

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

---

Pártos Boglárka

# NUMB3RS A KÖZÉPISKOLÁBAN

TDK

Témavezető:  
Szabó Csaba  
Egyetemi tanár

Budapest, 2011.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés, célkitűzés</b>	<b>3</b>
1.1. Motiváció . . . . .	3
1.2. A Gyilkos számokról . . . . .	4
1.3. A matematikatanítás fontossága . . . . .	5
<b>2. Matematikuskép</b>	<b>6</b>
<b>3. Matematikai tartalom - Steiner-fák</b>	<b>8</b>
<b>4. Feladatok</b>	<b>11</b>
4.1. Euklideszi geometria . . . . .	11
4.2. Taxis geometria . . . . .	19

# 1. Bevezetés, célkitűzés

## 1.1. Motiváció

A matematika tanításának alapvető, de mégis egyik legnehezebb feladata a tanulók érdeklődésének felkeltése.

Az érdeklődés hiánya legtöbbször a meg nem értésből származó kudarcélményekből fakad, hiszen a sorozatos kudarcok az önmagukkal szembeni elvárások, igény szintjük csökkenéséhez, így érdeklődésük elvesztéséhez, egyfajta érzelmi elutasításhoz vezetnek [1]. Ezt az érzelmi elutasítást azonban nem lehet értelmi szinten feloldani (például az anyag rész fontosságának, gyakorlati hasznának hangsúlyozásával), hanem sikerélményekre, pozitív visszacsatolásra, megerősítésre van szükség.

Kurt Lewin szerint a tanuláskor egy konfliktus keletkezik, amely abban áll, hogy egy régi szokás, viselkedés, hozzáállás feladására és újabbak elsajátítására van szükség. Az egyén ugyanis (nem feltétlenül tudja, hogy) érzelmileg ragaszkodik a szokásos viselkedésmintákhoz, azok elhagyása bizonytalanságérzetet okozhat. Ezzel az érzelmi szinttel szemben kevésbé hatásos olyan észérvek hangoztatása, hogy az új módon könnyebben tud majd megoldani problémákat amelyeket nem is ismer, nemhogy a jelenben hajlandó volna erőfeszítéseket tenni a valamikor előadódó problémák megoldásáért. A változtatási hajlandóság növelésére alkalmasak a problémaszituációk, amelyekben maguk a tanulók ismerik fel, hogy a régi eszközrendszer nem eredményes, de fontosnak tartják a probléma megoldását. Ilyen megmozdító élmény származhat a tanuló saját korábbi tapasztalatából, vagy olyan személytől, akit a tanuló elfogad (és követendőnek tart). A saját élmény szempontjából fontos az „optimális kihívás”, azaz érzékelhető a problémajelleg, de nem reménytelen a megoldás. Nem pusztán sikerélmény, hanem a legyőzött nehézség élménye növeli a motivációs szintet a problémamegoldásban. [27]

Egy tantárgy iránti érdeklődést azonban nem csak az iskolában szerzett tapasztalatok, hanem a társadalom és a külvilág is befolyásolja. Sajnos társadalmunkban a matematikáról élő kép meglehetősen negatív. Általános megfigyelés, hogy a matematika szó hallatára a legtöbb embert kirázza a hideg, csodálkoznak, és felnéznek arra az emberre, aki matematikával foglalkozik, vagy az iskolában szerette ezt a tárgyat. Nem csoda tehát, ha ilyen közvetlen környezetben felnövő gyerekek hozzáállása is hasonló lesz. A külső hatások egy másik fontos tényezője a manapság egyre nagyobb teret nyert média, mely felettébb nagy hatással van a mai gyerekekre. Így az érdeklődés felkeltésének (eddig kevésbé kihasznált) eszköze lehet például a médiában megjelenő matematikai tartalmak felhasználása, tanórákon, szakkörökön, népszerűsítő előadásokon való alkalmazása. Egy-egy alapjában véve szórakoztatásra, kikapcsolódásra szánt, értékes matematikai tartalommal bíró film vagy sorozat tanórai keretek közötti bemutatása és feldolgozása érdekes lehet, a különlegesség erejével hathat.

Az érdeklődés felkeltése mellett azonban fontos, hogy az eredetileg érdeklődőknek, jó úton haladóknak se okozzunk kárt. Gyakori probléma köreikben, hogy hiába értik az adott anyagrészt, nem látják gyakorlati hasznát. („Soha senki nem tanul meg semmit, aminek nem érzi fontosságát.” Carl Rogers)

Mindezeket figyelembe véve kiváló lehetőségnek tartom a Gyilkos számok című krimisorozat matematika órán, szakkörön való bemutatását, egy-egy rész feldolgozását, hiszen a filmben felmerülő probléma matematikai modelljének megoldása nem csak érdekes, sikerél-

ményt is jelenthet, növelheti a motivációs szintet, és a matematika gyakorlati alkalmazásaira hívja fel a figyelmet. Dolgozatom célja, hogy támpontot nyújtsak ezen film oktatási célra való alkalmazásához.

## 1.2. A Gyilkos számokról

A Gyilkos számok, eredeti címén Numb3rs egy világszerte ismert amerikai krimisorozat. Az Egyesült Államokban 2005-től 2010-ig futott a CBS csatornán az American Broadcast Company [2] felmérése szerint átlagosan 10 millió fős nézettséggel. Magyarországon a TV2-n láthatjuk 2006 óta. Hat évada készült el, 118 résszel. Főszereplői Don Eppes FBI-ügynök és matematika-zseni öccse, Charlie. Don csapatának minden részben egy-egy újabb bűnügyet kell megoldania, melyben nagy segítségükre van Charlie, aki matematikai modellek felállításával oldja meg az eseteket. A matematika számos területét mutatja így be. Előkerülnek például a valószínűségszámítás, játékelmélet témaköre mellett differenciálegyenletek, geometriai és gráfelméleti problémák is. Segítségükre van még a kissé hóbortos fizikaprofesszor, Charlie jó barátja, Larry Fleinhart, és Charlie egyik tanítványa, Amita Ramanujan is. A testvérpár mindennapjait általában három szinten figyelhetjük meg, az FBI-nál, a bűnügy nyomozása közben; Charlie munkahelyén, a kitalált Californian Institute of Science; illetve a családban, édesapjukkal, a mérnök Alannel. Mindhárom helyen gyakori téma a matematika.

A sorozat számos díjat nyert, például 2006-ban a Carl Sagan Award for Public Understanding of Science, majd 2007-ben a National Science Board úgynevezett Public Service díját. [3]

A matematikai részek kidolgozásához több matematikus is segíti a forgatókönyvírók munkáját, matematikailag korrekt minden amit a táblára írnak [6], [7] szerint is. Az Egyesült Államokban többen is foglalkoznak a sorozatban szereplő matematikai tartalom részenkénti feldolgozásával, bemutatásával, viszont ezek gyakran hiányosak, vagy adott esetben nem arról szólnak ami a konkrét részben ténylegesen szerepelt [4], [5].

*„Minden nap használjuk a matematikát. Megjósoljuk az időjárást, mérjük az időt, kezeljük a pénzünket. A matematika több mint képletek és egyenletek. Ez tiszta logika, racionalitás. Az emberi elme a legnagyobb rejtélyeket oldja meg a segítségével.”* – Már a bevezetőben, minden rész elején a matematika gyakorlati alkalmazásaira, hasznosságára hívják fel a figyelmünket. Pontosan azt a sztereotípiát cáfolja meg, ami a legtöbb emberben riasztó képként él a matematikáról, hogy ez a tudomány nem más mint bonyolult képletek és egyenletek összessége.

