említette ezeket a városi szakköröket. Amikor ezeket a feladatgyűjteményeket állítja össze, vagy állította össze, akkor főleg egy adott diákcsoportra, vagy adott gyereknek állította össze, vagy elképzelt egy korosztályt, egy társaságot, akik számára készítette ezeket a feladatgyűjteményeket?

RS: A téma volt meg. Mondjuk skatulyaelves feladatok általános iskolásoknak, vagy területes feladatok.

J: Akkor ezek a kis füzetek a legtöbbször inkább téma szerint készültek, adott korosztálynak, mondjuk általános iskolások számára?

RS: Igen. Megvolt, hogy ez a téma engem érdekel, ehhez amúgy is sok feladatom van, ilyet jó lenne írni. És ha lehetett, akkor megszületett. Sokféle tervem, kéziratom is van, ami senki másnak nem kell, de elkészítettem. Például volt ilyen, hogy A matematika humora. Az jó volt, az egy használható dolog volt, ilyen sztorikat összegyűjteni. Meg nyilván érdekelt engem is. Abból a gyűjtésből lett egy könyv. Én azt nem gondoltam, hogy abból több is lesz. Aztán lett belőle nagyjából öt. Vagy a logisztorik is egy izgalmas feladattípus. Abból akkor egy kötet lett. Én akkor nem gondoltam arra, hogy abból több lesz, és lett négy-öt abból is.

J: A logisztorik több helyen is megjelennek azért más könyvekben is.

RS: Így van.

J: Mondjuk a Logika-landban is vannak olyan történetek, amik a logisztorikhoz kapcsolódnak. Ön szerint mi a szerepe a gondolkodásban ezeknek az egyébként nem matematikai rejtvényeknek? Merthogy fontos megoldásuk van, de mégsem precíz matematika. Mi lehet a szerepük?

RS: A rejtvényeken meg a feladatokon is jó gondolkodni. És hogy most matekfeladaton gondolkodom, vagy egy másfajta logikai rejtvényen, aközött inkább csak a technikai eszközökben van különbség. A matekos rejtvényeknél, ott tudni kell mindenféle dolgokat, például a logaritmust. Ahhoz kellenek alapismeretek. Gondolkodni jó, rájönni valamire az nagy élmény. Diákkoromban részt vettem levelező pontversenyben. Jó volt a feladatokon napokig gondolkozni, és este is még ott jár az ember fejében. Ez egy hosszú út, míg rájön az ember és az nagy élmény.

Eszembe jutott valami, mostanában gondoltam is rá valamiért, és a kérdésével kapcsolatos. Kaptam egyszer egy levelet egy volt olimpikontól. Miskolci diák volt valamikor régen. Most amit kérdezett, vagyis hogy mi a rejtvények szerepe, mi a feladatok szerepe, ahhoz kapcsolódik. Ebben tetszettek, amiket írt. Úgy nem ismertük egymást Lacival, legalábbis személyes tantermi kapcsolat nem volt köztünk. De aki három alkalommal is diákolimpikon volt, arról azért tud az ember. Szóval, hogy a feladatoknak mi a szerepe. Matematikus diplomát szerezett, majd elment doktorizni, de azt nem fejezte be, és az egyik internetes nagyvállalatnál dolgozik külföldön fejlesztőként, mert szeret programozni. És hogy miért nem lett matematikus egy háromszoros matematika diákolimpikonból? „Bármilyen jól mennek is a matekversenyek a profi matematikát csak olvasni szeretem, a műveléséhez nincs türelmem, kitartásom. Egy versenyfeladaton szeretek gondolkozni, tudom hogy van esélyem megoldanom. A valódi matek mindig rizikós, unalmas. Mai napig nagyon szeretek viszont matematikát olvasni minden szinten. Végtelenül élvezem, ha a bizonyítást átugorhatom, mert hihető, hiszen csak hobbiból olvasom.” Most már sok évvel a diákkor után a KöMaL-t mindig olvasgatja, minden hónapban, és gondolkozik a feladatokon pár órát. Tehát ez egy jó időtöltés, gondolkodni élmény, rájönni valamire jó dolog. Elégedetten hátra dőlök, amikor úgy érzem, hogy megvan, ezt meg lehet fejteni. És akkor emiatt írt ő nekem levelet, hogy volt egy KöMaL feladat, napokig gondolkozott rajta. B feladat volt, ami nem is a nehéz feladatok között van. Egy nagyon rutinos feladatmegoldóról van szó. Ez nekem is egyfajta vigasz, amikor gondolkozok feladatokon, és nem jövök rá. De nem esek kétségbe. Szóval egy szokásos KöMaL feladaton napokig gondolkozik és nem tudta elképzelni, hogy hogy lehet ilyet állítani, amit a feladat mond, meg hogy lehet rájönni a megoldásra. A geometria példát meg tudja csinálni koordináta-geometriával, de az meg nem érdekes, mert nem jön rá, hogy mitől működik az. Végül megoldotta, és ez egy katartikus élmény volt számára, és meg akarta osztani velem. Tehát a feladatmegoldás az egy küzdelmes dolog, és jó hogyha sikerrel jár. Függőséget is okozhat, ha az ember rászokik erre.