Munkám során először azt vizsgálom, hogy a sorozat milyen képet állít a matematikáról, a matematikusokról, hiszen ez is nagyban befolyásolja a néző hozzáállását a konkrét matematikai tartalomhoz. Szimpatikus szereplőgárda, izgalmas történet sokkal inkább felkelti az érdeklődést a matematikai mondanivaló iránt is. Ezt követően egy konkrét részben (2. évad 19. rész) bemutatott témakört dolgozunk fel, a gráfelmélet egy híres problémakörét, a Steiner-fákat, melyek nemcsak hogy jelentős gyakorlati alkalmazásokkal bírnak, érdekesek is, és alapjaik a középiskolában is bemutatathatók. Mindenekelőtt azonban felmerül a kérdés, hogy miért is fontos matematikát tanulni, megértetni és megszerettetni a diákokkal.

### 1.3. A matematikatanítás fontossága

A jó módszerű matematikatanítás kialakításának fontossága megkérdőjelezhetetlen. Az élet minden területén szükségünk van arra, hogy gondolatainkat rendezetten, logikusan legyünk képesek interpretálni, érvelni tudjunk álláspontunk mellett, vitában képesek legyünk rugalmas, a másik álláspontját mérlegelő magatartásra. Mindezeknek a képességeknek a kialakításához és fejlesztéséhez a tantárgyak közül talán az egyik legnagyobb hatásfokkal járulhat hozzá a jó módszerű matematikatanítás.

Az iskolai matematikaoktatás célja a Nemzeti Alaptanterv alapján nemcsak egy egységes és hiteles kép kialakítása a matematikáról mint tudásrendszerrel, hanem a matematikai gondolkodás területeinek fejlesztésével a gondolkodás általános kultúrájának színesítése. Mindezt az a folyamat biztosítja, melynek során fokozatosan kiépítjük a matematika belső struktúráját (fogalmak, axiómák, tételek, bizonyítások elsajátítása), és a tanultakat változatos területeken alkalmazzuk.

„A matematikatanítás továbbá érzelmi és motivációs vonatkozásokban is formálja és gazdagítja a személyiséget.” Hozzásegíti a tanulót a helyes tanulási szokások kialakításához és megerősítéséhez. A célszerű, új fogalmak alkotása, az összefüggések felfedezése és az ismeretek feladatokban való alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a kreativitást, a problémahelyzetek önálló, megfelelő önbizalommal történő megközelítését, megoldását. Ezenfelül sokoldalú eszközökkel fejleszti a tanulók matematizáló, modellalkotó tevékenységét, kialakítja a megfogalmazott összefüggések, hipotézisek bizonyításának igényét, megmutatja a matematika hasznosságát, belső szépségét, az emberi kultúrában betöltött szerepét. Fejleszti a tanulók térbeli tájékozódását, esztétikai érzékét is. [19]

A matematika továbbá más szakterületek elsajátításához is nagyban hozzájárul. A maga hagyományos és modern eszközeivel segítséget ad a természettudományok, az informatika, a technikai, a humán műveltségterületek, szakközépiskolákban a választott szakma ismeretanyagának tanulmányozásához, a mindennapi problémák értelmezéséhez, leírásához és kezeléséhez. [19]

Nem véletlen tehát, hogy a matematikaórák teszik ki az iskolai órák átlagosan 15%-át, továbbá kötelező érettségi követelmény, a legtöbb felsőoktatási intézmény szakán megjelölt felvételi tárgy, mitöbb a munkaerőpiac is igényli a matematikai kompetenciákat.

Dolgozatom összeállítása során igyekeztem figyelembe venni a Nemzeti Alaptanterv szempontjait is, mely a tanításban előtérbe helyezi a készségek, képességek, úgynevezett matematikai kompetenciák kialakítását és fejlesztését. „A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás fejlesztésének és alkalmazásának képessége, felkészítve ezzel az egyént a mindennapok problémáinak megoldására is. A kompetenciában és annak alakulásában a folyamatok és a tevékenységek éppúgy fontosak, mint az ismeretek. A matematikai kompetencia - eltérő mértékben - felöleli a matematikai gondolkodásmódhoz kapcsolódó képességek alakulását, használatát, a matematikai modellek alkalmazását (képletek, modellek, struktúrák, grafikonok/táblázatok), valamint a törekvést ezek alkalmazására.” [19] A feladatsorok kialakítása közben igyekeztem szem előtt tartani ezeket az elveket, hogy fejlesszék például a modellalkotási, absztrakciós, szintetizáló képességet, kreativitást, a gyerekek önálló tevékenységgel sajátíthassák el az ismereteket.

## 2. Matematikuskép

A gyerekek pályaválasztásában, de már tanulásában és érdeklődésében is igen fontos szerepet játszik, hogy milyen kép él bennük az adott szakmáról illetve tárgyról. Ezt elég gyakran a társadalomban élő sztereotip kép befolyásolja. Napjainkban például sok fiatal szeretne színész, sztár, vagy a ma divatos kifejezéssel élve celeb lenni, hiszen amit a televízióban, újságokban, interneten róluk látnak, az sok esetben vonzó, hogy híresek, gazdagok, és sokan szeretik őket. Nem ilyen pozitív a kép azonban a matematikusi hivatásról. Ezt számos felmérés, közvélemény-kutatás egybehangzóan mutatja. Rensaa [8] cikkében írja például, hogy az általa készített felmérésben, melyben a tudósok kinézetéről, tulajdonságairól kérdezett, az emberek körülbelül 70 százaléka szerint a tudós szemüveges férfi. Többségük szerint idős vagy legalábbis középkorú, egyedülálló, régimódi, unalmas, és antiszociális. A válaszadók csupán 20 százaléka tartotta a tudóst átlagosnak, aki nem különbözik más szakmabelitől. Ilyen, és ehhez hasonló tudományos igényű vizsgálatokat már a múlt század közepétől végeztek a tudósok társadalomban élő képéről. Például Mead és Metraux [9] 1957-ben publikált kutatása is mintegy 35000 középiskolás esszéjének feldolgozásán alapult. Ezek is mind ugyan azt, a nem éppen előnyös sztereotip képet mutatják.

Napjainkban már rajzos felméréseket is publikálnak. D. W. Chambers például kidolgozott egy módszert (DAST, Draw A Scientist Test), melyben több mint 4800 gyermekkel rajzoltattak képet „a tudósról”. Ezekből kiderül, hogy számos jellemző kapcsolódik a gyermek gondolkodásában tudóshoz, mint például a fehér köpeny, szemüveg, ceruzák, tollak, számítógép vagy tábla, továbbá a tudás szimbólumaiként könyvek, könyvespolcok, a tudomány megjelenítéseként bonyolultnak tűnő, legtöbbször értelmetlen, vagy pedig triviális képletek. Szinte mindenki férfi tudóst rajzolt, a lányoknak is csak alig több mint egy százaléka nőt. A képeken a tudós szinte mindig egy szobában, vagy laboratóriumban dolgozik, általában pincében vagy alagsorban. Későbbi, továbbfejlesztett vizsgálatok, mint például Odell, Hewitt, Bowman és Boone [14] DAST vizsgálata, vagy Rampal kezdő tanárok tudósképét vizsgáló kérdőíve [11] tovább árnyalták a képet, további jegyeket adtak a sztereotip matematikusképhez. Ezek szerint a matematikus jól érzékelhetően briliáns elme, gyakran elgondolkozik, érzelemmentes, nemtörődöm, hiányzik belőle a szociális érzék, és némiképp elesettnek tűnik. Egyéb kutatások folytak továbbá (például Schebeci és Sorensen [12]), hogy mennyire tér el az egyes népcsoportokban a tudósról alkotott kép. Ezek mind azt támasztják alá, hogy kevésbé. Sorensenék, illetve Finson [15] is azzal magyarázza ezt, hogy a sztereotip képet jelentősen a média alakítja, és a világ bármely részén az emberek hasonló filmeket néznek.

Ebből is láthatjuk tehát, hogy az emberekben a matematikusokról, illetve általában a tudósokról alkotott képet is igen erősen a média befolyásolja. H. Türkmen 2006-os [13] felmérésében például az ötödikes gyerekek 45,3 százaléka tartotta fontosnak illetve nagyon fontosnak a médiát abból a szempontból, hogy milyen mértékben származik onnan az információja arról, hogy milyenek a tudósok. Ez nagyon is érthető, hiszen sokan soha nem találkoznak matematikussal, csak matematikatanárokkal, de az messze nem ugyan az, hiszen a feladatkörük is teljesen más. Berry és Picker is [16] cikkükben vizsgálták és kimutatták, hogy a tanulók általában nem tekintik matematikusnak matematikatanárukat.

Fontos tehát azzal a kérdéssel foglalkoznunk, hogy a különböző filmek milyen képet állítanak a matematikusról. Wilson és Latterell 2001-es cikkében [10] számos irodalmi művet és filmet sorol fel, amelyekben matematikus szerepel. A kutatásukba bevont művekben a matematikus többnyire zavart, néha örült. Ez részben a létező sztereotípiákból, az íróban

élő tudósképből adódik, részint abból, hogy a filmben a tudós személyisége, lelki alkata, betegsége a konfliktus forrása.

A gyilkos számok viszont egy merőben új képet mutat a matematikusokról, a matematikuslétről mind Charlie, mind Amita személyében. A matematikazseni Charlie (David Krumholtz) fiatal, jóképű, energikus fiú. Nem visel szemüveget, se fehér köpenyt, normális ruhákban jár, sok barátja, még barátnője is van. Ezek már önmagukban is szöges ellentétben állnak az elképzelt antiszociális, elesett, érzelemmentes tudósfigurával.

Charlie közvetlen, szinte mindig jókedvű. Matematikazsenialitása már kiskorában megmutatkozott, háromévesen négyjegyű számokat szorozott össze, és már tizenhárom évesen felvették a Princetonra [29]. Gyakran hangsúlyozzák is a sorozatban, hogy nem mindennapi elme, az FBI irodában is mindenki felnéz rá, csodabogárnak tartják, az egyetemen pedig sokan féltékenyek rá. A matematika népszerűsítése szempontjából ez nem túl előnyös, hiszen azt sugallja, hogy ahhoz hogy valaki értse a matekot zseninek kell lenni. Ott van viszont Amita (Navi Rawat), kezdetben Charlie tanítványa, később barátnője, majd felesége, aki egy teljesen átlagos, csinos fiatal lány. Ez is egy szokatlan képet állít a néző elé, hogy léteznek matematikusnők is, még hozzá nem furcsák és elesettek. Gyakran dolgoznak együtt Charlie-val, segítik egymást ötletekkel, tanácsokkal, hiszen a matematikát nem feltétlenül magányosan, egyedül egy alagsori szobában kell művelni mint ahogyan azt sokan gondolják a felmérések szerint.

Charlie kiemelkedően okos, de nem tévedhetetlen. Gyakran nem vesz számításba egyes eshetőségeket, vagy rossz úton indul el, ez is azt mutatja, hogy még egy zseni is hibázhat, tévedhet. Szimpatikus lehet Charlie megformálásában, hogy mindig mindenhol mindenkinek lelkesen beszél matematikáról, látszik, hogy szereti amit csinál, és ezt szívesen át is adja, szemléletesen magyaráz, megnyeri mind a filmbeli FBI-os közönséget, mind az otthon ülő nézőket.

A sorozatot nézve feltűnhet, hogy a filmbeli matematikusok, tudósok gyakran egymás között is matematikáról vagy más tudományról beszélgetnek, ez egy állandó témát, összetartó erőt jelent a szakmabeliek között, ilyen témákról nyíltabban beszélnek egymással.

Charlie legjobb barátja, Larry Fleinhardt (Peter MacNicol) már inkább hasonlít a „tipikus” tudóshoz. Nem igazán van a fizikán kívül más témája, kissé szórakozott, nem mindig tudja éppen melyik városban van, vagy például éppen kijött a könyvtárból vagy be akart menni. Okoskodó, tudálékos viselkedésével inkább hasonlít a sztereotip tudósképhez. Ettől függetlenül azonban sokat segít Charlienak mind kutatásaiban, mind a bűnügyek megoldásában.

Mindent összevetve a Gyilkos számok által sugallt újszerű matematikuskép egyértelműen pozitív. Fiatal, szimpatikus, szerethető karaktereivel, a tudományos tartalmak szemléletes bemutatásával közelebb hozza a nézőkhöz mind a matematikát, mind a matematikusi hivatást.

### 3. Matematikai tartalom - Steiner-fák

Meggyőződésem, hogy a matematika népszerűsítésére kiváló lehetőséget, kiindulási alapot biztosít a Gyilkos számok. A bűntények megoldásával ugyanis a matematika gyakorlati hasznára világít rá.

A filmben mérgezéses esetek egy sorozata kapcsán eljutnak egy gyanúsítotthoz, aki egy Los Angeles melletti erdőben bujkál. Megtalálására többféle matematikai apparátust is bevetnek. Például megfigyelik, hogy a szökevény nem járt egy úton kétszer. Ennek kapcsán Charlie bemutatja szemléletesen a königsbergi hidak problémáját, elmagyarázza az Euler-út fogalmát, ám ez a megközelítés nem vezet megoldásra. Közben egy híres nyomolvasó észreveszi, hogy van három hely, ahol a gyanúsított többször is megfordul. Ekkor Charlie a következő modellt állítja fel: feltételezhető, hogy a szökevény a három pont közt olyan úthálózaton halad, ami neki a leggyorsabb, tehát a megtett útvonal összhossza minimális. Feltételezhető ugyanis, hogy ha három egymástól távol fekvő helyen járt többször is, akkor lesz még egy negyedik pont, egy központ, ahonnan összességében a többi pont gyorsan megközelíthető, tehát az úthálózat összhossza minimális. Ez az úgynevezett Steiner-fa feladatra, illetve ahogyan a filmben is nevezik, a buborékelméletre vezet. A Steiner-fa negyedik csúcsánál meg is találják a keresett személyt.

A filmbeli probléma matematikai modellje tehát egy (hegyesszögű) háromszögben egy olyan pont keresése, amelynek a három ponttól vett össztávolsága minimális. A modellt buborék elvnek nevezik és az alábbi módon hozzák kapcsolatba a feladattal: Képzeljük el, hogy néhány szappanbuborék találkozik a levegőben, majd egyesülnek. Ekkor a köztük lévő hárttyák, akárhány buborékról is legyen szó, páronként  $120^\circ$ -os szöget zárnak be. Ezt azzal igazolják, hogy mint a fizikában minden jelenség, a buborékok is az energiaminimumra törekednek, és minden minimális állapot valamiféle szimmetriát mutat. Ez persze csak heurisztika. A megfelelő pont létezése és leírása három buborékra, azaz pontra Fermat (Pierre de, 1605-1665) nevéhez fűződik, és az így kapott pontot izogonális vagy Fermat-pontnak nevezzük.