Volt egy feladat és azt sokszor elmeséltem, már csak emiatt is emlékszem rá. Komáromban minden ősszel van Nagy Károly Diáknapok középiskolásoknak. Hétvégén ott matematikus foglalkozások mennek, összegyűlnek mindenhonnan az országból meg Felvidékről. A szervező, Oláh Gyuri bácsi egy ilyen komáromi rendezvényen mondott nekem egy példát. Két hármasból, két nyolcasból a négy alapművelettel, zárójelekkel állítsd elő a 24-et. Az ilyet szeretem, nekem is érdekes ez a feladat. Kijönnek ilyenek, hogy $8 + 8 + 3 \times 3 = 25$, a 25 megvan. Vagy $(8 + 3) \times 3 - 8 = 25$, a 25-öt másképp is meg tudom csinálni. Szóval Gyuri bácsi adta nekem ezt a példát, hogy oldjam meg. Ezen gondolkoztam, és nem jöttem rá. Komárom messze van Nyíregyházától, a vonaton volt időm. Gyuri bácsi nem felejtette el, egy év múlva megint megkérdezte, hogy megcsináltam-e. Nem az volt, hogy mindig ezen gondolkoztam, de évek teltek el, hogy ezt próbáltam megfejteni. Ez egyszerű ráadásul, mert csak néhány opció van, néhány lehetőség. Olyan sok variáció nincs, hogy hogy csinálok műveletsort belőle. Már ez is egyfajta vonzerőt tud jelenteni. Pár év eltelt. Egy januárban havat lapátoltam. Nagyon nagy hó volt. Órákig lapátolja olyankor az ember, megpihen, aztán újra lapátol. És akkor rájöttem. Ez egy csoda volt. Olyan örömöt tud okozni, hogy ezt megoldja az ember. Szóval jó feladatokon gondolkozni. Az, hogy könnyű vagy nehéz egy feladat, az egy bizonytalan dolog. Van akinek könnyű, van akinek nehéz. Nyilván, amihez nagyon sok technikai ismeret kell, az azért nehéz. De találunk néhány nagyon egyszerű feladatot. Szeretem az ilyeneket, gyűjtöm. Volt, hogy itt a főiskolán tanítottunk tanítóképzősöket is. Jöttek a gyakorlóból, hoztak egy példát, ami az elsős könyvben volt, és kérdeztek tőlem. Nem tudták megoldani és én sem jöttem rá. De egy normális elsős feladat volt, egy számtáblázat. Van benne néhány szám, kettő hiányzik, milyen szám kell oda? Nem jöttem rá. Gyűjtöm ezeket, van néhány feladatom, amit nem oldottam meg, ami alsós feladat, vagy akár ovis feladat és az ember nem jön rá, mert nem elég rugalmas a gondolkodása.

J: A 24 előállítására szeretnék még egy pillanatra visszatérni. Azért ez is egy olyan feladat, amikor nagyon sokféle konstrukcióval próbálkozik az ember, hogy hogyan tud eljutni ehhez a megoldáshoz. Többször is találkoztam olyan feladattal a könyveiben, amikor hasonló megoldásmeneteket adott a Tanár úr. Például voltak ezek a mérleges feladatok, amikor a hamis érmét kellett megtalálni a pénzérmék közül. Ott is sokszor előfordul, hogy konstrukciókat adunk megoldásként, viszont ezekkel a konstrukciókkal csak azt tudjuk megmutatni, hogy valahogyan meg tudjuk találni azt a pénzérmét. De igazából azért itt valamennyire engedünk a matematikai precízségből, amikor konstrukciót adunk egy ilyen feladat megoldásaként. Ön szerint ez mennyire megengedhető a tehetséggondozásban, a matematikai precízségből való visszavétel vagy engedés annak érdekében, hogy könnyebben érthető legyen az, hogy miről van szó az adott feladatban?

RS: Matematikát általában nem úgy nézünk, hogy definíció, tétel, bizonyítás és akkor minden teljes. Meg a megismerés sem így történt, amikor legelőször megfejtették a feladatokat. Ezek akár túlzások is lehetnek. A precíz axiomatikus felépítés az nagyon kevesek számára fontos. Nem biztos, hogy ilyesmit a gyereknek át kell adni, mert őt nem érdekli, nehéz is megérteni akár, hogy ez most miért fontos. Szóval ez egy nehéz terep tud lenni. De konstrukciós feladatokban vannak ilyenek versenyeken, sok helyen. Azért a felbukkanó feladatok nagyobb részében mind a kettő szerepel. Mutassuk meg, hogy ennyiből megoldható a feladat, és akkor ennyivel megoldom. A mérlegelőseknél is azért vannak olyan példák, ahol belátható, hogy ennél kevesebből nem lehet megcsinálni, és akkor megcsinálom ennyivel. De ez néha tényleg nehéz, azt tudom persze. Mondjuk nyolc különböző tömegű golyóból a két legnehezebbet megtalálni, hogy ehhez annyi mérés kell, amennyi kell, az nehéz. De az, hogy a legnehezebb megtalálásához hét mérés kell, az világos, és hogy héttel meg lehet csinálni, azt pedig megmutatjuk.

J: Ön szerint van olyan szint a tehetséggondozás során, amikortól már tisztába lehet tenni ezeket a dolgokat? Van elképzelése esetleg arról, hogy kinek lenne a szerepe az, hogy azokat a tehetséggondozásban résztvevő diákokat, akikben esetleg igény ébred erre a precízségre később, támogassa ebben? Kinek lehet a feladata vagy a szerepe, hogy azokat a feladatokat, amikkel korábban találkozott, úgy tegye tisztába, hogy a precízség is megmaradhasson?