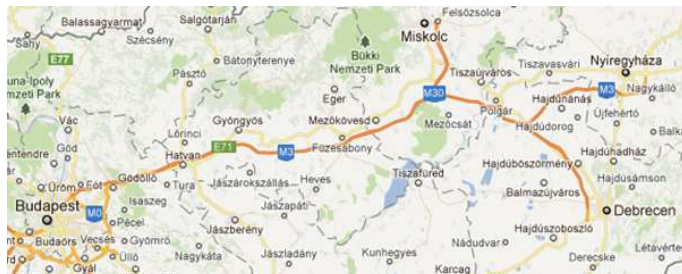
Charlie a filmben Steiner-fa néven emlegeti a megoldás alapötletét. Jakob Steiner (1796-1863) svájci matematikus volt. Nevéhez számos ismert geometriai probléma megoldása, tárgyalása, egzakt bizonyítása fűződik. Ebben a dolgozatban csak a gráfokkal, minimális feszítőfákkal kapcsolatos munkáját tárgyaljuk.

A Steiner-fa feladat egy gráfban a minimális költségű feszítőfa keresésének általánosítása. A gráf néhány pontja közötti minimális költségű feszítőfa felállítására a cél úgy, hogy bevehetők a gráf más pontjai is. Általánosabb esete az úgynevezett Euklideszi vagy geometriai Steiner-fa, mely a sík  $n$  adott pontja között keresi a minimális összhosszúságú hálózatot. Ekkor a gráf pontjai a sík pontjai, élei az őket összekötő szakaszok, melynek súlyai a két csúcs euklideszi távolsága. Látható, hogy a feladat 3 pontra épp a fent említett Fermat-pontot adja.

A Steiner-fáknak számos gyakorlati alkalmazásuk van. Ha városok közt úthálózatot, házak közt vízvezetékrendszert, esetleg internet kábelt szeretnénk lefektetni, és a lehetséges hálózatok közül a lehető legolcsóbbat vagy a lehető legrövidebbet szeretnénk kiépíteni, mindig a megfelelő pontokra állítható Steiner-fát keressük. Vegyünk például négy nagyvárost, Budapestet, Miskolcot, Nyíregyházát és Debrecent. Ahhoz hogy eljussunk egyik városból a másikba, autópályát építhetünk közöttük. Nyilván megoldás lehet, hogy összekötjük Budapestet Miskolccal, Miskolcot Nyíregyházával, majd azt Debrecennel. Ki akarna azonban akkorát kerülni Debrecenbe-menet. Új ötletként összeköthetnénk mindegyik várost mind-



egyikkel, így bárhonnan bárhova a legrövidebb idő alatt jutnánk el. Ez viszont meglehetősen drága lenne, így egy optimális megoldást nyújthat, ha a városok közötti legrövidebb összhosszúságú úthálózatot, ezáltal a négy városra mint pontokra rajzolható Steiner-fát építjük ki. Így készült az M3-as autópálya. (1. ábra)



1. ábra. M3-as autópálya

Napjainkban is sokan foglalkoznak a Steiner-fák elméletével, a MathSciNet-en eddig 887 publikációt referálnak. Ezeket az eredményeket foglalják össze [23],[25], [24] monográfiák. Az első egy általános összefoglaló, míg a második és a harmadik a kombinatorikus optimalizálás, illetve a kommunikációs hálózatok szemszögéből vizsgálja a problémakört. Az utóbbi húsz év fő kérdése azonban egy és ugyanaz: milyen közelítéssel lehet gyorsan feszítőfát keresni.

Ismert, hogy a Steiner-fa keresés a legnehezebb kombinatorikus feladatok közé tartozik, és kicsi az esély arra, hogy bármikor is gyors kereső algoritmust találjanak Steiner-fákra [20], mégis bizonyos hibahatárral találhatunk olyan fát, amely hossza csak kicsivel tér el az optimálistól. Sokáig az 1,55-ös szorzó volt a legjobb becslés [21], míg tavaly közzétettek egy 1,39-es pontosságú algoritmust [22]. Ez azt jelenti, hogy bármilyen ponthalmaz esetén számítógép segítségével gyorsan (a gráf csúcsszámának polinomiális függvényével felülről becsülhető lépésben) található olyan feszítőfa, amely hossza a Steiner-fa hosszának maximum 1,39-szerese.



2. ábra. Manhattan utcái

Az egyik legkutatottabb Steiner-fa probléma az úgynevezett egyenes vonalú (rectilinear) Steiner-fa, az úgynevezett taxis (taxicab) geometriában, ahol csak függőleges és vízszintes élek vannak. Így, ha ott keresünk minimális utat, akkor egy másfajta távolsággal kell számolnunk. Két pont között csak „közúton” közlekedhetünk. Így például egy úthálózattal

párhuzamos négyzet két átellenes csúcsának távolsága 2, míg a szokásos értelemben vett távolsága  $\sqrt{2}$ . Ez a geometria New York város Manhattan negyedére hasonlít (2. ábra), ahol az utcák egymástól körülbelül egyenletes távolságra egymással párhuzamosan illetve egymásra merőlegesen helyezkednek el.

A Manhattan Steiner-fa fontosságát az adja, hogy nyomtatott áramkörök készítésénél a forrasztógép csak két egymásra merőleges irányba mozoghat. Azaz, ha a plexilapon össze szeretnénk kötni néhány pontot vezetékkel, akkor épp az ezekre állítható rektilineáris Steiner-fa adja a legkevesebb vezeték felhasználásával járó kapcsolatot.

A film, és a Steiner-fák széleskörű gyakorlati haszna kellő motivációt ad, hogy a gyerekekkel foglalkozzunk a Steiner-fákkal. Charlie elvileg a buborékok segítségével rajzolt fel egy fát, de a következő képen már ott volt a kész rajz, amit csak ráillesztett a pontokra (3. ábra). Hogyan csinálta mégis, meg tudjuk-e mi is csinálni?



3. ábra. A filmbeli Steiner-fa

## 4. Feladatok

### 4.1. Euklideszi geometria

Az eredeti probléma, amely a filmben felmerült a következő. Megfigyelték, hogy a szökevény gyakran járt ugyan azon a három helyen, ezért feltehetőleg köztük olyan úthálózaton haladt, ami neki a legjobb, tehát minimális. Feltételezhető ugyanis, hogy ha három egymástól távol fekvő helyen többször is megfordult, akkor lesz még egy negyedik pont, egy központ, ahonnan összességében a többi hely gyorsan megközelíthető, tehát az úthálózat összhossza a lehető legkevesebb. A matematika nyelvére lefordítva feladatunk tehát 3 pont közötti úthálózat hosszának minimalizálása. Véleményem szerint ez egy átlagos középiskolásnak is nehéz feladat, egy kevésbé érdeklődőnek pedig még inkább. Ezért készítettük az alábbi rávezető feladatsort, melyben hasonló gondolatokat, ötleteket használunk, mint amely majd az eredeti probléma megoldásához kell.

A legegyszerűbb feladat az lenne, ha nem három, hanem csak két pont között keresnénk a minimális úthálózatot. Mindenféle megkötés nélkül ez viszont triviális, az őket összekötő szakasz lesz a legrövidebb. Ezt a filmben még Don is tudta.

Kicsit nehezebb, még mindig két pontra: két, egy egyenes által meghatározott azonos félsíkban lévő pontot összekötni úgy, hogy utunknak legyen közös pontja az egyenessel is.

**1. Feladat.** *Jancsi és Iluska egy (egyenes) folyó ugyanazon oldalán laknak. Jancsi el szeretne jutni Iluskához, de közben még meg szeretné itatni a lovát a folyónál. Merre menjen, ha minél hamarabb oda szeretne érni?*

*1, Megoldás.* Legyen Jancsi helye  $J$ , Iluskáé  $I$ , a folyó pedig  $e$ . Vegyünk fel egy tetszőleges  $P$  pontot az egyenesen. Ha tükrözzük  $J$ -t  $e$ -re,  $JP = J'P$ , mivel  $J'$  független  $P$  választásától, a kérdést átfogalmazhatjuk arra, hogy mikor minimális a  $JP + PI$  távolság. Nyilván akkor, ha  $P \in JI$  egyenesének.  $\square$

*2, Megoldás.* Ezt a megoldást nem részletezzük, csak a megoldási módszert említjük meg.

Alkalmas koordináta-rendszerben a távolságokat felírva, majd deriválva szélsőértékként kapjuk, hogy a  $JP$ ,  $IP$  egyenesek  $e$ -vel bezárt szöge megegyezik. Tehát keresendő az  $e$  egyenes azon pontja, amiből  $J$ -hez illetve  $I$ -hez húzott egyenesek  $e$ -vel bezárt szöge megegyezik. Az pedig nyilván a tükrökép segítségével kapható, így visszajutottunk az előző megoldáshoz.  $\square$

Megjegyzés: Segítségként először induljunk ki két pont távolságából. Mikor lenne itt is jó megoldás a két pontot összekötő szakasz? (Ha a „folyó” elválasztaná a két pontot.) Segítség lehet az is, ha úgy kérdezzük, hogy hogyan szerkesztenéd meg Jancsi útját.

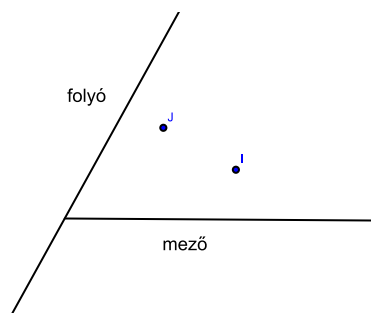
Az első megoldás a jelen helyzetben azért előnyösebb, mert a későbbiekben erre a transzformációs szemléletmódra lesz szükségünk. A második megoldás abból a szempontból lehet hasznos, hogy más megvilágításba helyezi a problémát, a tükrözésre nem a szakaszok, hanem a szögek egyenlőségéből kell rájönni. A kétféle megoldás szemléltetése azért is előnyös, mert a gyerek látja, hogy a probléma többféleképpen is megoldható, nem csak egy nyilvánított jó megoldás létezik.

Ezzel, és a később leírt második, harmadik feladattal már több helyen is találkozhattak a diákok. Legtöbbször a transzformációknál, illetve fakultáción a differenciálszámításnál

szokták tanítani [17]. Azért vesszük bele mégis feladatsorunkba, mert nem építünk a diákok előzetes ismereteire, viszont a transzformációs látásmódra szükségünk van az eredeti feladatunk megoldásához. Egy már tanult módszer más környezetben való felelevenítése pedig segíti a bevésődést, elsajátítást.

Mivel dolgozatomban főleg a matematika iránt kevésbé érdeklődőkkel szeretnék foglalkozni, ezért fontosnak tartom, hogy ne száraz matematikai szövegezésű legyen a feladat. Érdekesebb, ha gyakorlati a példa, vagy meseszerűen van fogalmazva. Ez ráadásul fejleszti a gyerekek modellalkotási képességét, hiszen ha egy rajzon, térképen mutatjuk meg a feladatot házzal, meg hömpölygő folyóval, akkor még át kell fogalmaznia pontokra, egyenesre.

**2. Feladat.** *Most Jancsi még lóitatás után elmegy a mezőre virágot szedni Iluskának (4. ábra). Merre menjen úgy?*



4. ábra.

*Megoldás.* Legyen ismét Jancsi  $J$ , Iluska  $I$ , a folyó  $e$ , a mező széle  $f$ ;  $P \in e$ ,  $R \in f$  tetszőleges. Ismét tükrözzük  $P$ -t  $e$ -re, illetve  $R$ -t  $f$ -re. Így Jancsi útjának hossza ismét a kialakuló  $J'PRI'$  töröttvonal hosszával egyezik meg. Ez pedig akkor minimális, ha  $J', P, R, I'$  kollineáris.  $\square$

Az első feladat megbeszélése után erre már azok is könnyebben rájönnek, akik az előzőt nem tudták megoldani, ez pedig sikerélményt, nagyobb kedvet jelent. A kudarcserülő személyiségű gyerekek érdeklődését is jobban felkeltheti, önértékelését javíthatja, ha egy általuk nehéznek ítélt feladatot megoldanak.

**3. Feladat.** *Jancsi és Iluska egy folyó két oldalán laknak. Hova építsenek a folyóra merőleges hidat, hogy a lehető legrövidebb idő alatt el tudjanak jutni egymáshoz?*

*Megoldás.* Legyen a folyó Jancsi felőli partja  $e$ , Iluska felőli  $f$ ,  $e$  egy tetszőleges pontja  $P$ . Mivel a hidat a legolcsóbbra, a folyóra merőlegesen szeretnék építeni, ezért merőlegesen  $d(e, f)$  hosszú utat mindenképp meg kell tenni. Toljuk tehát el  $JP$ -t egy  $e$  és  $f$ -re merőleges,  $f$  felé mutató  $d(e, f)$  hosszú vektorral. Az így keletkező  $|J'P'| = |JP|$ ,  $|PP'|$  állandó, így  $J'P'I$  töröttvonal minimumát keressük. Ez megint akkor fordul elő, ha  $J', P', I$  kollineáris. Tehát a hidat a  $f \cap J'I$ -be kell építeni.  $\square$

Valószínűleg itt is tükrözéssel próbálkoznak először, hiszen eddig ezek vezettek sikerre. A híd hosszának állandóságából azonban rá lehet jönni az eltolás alkalmazására. Segítő kérdések lehetnek például, hogy miért alkalmaztunk az előző két feladatban tükrözést; mi

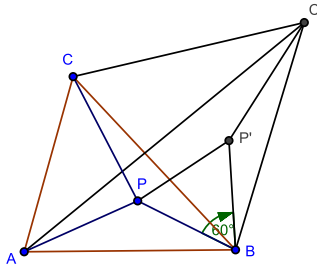
az, ami itt állandó lesz.

Egy várható tanulói próbálkozás, hogy kössük össze  $J$ -t  $I$ -vel, vegyük ennek  $e$  és  $f$  középpárhuzamosával vett metszéspontját, majd ebbe a pontba állítsuk a folyóra merőleges hidat. A fenti megoldásból azonban következik, hogy ha  $P$  és  $P'$  a híd minimális úthoz tartozó végpontjai, akkor  $JP \parallel P'I$ , ami ezen megoldásban  $JP \neq P'I$  esetén nem teljesül.

A kellő előkészítés után rátérhetünk az alapproblémára.