RS: Szerintem ez csak a specialistákat érdekli, meg néhány ínyencet. Mint akár ez az e-mail, amit Laci írt, hogy a bizonyításokat átugorja. Ha úgy érzi, hogy az hihető, hogy ennyi, akkor ő nem nézi meg a bizonyítást, mert neki nem kell vizsgáznia, meg ilyesmi.

J: Ezek szerint olyan célközönségnek szólnak ezek a feladatok, akik inkább az élményszerűséget keresik benne úgy, hogy ne kelljen tökéletesen precíz levezetéseket elvégezniük? Igazából azért kérdezem ezt, mert közben kiderült, hogy Édesanyám is tehetséggondozás kapcsán járt Önhöz még a főiskolán. Találtam otthon egy könyvet, amit Öntől kapott. [Megmutattam a könyvet.]

RS: Nagyon szép, egy csoda az a könyv.

J: Ebben is szerepel egy mérlegelős feladat, amikor n pénzérme közül szeretnénk megtalálni azt az egy hamisat, ami könnyebb a többitől. Ebben a könyvben már szerepel nagyon szépen és precízen a levezetése, bizonyítása ennek a feladatnak. Miközben nagyon hasonló feladatok szerepelnek az Ön köteteiben is, ahol meg inkább az élményszerűség jelenik meg. Olyan, minthogyha tényleg valamikor eljöhetne az a lépés a tehetséggondozásban, amikor már eljuthat a diák egy olyan szintre, hogy ezekről a feladatokról mélyebb matematikai gondolatokkal beszéljen.

RS: Közben kerestem egy könyvet a mérlegeléshez. Nekem sok fontosat mondott Pósa Lajos egyik előadása. A jó kérdés az, ami a gyereket érdekli. Az évek során változik a tanítás, hogy az ember mikor hogyan csinálja. Régebben én is úgy voltam, hogy ó, de szép példák, ezeket beviszem, és akkor lenyomom a torkukon. De nem az kell, hogy nekem szép legyen. Persze kell, hogy én szépnek találjam, de ahogy Pósa Lajos elmondja, olyan kérdés kell, ami a gyereket érdekli. Mert az őt lázba hozza, izgalomban tartja, kíváncsi, kutatni fogja és megnézi. Ha a gyereket nem érdekli, hogy miért kell annyi, akkor én ezt nem fogom neki elmondani mert elalszik közben, vagy mindenféle más dolgot fog csinálni. Ha érdekessé tudom tenni, érdekli, és tudom a választ, akkor ezt megnézzük. De ezek kellenek hozzá, és a legfontosabb az, hogy a gyereket érdekelje. A precízség a szakembereknek kell, hogy tudjam azt, hogy ennyi a határ, ennél kevesebbel vagy többel nem lehet. Amit mutatott könyvet, abban benne van az, hogy 12 golyóból a legnehezebbet meg kell találni 3 méréssel. Keleti Tamás ott tanít az egyetemen. Vannak ilyen visszaemlékezések, hogy hogyan vált valaki matematikussá. Keleti Tamás is ír a gyerekkoráról. Erről a feladatról mesél benne. Ezt sokszor láttam már, talán le is írtam. Szerintem meg tudnám oldani, de idő kell hozzá. Régebben a szakkörön az lehetett, hogy egy feladatot körbejártunk, abban gyönyörködtünk. Utóbbi években inkább az volt szakkörön (de azért vannak kivételek), hogy nézzük meg, megoldottuk, akkor menjünk tovább. Felgyorsult a tempó, mintha nem akarnánk annyira körbejárni. Vannak azért ellenpéldák. A mérlegelős feladatnak egyrészt fontos az élmény része, tehát az, hogy rájöttem. De azon, hogy háromból meg lehet oldani, de kettőből miért nem, ezen nem feltétlenül gondolkoznak.

Van most egy gyerek, Zsombor, ő most már hatodikos, de negyedikes korától kezdve ismerem. Valami csoda, olyan ötletei vannak. Akár hetekig egy-egy feladat él közöttünk, hogy arra rá kellene jönnünk. Például volt egy zrínyis feladat megyei fordulóban a vége felé, ahol 3 perc jut egy feladatra. Azon mi hetekig gondolkoztunk, és ilyen konstrukciókat gyártottunk, mint amiket kérdez. Egy 4×4-es táblázatba +1-et, -1-et és 0-t írok úgy, hogy bármely 3×3-as részben a kilenc szám összege 0. Tehát négy darab ilyen 3×3-as van. Ebben a táblázatban mennyi lehet legfeljebb a számok összege? Ott megvan az öt válaszlehetőség. Arra azért rájöttünk, hogy 8 nem lehet. Több nap után eljutottunk oda, hogy vagy négy, vagy hat. Néggyel megcsinálta Zsombor. És akkor a bizonytalanság megvolt, hogy a tizenhat szám összege lehetne esetleg több is, lehetne hat. Arra rájöttünk, hogy több nem lehet. Eltettük, hogy majd jövő héten folytatjuk. Én megcsináltam, azt hittem, hogy megvan hattal. Megírtam Zsombornak, aztán kiderült, hogy ha összeadjuk a számokat, az nem hat, hanem csak öt. De legalábbis mindenképpen jobb volt a korábbi négytől, amitől nem tudtunk elmozdulni. Egy pár napja írt, hogy megcsinálta a konstrukciót, megcsinálta hattal, és elmesélte hogyan. Néha egy-egy feladattal, amiről sokat beszélünk az van, hogy el tudnám mondani a megoldást pár perc alatt. Régen, szakkörön ez így is ment. De nagyon meg kell gondolni, hogy hatásosabb, ha nem úgy csináljuk. Sok időt el tudunk tölteni, és Zsombor feltesz kérdéseket. Egy feladatot nagyon körbejár, megnéz más változatban, amire én is hajlamos vagyok, de ő talán még inkább, alapból jön neki. Szóval van, akit ez érdekel, valakit meg csak az, hogy oldjuk meg és akkor megvan, kipipáltuk, rohanunk tovább.