**4. Feladat.** *Adott egy hegyesszögű háromszög. Hol van az a pont, amelynek a csúcsoktól vett távolságösszege minimális?*

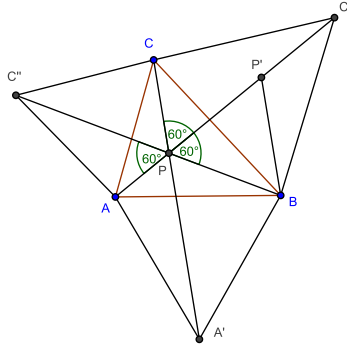
*Megoldás.* A csúcsok legyenek:  $A, B, C$ ., továbbá  $P$  tetszőleges pont a háromszög belsejében (5.ábra). Ekkor keressük, hogy  $AP+BP+CP$  mikor minimális. Forgassuk el  $BPC$  háromszöget  $B$  körül  $60^\circ$ -kal kifelé. Ekkor  $BPP'$  háromszög szabályos, így  $BP = PP'$ , továbbá  $BPC\Delta \simeq BP'C'\Delta$ , amiből  $CP = C'P'$ . Ezek alapján  $AP+BP+CP = AP+BP'+C'P'$  akkor minimális, ha  $A, P, P', C'$  kollineáris, tehát ha  $P \in AC'$ .  $AC'$  a  $BC$  oldalra kifelé írt szabályos háromszög harmadik csúcsát  $A$ -val összekötő egyenese. Hasonlóan a többi csúcsra is, akkor lesz minimális, ha  $P$  a háromszög oldalaira kifelé írt szabályos háromszögek harmadik csúcsát a háromszög szemközti csúcsaival összekötő egyenesén van.



5. ábra.

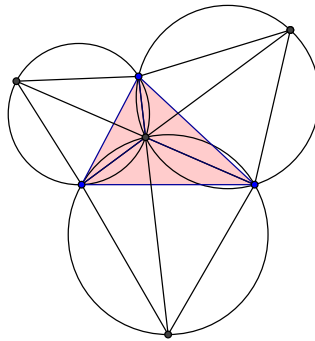
Be kell látnunk, hogy ezek a szakaszok egy pontban metszik egymást. Legyen az  $AB$  oldalra kifelé írt szabályos háromszög harmadik csúcsa  $A'$ ,  $BC$ -é  $C'$ ,  $AC$ -é  $C''$ . Legyen továbbá  $P: AC' \cap CA'$  (6. ábra). Ekkor  $BPC'\angle = A'PB\angle = 60^\circ$ , mert  $A'C$ -t  $B$  körül  $60^\circ$ -kal forgatva  $AC'$ -t kapom, így  $P' \in AC'$ ,  $BPP'\Delta$  szabályos. Továbbá  $APC\angle = 120^\circ$ , így  $A, P, C, C''$  egy körön van.  $AC$  és  $CC''$  egyenlősége miatt a kerületi és középponti szögek tétele alapján  $APC''\angle = C''PC\angle = 60^\circ$ . Ezzel beláttuk, hogy  $C'', P$  és  $B$  kollineáris.  $\square$

A feladat megoldása meglehetősen összetett, hiába nem használunk új gondolatokat, csak a transzformációs szemléletmódot alkalmazzuk a forgatással, alapötletként pedig az eddigiekhez hasonlóan a kollinearitást. A megoldás megbeszélése után feladhatjuk, hogy szerkesszék meg a filmben szereplő háromszög izogonális pontját, ezzel elsajátíthatják a tanult módszereket. Az előző bizonyításban melléktermékként megkaptuk, hogy a Fermat-pont a háromszög minden oldaláról  $120^\circ$ -os szög alatt látszik. Így tehát kétféleképp is megszerkeszthetjük az izogonális pontot. Egyrészt a háromszög oldalaira kifelé írt szabályos háromszögek harmadik csúcsát a háromszög oldallal szemközti csúcsával összekötő szakaszok metszéspontjaként, másrészt a háromszög oldalaira írt  $120^\circ$ -os látóörvények közös



6. ábra.

pontjaként (7. ábra).



7. ábra.

Megjegyzés: A megoldásban csak hegyesszögű háromszögekkel foglalkoztunk, viszont csak azt használtuk ki, hogy a háromszög minden szöge kisebb  $120^\circ$ -nál, hiszen feltettük, hogy P belső pont.  $120^\circ$  vagy nagyobb szöggel rendelkező háromszög esetében a Fermat-pont a tompaszögű csúccsal esik egybe.

Megoldottuk tehát a filmben felmerülő problémát középiskolai módszerekkel. (Még számos különböző bizonyítás található például [26]-ban.)

Adódik továbbá a kérdés, hogy mi a helyzet több pontra. Ezt is kis lépésekben építjük fel, hogy a gyerekek maguktól jöhessenek rá. Nézzük először négy pontra, speciális esetben.

**5. Feladat.** Vegyük egy téglalap csúcsait. Hol van az a pont, ahonnan a csúcsokba húzott szakaszok hosszának összege minimális?

*Megoldás.* Ez nyilván az átlók metszéspontja lesz, hiszen akármelyik másik pontot összekötve a csúcsokkal a háromszög-egyenlőtlenség miatt hosszabb távolságösszeget kapok.  $\square$

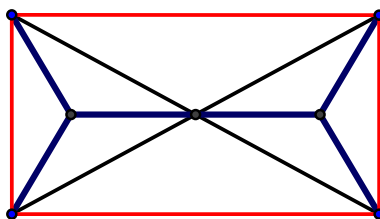
Az előző feladat bonyolultságát látva gondolhatnánk, hogy négy pontra is hasonló, vagy nehezebb a probléma. Feltehetően lesznek olyan gyerekek, akik itt is forgatással próbálkoznak - míg észre nem veszik, hogy az átlóval lehet javítani két Steiner-élt - hiszen egész

eddig transzformációkat használtunk. Ez a csapda viszont fejleszti gondolkodásukat, hogy nem favágómódszer szerint oldjuk meg a feladatokat.

Láttuk, hogy egy újabb pont felvételével az átlók összege a minimális. Felmerül azonban a kérdés, hogy nem lehet-e ezen még javítani. Hogyan lehetne rövidebb a négy pont közötti úthálózat?

**6. Feladat.** *Rajzoljuk le a 8. ábrán látható téglalap csúcsaira az őket összekötő minimális úthálózatot! (Hogy néz ki egy téglalap Steiner-fája?)*

*Megoldás.* Észrevehetjük, hogy két csúcs, illetve az átlók metszéspontja alkotta háromszög két oldala szerepel a fában, de ennél jobb a három pont Steiner-fája az izogonális pontjukkal.



8. ábra.

Kétféleképp is javíthatunk attól függően, hogy melyik oldalpárhoz tartozó háromszöget tekintjük. Ha az átlók szöge kisebb mint  $60^\circ$ , akkor csak egyféleképp javítható az átlók metszéspontja, a rövidebb oldalhoz tartozó Steiner-fával, hiszen a hosszabbakhoz tartozó háromszög metszéspontnál lévő szöge nagyobb mint  $120^\circ$ , annak a Fermat-pontja pedig a tompaszögnél lévő csúcs.

Ha viszont az átlók szöge nagyobb  $60^\circ$ -nál, akkor mindkét oldalpárhoz tartozó háromszögben javíthatunk. Ekkor néhány Pitagorasz-tétel felírásával kiszámolható, hogy a rövidebb oldalhoz tartozó javítással kapott fa kisebb. Ha a két oldal  $a$ , illetve  $b$ , akkor az  $a$ -hoz tartozó javítással az összút  $a + \sqrt{3}b$ , illetve  $b + \sqrt{3}a$ .