Az élmény miatt van, hogy a feladat meg kell hogy ragadja az embert, valami kedvem legyen hozzá, hogy megoldjam. Később már ha nagyon jártas benne az ember, akkor érdeklik az részletek is, és próbálja tisztázni a környezetét a feladatnak. Szeretem, szerintem is jó könyv a 2000 feladat, mert rengeteg feladat van benne, meg elég jók a feladatsorok. Az úgy megmaradt, hogy amikor még 1000 feladat volt, tehát első megjelenés előtt, a Typotex Kiadó elküldte lektorálásra piaci szándékból a tanárképzőre. Nyilván, ha megismeri, meg lektorálja, akkor használni is fogja. Ettől függetlenül fontos a lektorálás, ilyen köröket meg kell tenni. Szegedről Pintér Lajos visszaküldte, ő nem lektorálta. Neki nem tetszett a könyv, az 1000 feladat. Értem, és igaza volt. Nagyon tisztelem őt. Mert, hogy ez nem Pólya szellemében van, amiről beszélgettünk. Ott nincsenek leírva a megoldások, nagyon ritka, hogy részletesen van leírva a megoldás. Ez nem Pólya szellemében van, ahogy Pólya leírta a könyvében, hogy látszódjon a felfedezés. Miért így csináltam? Miért így csináljuk? Hogy jövök rá? Ez a rész abban a könyvben nincs benne. Egyfajta felhasználás szempontjából praktikus és jó, egy másfajta ízlés számára ez nem egy hasznos könyv, és igaza van. Azt máig érdekes kérdésnek gondolom, és néha gondolkozok ezen, hogy ha nézem a racionális számokat, azok mindenütt sűrűek a számegyenesen, ugye az egész számokból képezett hányadosok. De nyilván nem fontos minden egész számot felhasználni. Ha szűkebb számhalmazt veszek, az azokból képzett hányadosok is mindenütt sűrűek lehetnek. Ezen gondolkoztam, hogy mi lenne, ha csak a négyzetszámokat venném. Igaz-e, hogy a négyzetszámokból képzett hányadosok a számegyenesen sűrűn helyezkednek el. Ezen azért gondolkoztam. Matektáborban voltunk, ott volt Zsolt, ő idősebb tőlem pár évvel, matematikus. Erdős Pállal több közös cikke van, diákolimpikon volt, tehát ő a csúcsokon van. Örülök, hogy ismerhetem. Zsoltnak elmondtam a feladatot, ő vagy egy napig gondolkozott rajta, és másnap elmondta nekem a megoldását, amire rájött. Én lassú vagyok, lassan értem meg. Nagyjából megértettem én ezt a megoldást, de igyekeznem kellett, hogy értsem. Ez tetszett. Akkoriban benne voltam a III. kategóriás OKTV bizottságban. Ott az egyik feladatunk az, hogy viszünk példákat, aztán majd valamelyik kikerül a versenyre. Javasoltam ezt a feladatot versenyre. A bizottság elnökével találkoztam, elmondtam neki a feladatot. Úgy adtuk volna fel, hogy igaz-e, hogy ha x, y pozitív számok, $x < y$, akkor van két olyan négyzetszám a^2 és b^2, hogy $\frac{a^2}{b^2}$ az x és y közé esik. Ez nem is egy bonyolult szövegezésű, könnyen érthető feladat. Ezt így feladhattuk volna. Másnap jött az elnök és fél sorban megcsinálta a megoldást. Megdöbbentő volt. Pár hónappal később megint valahol találkoztam Zsolttal, elmondtam neki az elnök megoldását. Perceken át kacagott, hogy ez mennyire egyszerű, és hogy nem látta rajta. Ez is egy szépsége a feladatoknak. A bizottságnak különben tetszett az ötlet. Azt tűzték ki, hogy négyzetszámok helyett olyan számokat veszek, aminek a tízes számredszerbeli felírásában 0 számjegy nem szerepel. Ezt is speciálisabban kérdezték, hogy az egy és kettő közötti intervallum egy szűkebb részében bármely két szám közé be lehet tenni két ilyen szám hányadosát. Csináltak rá megoldást, mert nyilván akkor tűzzük csak ki, ha meg tudjuk oldani. Nagyon küzdelmes bizonyítás lett. Abban bíztunk, amiben joggal lehet bízni egy döntős feladatnál, hogy majd a diákok megoldják, és akkor látjuk, hogyan lehet ezt szépen megoldani. Három vagy négy olyan döntős dolgozat volt, akik megfejtették, de azok sem voltak szépek. Amire számított a bizottság másodlagos haszonként, hogy hátha kiderül valami a feladatról, hogy miért vannak így a dolgok, és ha már mi nem tudtuk, akkor a versenyzők rájönnek, és lehet tovább valamit kezdeni ezzel, az ott akkor egy zsákutca volt. De ez a kérdés ez érdekes, és lehetne négyzetszámok helyett, hogy prímszámokkal veszem, azaz hogy prímek hányadosai mindenütt sűrűek. Mondjuk azt meg tudtam csinálni, és elégedett voltam, hogy ha olyan számokat veszek, amelynek nincs háromnál nagyobb prímosztója, ilyen egészeket veszek, ezeknek a hányadosai mindenütt sűrűek a számegyenesen. Az én megoldásom nem fél soros. Ezt is ki lehetne tűzni, belefér a tananyagba.

A feladatok izgalmasak, szép kérdések vannak. Ki kell deríteni sok mindent, minél többet megtudni róla. De már annak is örülünk egy konstrukciónál, ha van egy konstrukcióm. Pósa Lajos is beszél mérlegelős feladatokról az említett előadásban. Már én is változtattam azóta magamon. Nem azt mondom, hogy ezt öt mérésből csináld meg, hanem hogy minél kevesebb méréssel csináld meg. Mert akkor az egyik gyerek azt mondja, én megoldottam a példát, nekem megvolt héttel. Igaz, hogy Ödönke ügyesebb, ő megcsinálta hattal, de én is megcsináltam, van sikerélményem. Régen azt mondtam, hogy ennyivel kell megcsinálni, ennyivel csináld meg. Most már inkább úgy adnám föl és úgy adom föl (nyilván vannak kivételek), hogy minél kevesebbel vagy minél többel oldd meg. Amikor egy feladaton gondolkozom, akkor is ez van, hogy fokozatosan jutok el valahová. Vannak ilyen állomások. Megcsinálja ennyivel, ő már többel, meg nem kudarc élmény, hanem siker van.

J: Ezek szerint hozzátartozik az élményszerűség is ezekhez a feladatokhoz, hogy minél szívesebben nyúljanak hozzá a diákok, minél szívesebben foglalkozzanak vele.

RS: Az a legfontosabb szerintem. Kötelességből nem sokra lehet eljutni. Lehet valamennyit csinálni, de nem sokat.

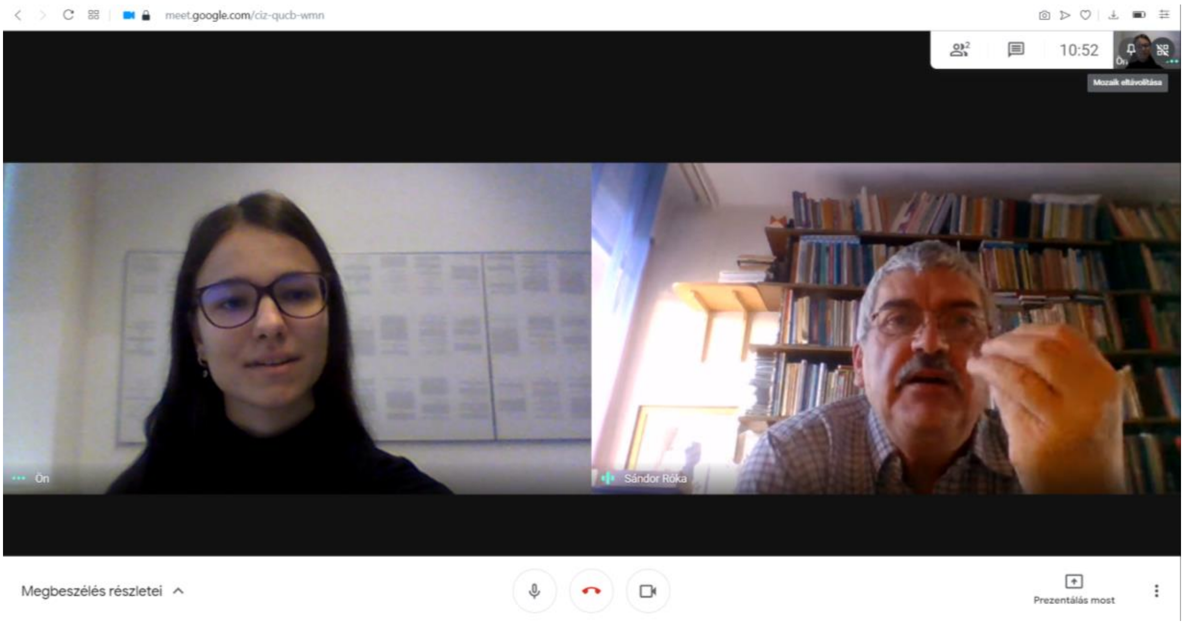
2. ábra: Róka Sándor tanár úrról az interjú alatt készült képkivágás a Google Meet beszélgetésből (Szenderák Júlia fotója)

J: Azt említette is, hogy vannak olyan feladatok, amiket többféle irányból meg lehet közelíteni, nagyon sokféle újabb feladat merül fel ezek kapcsán az emberben. Mennyire fontos itt a megfogalmazás? Nagy szerepe van annak, hogyan tűzünk ki egy feladatot, ahogy azt említette is. Például szerepeltek olyan feladatok, amikor át kellett kelni a sivatagon. Ott van mikor azt kérdezzük meg, hogy meddig tud eljutni, van mikor azt kérdezzük meg, hogy hogyan tud addig a pontig eljutni. Ön szerint mi lehet a szerepe itt a megfogalmazásnak?