Be kell látnunk még, hogy a rövidebb oldalhoz tartozó javítással elért fa a legrövidebb, tehát akárhogy veszünk két pontot, és kötjük össze a csúcsokkal, az összhossz nagyobb lesz. Vegyük észre, hogy a minimális feszítőfában a Steiner-pontoknál lévő szögeknek  $120^\circ$ -osaknak kell lenniük, különben tudnánk javítani a három ponthoz tartozó Steiner-fával, ahogy azt az átlók esetében tettük. Így tehát az új pontoknak a rövidebb oldalakhoz tartozó  $120^\circ$ -os látóköríven kell lenniük. A téglalap szimmetrikussága miatt a Steiner-fának is szimmetrikusnak kell lennie, vagyis a Steiner-pontok rajta lesznek az oldalfelező merőlegeseken.

Marad azonban a kérdés, hogy van-e ennél is rövidebb. Csökkenthető-e vajon a fa mérete ha még több segédpontot veszünk fel? Lehet-e egy szög esetleg  $120^\circ$ -nál nagyobb? Mindkét kérdésre Steiner fák segítségével adhatjuk meg a választ: ha ugyanis van egy (tetszőleges) segédpontunk, akkor a két rövidebb oldal és a segédcsőcs által meghatározott háromszögek Steiner-fái minimális megoldást adnak a feladatra. Ekkor maximum két új csúcs keletkezik, amelyek összekötő vonalán szerepel a kiindulási segédpont. Ezért az összekötő vonal egy egyenes szakasz kell, hogy legyen. Így két segédpontra van szükségünk, és a megfelelő szögek mind  $120^\circ$ -osak.  $\square$



Megjegyzés: A szimmetria okokra való hivatkozással történő bizonyításunk eleinte elnagyoltnak tűnhet, de részleteiben jobban kifejtve helytálló. Dolgozatomban azonban erre nem térek ki, mert egy másfajta bizonyítást is láthatunk majd a következő feladat, az általános négy pont Steiner-fájára vonatkozó megoldásban. A Steiner-fa szerkesztését is ott mutatjuk be.

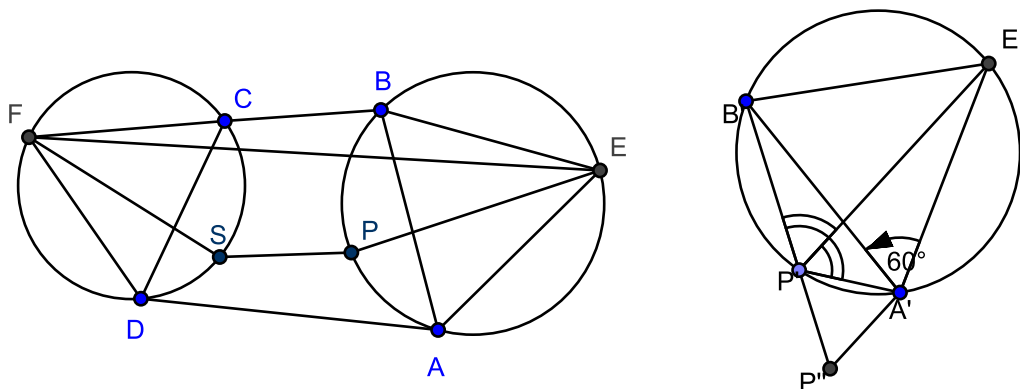
Ez a feladat nemcsak a rekurzív gondolkodást fejleszti, hiszen azt használtuk ki, hogy három pontra már ismerjük a Steiner-fát, hanem a bizonyításra való igényt is. Egyedül nem valószínű, hogy felmerült volna bennük, hogy lehet jobb úthálózatot rajzolni az átlóknál, vagy hogy lehet-e két ponttal máshogy rövidebb fát rajzolni, ha nem kérdezzük meg. Ezek után viszont már bennük is felmerülhet, hogy nem lehetne-e három újabb ponttal javítani.

Ezt a feladatot szakkörön való feldolgozáshoz javasoljuk a bizonyítás szerzeágazósága miatt. Rendes óra keretei között, vagy népszerűsítő előadáson érdekességként be lehet mutatni az átlókra vonatkozó javítást a minimalitás bizonyítása nélkül.

Vizsgáljuk most általánosabb négy pont Steiner-fáját. Láttuk, hogy az állításaink többsége  $120^\circ$ -nál kisebb szögű alakzatokra vonatkoztak, így most is csak ilyen négyszögekre szorítkozunk.

**7. Feladat.** *Rajzoljuk le egy olyan konvex négyszög Steiner-fáját, melynek minden szöge kisebb  $120^\circ$ -nál!*

*1, Megoldás.* Az előző feladatban beláttuk, hogy a Steiner-pontokból három él indul ki, és ezek páronként  $120^\circ$ -osak. Így a keresendő pontok rajta lesznek két szemközti oldal  $120^\circ$ -os látókörívén. Legyenek a négyszög csücsai rendre  $A, B, C, D$ , az  $AB$  oldalra kifelé írt szabályos háromszög harmadik csücske  $E$ , a  $CD$  oldalé  $F$ . Ekkor a Steiner-pontok rajta lesznek a két háromszög körülírt körén. Legyen  $P, S$  tetszőleges ezeken a köríveken, a 9. rajzon látható módon.



9. ábra.

Bebizonyítjuk, hogy  $PB + PA = PE$ . Vegyük észre, hogy  $BPE\angle = EPA\angle = 60^\circ$ , hiszen egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek. Forgassuk el az  $AEP\Delta$ -t  $A$  körül  $60^\circ$ -kal. Ekkor  $E$  képe  $B$ ,  $P$  képe  $P'$ , ami rajta van  $BP$  egyenesén. Így  $EP = BP + PP' = BP + PA$ .

Így tehát a feszítőfa hossza egyenlő az  $EPSF$  töröttvonal hosszával, ami akkor minimális, ha az említett négy pont kollineáris.  $\square$



Megjegyzés: Ezzel egy szerkesztési eljárást is adtunk négy pont Steiner-fájának megrajzolásához.

2, *Megoldás.* Az 1, megoldás alapötletét és jelöléseit használva  $PB + PA = PE$ -t bizonyíthatjuk a Ptolemaiosz-tétel felhasználásával is, mely szerint egy húrnégyszög átlóinak szorzata megegyezik a szemközti oldalak szorzatának összegével. Így  $PE \cdot AB = AE \cdot PB + BE \cdot PA$ .  $ABE\Delta$  szabályos, így  $AE = BE = AB$ . Egyszerűsítve kapuk, hogy  $PB + PA = PE$ .  $\square$

Az első megoldásban látott bizonyítás szép alkalmazása az eddig tárgyalt transzformációs módszereknek. A megoldás során felhasználjuk a Steiner-fák eddig megismert tulajdonságait is. Véleményem szerint a feladat nehézsége azon ötlet megtalálása, hogy (az eddigi jelölésekkel)  $PB + PA = PE$ . Ezért ezt a feladatot célszerű előtte önmagában feladni. Így az általános négyszög Steiner-fájának leírásához már csak ezen feladat alkalmazásának ötlete szükségeltetik, nem maga a feladat önálló kitűzéséhez szükséges összetett gondolat.

Megfigyelhető, hogy általános négyszögre a két szemközti oldalpárra rajzolt háromszögekkel kapott fák nem egyenlő hosszúak, mint ahogyan azt a téglalagnál is láttuk. Belátható, hogy csak deltoidok esetében egyenlőek, tehát ha a négyszög átlói merőlegesek egymásra.