RS: Azt kérdezem, hogy meddig, vagy azt, hogy hogyan, az részemről véletlenszerű. Mikor így kérdezem, mikor úgy kérdezem. Ha azt kérdezem, hogy meddig, ha megmondja, hogy mondjuk 100 kilométerre tud eljutni, azért azt meg kell magyarázni, hogy hogyan. Valahogy ez a kettő mintha együtt járna. De az, hogy a kérdéseket hogy teszem fel, az fontos.

Vannak a Pósa táborok. Egyszer egy ilyen hétvégi táborba elmehettem megfigyelőként, de volt még egy másik tanárkolléga hasonló szerepben érdeklődésből. Pósa másképp teszi fel a kérdéseket, mint ahogy mi matektanárok szoktuk. Tetszik ahogy ő teszi fel. Mondok egy példát. Ez egy jó feladat, én ezt használtam főiskolán amikor informatikusokat tanítottam. Ott ez egy jó példa volt, mert átvettük a permutációt, variációt, tehát a képletek megvoltak. Ott lottós, totós feladatok is szoktak szerepelni. Ez a feladat a következő: legkevesebb hány háromesélyes totószelvényt töltsek ki a tizenhárom tippes totószelvényen, hogy biztosan legyen legalább 5 találatom. Itt a feladatnál jöhetnek a képletek, ott van a feladatban az 5, a 13, a három esély miatt a hármas szám. Ott látok három darab számot, jön, hogy melyik képletet használjam. Nem tudom miért használom, de használom. Átesik egy ilyen kudarcon, hogy nem úgy kell feladatot megoldani, hogy itt van ez a képlet, kisorsoltuk őt. Mert ezt a feladatot nem így kell megoldani. Szerintem Pósa úgy is szokta, hogy a résztvevőket állásfoglalásra bíztatja, milyen várakozásokkal indulnak. Ki gondolja, hogy száznál több szelvény kell? Ki gondolja, hogy tíznél több? Volt régen ilyen vetélkedő, hogy Ki miben tudós?, a fél ország ismerte, könyv is van belőle. Ezen a versenyen szerepelt ez a feladat. Ezt a feladatot egy matektanár így kérdezi meg: egy tizenhárom tippes totószelvényből hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen egy legalább öt találatos. Pósánál is hallottam már ezt a feladatot. Ő így kérdezi: Jancsi szereti Juliskát, de Juliska kéreti magát. Azt mondja: rendben Jancsi, hozzád megyek feleségül, ha felmutatsz nekem egy olyan totószelvényt, amelyiken van legalább öt találat. Igen ám, de Jancsi spórolós.

Hány szelvényt töltsön ki Jancsi, hogy elnyerje Juliska kezét. Akik versenyfeladatokat oldanak meg, őket ez a körítés vagy érdekli, vagy nem. De egy szélesebb körben ez sokkal jobban leköti őket, mintha elmondtam volna azt a példát. Át se gondolja. Ezen elgondolkozik, azon meg nem. Szóval a feladatoknak a szövegezése kapcsán a kérdés nemcsak az, hogy meddig vagy hogyan, bár az tartalmilag nagyon fontos. De hogy milyen köntösben mondom el, hogy érdekessé tegyem számára, az persze fontos. Pósánál a feladatok többnyire ilyenek, hogy nem egy lecsupaszított feladatot mond el, hogy oldd meg ezt az egyenletet, hanem van egy sztori, ami izgalomba hozza az embert.



3. ábra: Róka Sándor tanár úrral az interjú alatt készült képkivágás a Google Meet beszélgetésből (Szenderák Júlia fotója)

J: Mit gondol arról, hogy ezek a sztorik, amikbe beleágyazzák ezeket a feladatokat, meddig maradhatnak meg? Úgy értem, hogy egészen nagyon magas szintig megtarthatjuk ezt a történetet és játékosságot a feladat körül?

RS: Amikor ilyen mese van hozzá, az később is egy vonzerőt tud adni. Ha én is elmondom ezt a két nyolcas két hármasból huszonnégyet, ha csak így mondom el, akkor az más hatást vált ki, mintha elmondom, hogy én mennyit küzdöttem vele. Akkor kíváncsivá teszi őt is, na hogy ha neki ennyi volt, akkor nekem esetleg jobban sikerül. Ha a feladatoknak van háttere, az különféle lehet, nem feltétlenül Jancsi és Juliska van benne. Bármilyen háttere lehet, mondjuk ők már megcsinálták, ők mennyit küzdöttek vele és nem tudták. Ha jobban ismerem, többet tudok a feladatról, akkor jobban kötődök hozzá.

De a mese az nyilván idősebb korban általában nem szükségszerű. De az, hogy milyen hatást váltok ki, az fontos.

Én nem készültem tanárnak. Matematikus szakon végeztem Debrecenben, csak akkoriban mindig rábeszéltek néhány hallgatót, hogy vegye fel a tanárszakot. Így nekem is van tanári diplomám, de alapból én nem gondoltam, hogy tanítani fogok. A tanár tényleg ahogy Pólya is írja, olyan, mint egy színész. Nem úgy, hogy színészkedünk, hanem át kell élnem, hatást kell kiváltanom belőle, fel kell csigáznom, fel kell piszkálnom. A feladatot valahogy érdekessé kell tennem. Vagy így, vagy úgy, de valahogy, hogy ne a szomszédját piszkálja, hanem ezzel foglalkozzon.

J: Tudna esetleg egy kicsit mesélni még a tehetséggondozásról? Már nagyon régóta foglalkozik tehetséges diákokkal. Mik a tapasztalatai? Hogyan változott az érdeklődésük az évek alatt? Mit gondol arról, hogyan változik a felépítése a tehetséggondozásnak? Mit csinál másképp, mint korábban? Azt említette már, hogy egészen más ritmusban állnak hozzá ezekhez a feladatokhoz mostanában a diákok, mint korábban.

RS: Nyilván változik mindig az élet. Eszembe jutott még egy húsz évvel ezelőtti változás. A diákolimpiai csapat vezetőjét nagyon szerettük, tiszteltük. Ő mondta azt, hogy meglepődve, vagy szomorúan tapasztalja azt, hogy a diákolimpikonok többsége már nem matematikus szakra megy. Egyfajta változás biztos, hogy van. Negyven évvel ezelőtt a diákolimpikonok, tehát a versenyzők legjobbjai elmentek az ELTE-re TTK-ra matematikus szakra. Külföldre akkor még nem. Már a 90-es években matematikus szakra csak egy-kettő ment közülük. A többi elment informatikusnak, mérnöknek, ilyesmiknek. Amúgy ez rendben van. Én is a szakköröseimnél nem arra számítok, nyilván a gyerekek döntenek, meg az ő sorsuk. De én sem úgy gondolok a szakkörre, hogy na majd ti érettségi után mentek matekos pályára, matematikusnak vagy matektanárnak. Az, hogy valaki matekból versenyez, vagy versenyekre készül, abban nagyon sok jó dolog van. Ez nem azt jelenti, hogy ő a matekos életpályát fogja választani.

Köszönöm, hogy engem kérdez ezekről. Nyilván bármelyik tanár sok mindent megélt az évek alatt, és tudnának mesélni. Nem az, hogy nagy bánat volt, de mégiscsak ilyen frusztráló érzésként, hiányérzetként van, hogy itt Szabolcsból, a szakköröseim közül egy sem lett diákolimpikon, egy sem lett Kürschák győztes. Voltak nagyon jó versenyeredményeink OKTV-n, Arany Dániel Matematikaversenyen, az országos versenyeken dobogós helyeink azért voltak. De a király kategóriában, tehát Kürschák és diákolimpia, ott nem. Szabolcsból nem az, hogy nem az én diákjaim, hanem amúgy sem voltak az elmúlt ötven-száz évben. Csak úgy voltak diákolimpikonok, hogy nyolcadikig itt jártak iskolába, aztán nyolcadik után elmentek a Fazekasba leginkább. Ezt nem sikerült összehozni nekem sem, Kiss Sándornak sem. Nyíregyháza egy nagyobb város, ha úgy vesszük. Ennél kisebb városokban, például Hajdúszoboszlón, ami negyedakkora, vagy Bonyhádon diákolimpikonokat, Kürschák díjazottakat neveltek fel többet Katz Sándor és Deli Lajos tanár urak. A tehetséggondozásban biztosan vannak olyan titkok, amik ezt magyarázhatják. Miért van az, hogy ők ezt meg tudták, mi meg nem tudjuk? Ez nyilván lehet az is, hogy ha helyet cserélnénk, ő megcsinálná itt, én meg nem csinálnám meg ott. Nemcsak az eredmények vannak meg, hanem valóban meg is érdemlik ezt az eredményt.

Változik az iskola is. A mostani fiatalok lényegesen másak, más a környezet. Régen azért lassabb volt az élet, nem voltak kihívások. Amíg nem volt például számítógép, addig nem volt versenytárs. Ha valakit ilyesfajta dolgok érdekeltek, az elment matematikusnak. Aztán már az informatika csúcsokon jár és nagyon izgalmas. Ahhoz is matek kell, tehát aki jó matekból, az persze, hogy érdekesebbnek találja. Régen más volt a versenyzés is, meg az iskolai terhek is sokkal lazábbak voltak. Volt ideje matekozni, volt a KöMaL példákon gondolkozni. Most hiába volna kedve mondjuk hozzá, azért kapja rendesen az iskolából, hogy ezt is azt is meg kell csinálni, és nem jut ideje rá. A körülmények nagyon megváltoztak. Kevesebb idő jut a matekra.

J: Amikor előkerül egy-egy ilyen különleges gyerek, mint Zsombor, akit említett, akkor ezeket a kérdéseit akkor körüljárják? Erről a 4×4-es táblázatról is, amikor beszéltek, azt említette, hogy akkor rengeteg kérdés merült fel benne ezzel kapcsolatban. Olyankor van, hogy rengeteg időt töltenek azzal, hogy a feladat kapcsán felmerülő kérdéseit megválaszolják?

RS: Így van. Zsombor egy élmény számomra. Így történik, tehát nem az, hogy megoldottuk, akkor menjünk a következőre. Ha valamit még el akarok mesélni róla, azt nyugodtan elmesélem, mert érdekli is, de ő jön a kérdésekkel, és akkor megnézzük ezt azt amazt. Nagyon jó. Nyilván mindig vannak ilyen fiatalok, ez jó. Én is másképp tanítok, mint régebben. Régebben az volt, hogy én ezt tudom, én ezt elmondom, és akkor érdekeljen benneteket. Most meg azt nézem, vajon érdekli-e őket. Nem az, hogy én elmondom, hanem ti jöjjetek rá lehetőleg minél jobban, hagyok arra időt.

V.3. Levél Róka Sándor tanár úrtól

Az interjút követően a tanár úr az alábbi gondolatokkal egészítette ki email formájában a beszélgetés során elhangzottakat:

„Miről szól a matematika tanítása? Attól függ, hogy mi a célunk és kiket tanítunk.

Az iskolában adott a tananyag, és adott a tempó, hogyan kell haladni. Ott a trükköket kell elmondani, begyakoroltatni. Aki itt lemarad, az lemaradt. Sokan feladják, ezt azt néha megértenek az órai történésből, nekik inkább frusztráció az óra. Vannak nehézségek. Hogyan ébresszünk érdeklődést a tanulókban? Nyugodtan alszik attól, hogy nem ismeri a megoldóképletet, és érettségi után a logaritmust vagy a kör egyenletét soha nem fogja használni. Akkor most miért tanulja meg ezeket? Nagy kihívás, hogyan motiváljam az osztályt. Érdekes feladatokat kell mutatnom, kíváncsivá tenni őket, hogy várják a matekórát. Ahogy Seherezádé tette a meséivel, a szultán türelmetlenül várta a folytatást ezeregy éjszakán át. Könnyű ezt mondani.

Más úgy tanítani, ha nem a vizsga, az érettségi vagy az évvégi jó jegy a cél, hanem az, hogy feladatokat oldozgatunk, keressük a megoldást. Ekkor van idő a gondolkodásra. Szeretem az ilyen helyzetet. Nagy élmény megérteni mi történik a világban, a történések okát. Gondolkodni öröm. A matematikatanítás jelentheti ezt is. Taníthatunk képleteket, szabályokat, hogy ha így és így csinálod, akkor megoldod a feladatot. Szerintem érdekesebb azt megtanulni, hogyan találok utat a célhoz. Ez a hasznos tudás, nem a megoldóképlet ismerete. Taníthatunk így, hogy veszünk egy érdekes problémát, és szeretem azt, ha az nekem is ismeretlen. Néha a szöveg megértésén is dolgozni kell, hogy megvilágosodjon miről van szó. Sokszor ez az első fontos állomás, világossá tenni a problémát. Kérdéseket teszünk fel, kóstolgatjuk a feladatot. Utakat járunk be a feladat változataihoz, például könnyebb esetekhez. Nem adom fel. Küzdeni kell. Együtt örülünk, amikor látszik a fény az alagút végén. Én nem vagyok tolakodó, hagyom járja a saját útját, akkor is, ha tudom, hogy az zsákutca. Majd rájön a tévedésre, és visszafordul. Van úgy, hogy én is aktív vagyok, közösen keresgéljük a megoldáshoz vezető utat. Ha már megoldottuk, akkor megbeszéljük a tapasztalatokat, mi volt a nehéz ebben, mi segített a megoldáshoz. Régebben nem így tanítottam, öntöttem rájuk a trükköket, bólogattak, megértették, és ez látszott is akkor, hihető volt, de pár hét múlva alig emlékeztek rá.

Most jobban is értem azt, hogy harminc évvel ezelőtt miért nem tetszett Pintér Lajos tanár úrnak az 1000 feladat az elemi matematikából könyv kézirata, és nem vállalta a lektorálását. Ízlése szerint másképp kell a matematikát tanítani, nem így. Ilyesmi lehetett a visszautasítás oka.

(Én csak távolról ismertem Pintér Lajost, sokaktól tudom mennyire jó tanár volt. Például Csete Lajos tanár úr tudna róla mesélni.)

Szeretnénk megérteni a világot, annyi kérdés van … Hogyan viselkedünk a karanténos világban. Magunkat megfigyelni, megérteni. Válaszokat keresünk, például arra, hogy a választásokon hogyan szavazzunk. Itt vannak a kérdések, és nagyon fontos, ha tudunk jó kérdéseket megfogalmazni. Mit jelent az, hogy Bence okosabb, mint Máté? Mit jelent az, hogy megtanultam valamit, például egy verset? Vannak jó kérdések, és vannak értelmetlen, hibás kérdések.

A matematika tanítása ezekben segíthet, segítséget ad a gondolkodáshoz. Ahhoz, hogy megértsek egy helyzetet. Lássam, hogy amit egy politikus mond, az nem magyarázat egy kérdésre, hanem ködösítés. Matematikában a szavak jelentése pontos, egyértelmű. Minden háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik – ez világos, mindenki ugyanúgy érti. Míg egy verssort ezerféleképpen érthetünk, a hangulatunktól is függ ez.

Szerintem ez az egyik nagy haszna a matematika tanulásának, hogy a gondolkodásunk ügyesebbé válik. Keressük a miérteket, a magyarázatokat, látjuk, mikor bizonyított egy állítás. Descartes egy életen át kereste a gondolkodás szabályait, hogyan juthatunk igaznak gondolható állításokhoz. A matematika problémáin gondolkodva mi is ezt az utat járjuk.

A gondolkodásunkat tudjuk jobbá tenni. Legyen kitartásunk, küzdjünk, nem adjuk fel. Ha zsákutcában járunk, tudjuk elengedni. Legyenek kérdéseink, ötleteink a probléma vizsgálatához. Nagyon jó a közös gondolkodás, hozzá szokhatunk ehhez, megtanuljuk ennek a módjait."