**8. Feladat.** *Bizonyítsuk be, hogy egy konvex négyszög két-két szemközti oldalára rajzolt szabályos háromszögek négyszögtől különböző csúcsait összekötő szakaszok pontosan akkor egyenlőek, ha a négyszög átlói merőlegesek.*

E feladat azonban már nehézségét tekintve inkább versenyre készülőknek, szakkörökre ajánlatos. Dolgozatomra felfigyeltek a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztői közül többen is, javaslatukra ez és az ezt követő feladat feltehetően szerepelni fog egy számukban, így megoldásukat itt nem közöljük.

**9. Feladat.** *Jelöljük  $E(XYZ)$ -vel az  $XYZ\Delta$  izogonális pontját. Legyenek továbbá egy konvex négyszög csúcsai rendre  $A, B, C, D$ ,  $AB$  és  $CD$  oldalaira kifelé írt szabályos háromszögek harmadik csúcsa  $Y$  illetve  $X$ . Bizonyítsuk be, hogy  $E(E(XBA)CD) = E(YCD)$ .*

A háromszögek, négyszögek Steiner-fáinak vizsgálata után több diákban felmerülhet a kérdés, hogy mit mondhatunk általánosan  $n$  pontra vonatkozó Steiner-fákról. Ezek keresése, szerkesztése azonban már nehéz. Azt viszont már a téglalagnál is beláttuk, hogy a Steiner-csúcsoknál lévő szögek  $120^\circ$ -osak, ez általánosan  $n$  pontra is igaz, különben tudnánk javítani három pont közötti Steiner-fával. És mit mondhatunk az újonnan bevett pontokról? Négyszögnél láttuk, hogy harmadik új pont felvétele fölösleges. Általánosan  $n$  pontra is adhatunk felső becslést.

**10. Feladat.** *Hány Steiner-pont szükséges legfeljebb  $n$  pont Steiner-fájának megrajzolásához?*

*Megoldás.* Legyen az újonnan felvett pontok száma  $k$ . Mivel fát keresünk, az összes él száma a pontok számánál eggyel kevesebb. Minden Steiner-pontból három, minden eredeti pontból pedig legalább egy él indul ki. Ezek alapján:

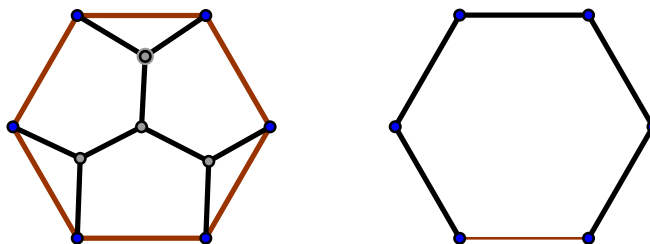
$$n + k - 1 \geq \frac{3k + n}{2}$$

$$k \leq n - 2$$

$\square$

Habár eddig Steiner-fákról, így gráfokról beszéltünk, semmilyen gráfelméleti fogalmat, tételt nem használtunk, pusztán geometriai tárgyalásokról volt szó. Általánosan több pont-ra viszont már szükséges a fa definíciójának, tulajdonságainak ismerete, amelyet csak felsőbb évesektől várhatunk el. Kisebkeknek véleményem szerint szükségtelen korábban bevezetni ezeket a fogalmakat, mert annyi új ismeret között elveszik a lényeg, zavarossá válhat. Későbbi tanulmányaik során pedig erre visszaemlékezve már könnyebben elsajátítják azokat a fogalmakat is, lesz egy kapcsolódási alapjuk.

Konkrét több pontra nézve érdekességként bemutatható még a szabályos hatszög Steiner-fája. Az eddigi megoldások alapján gondolhatnánk, hogy a szemközti csúcsokat összekötő átlókat behúzva egy újabb pont felvételével, majd ezt a három szabályos háromszög Steiner-fájával javítva minimális megoldáshoz jutunk (10. ábra). Ha jobban szemügyre vesszük azonban a szabályos hatszöget, észrevehetjük, hogy belső szögei épp  $120^\circ$ -osak, így 5 oldalt tekintve ismét egy jó megoldáshoz juthatunk. A Pitagorasz-tétel, illetve a háromszög súlypontjának a súlyvonalat harmadoló tulajdonságának segítségével beláthatjuk, hogy az oldalak által meghatározott fa kisebb. (Ha a hatszög egy oldala egységnyi, az átlók javításával kapott fa hossza:  $3\sqrt{3}$ . Mivel pedig  $3\sqrt{3} > 5$ , az oldalak által meghatározott fa kisebb.)



10. ábra.

Az előző feladat is tükrözi, hogy a Steiner-fák általános leírása matematikailag nehéz feladat. A fizika, illetve szappanbuborékok segítségével azonban könnyen szemléltethető bármilyen elhelyezkedésű pontok között húzódó Steiner-fa is. Ehhez párhuzamos, egymástól 1 cm-re lévő plexilapok közé annyi tűskét kell elhelyeznünk, ahány pontra kíváncsiak vagyunk. Ez a szerkezet, ha mosószeres, glicerines oldatba mártjuk, majd onnan kiemeljük, hártyákkal kirajzolja a keresett úthálózat minimális alakját. Példaként a 11. ábrán négy pontra feszülő szappanhártya által egy négyzet Steiner-fa modelljét láthatjuk. Ez a jelenség hasonló a már említett szappanbuborékok esetéhez, hiszen itt is a hártyák minimális energiájú állapotra törekedve úgynevezett minimálfelületeket hoznak létre. Ilyen szerkezetet, modellt akár a gyerekek maguk is csinálhatnak, hiszen nemcsak hogy egyszerű, érdekes és szórakoztató, saját tapasztalatok útján ismerkedhetnek egy új problémával.



11. ábra. Szappanhártya által kirajzolt Steiner-fa modell [30]

## 4.2. Taxis geometria

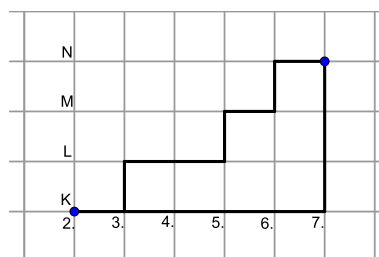
Nemcsak jelentős gyakorlati haszna miatt (városok úthálózata, nyomtatott áramköri chippek), hanem érdekes tulajdonságai miatt is foglalkozhatunk a taxis geometriával. Ez egy (eddig csak euklideszi geometriával találkozó diák számára) szokatlan tulajdonságokkal, távolságfogalommal rendelkező geometria. Alapjai azonban könnyen megérthetők, általános iskolában is bemutatathatók. Érdekességével tapasztalataim szerint leköti és megszeretteti magát a gyerekekkel.

Mindenekelőtt vizsgáljuk meg, hasonlítsuk össze az eddig megszokott euklideszi geometria fogalmaival (szakasz, kör szakaszfelező) az itt megjelenő tulajdonságokat. Először is nézzük meg, hogy mi motiválja egy új távolságfogalom bevezetését.

**11. Feladat (Motiváció).** *Egy városban az utcák merőlegesek egymásra, sakktáblaszerűen lettek kiépítve. Úgy gondolták, hogy az utcanevekről nem akarnak vitatkozni, így egyszerűen a függőleges utcákat számokkal, a vízszinteseket betűkkel nevezték el. A polgármester például a 2. és a K utca sarkán lakott. Hogyan menjen*

a) *a 2. és az S utca sarkán lévő boltba;*

b) *a 7. és az N utcák találkozásánál lévő hivatalba ha a lehető leggyorsabban oda szeretne érni?*



12. ábra.

Az a, esetben nyilván a közös, 2. utcában kell menni, hiszen ha kimozdulnánk az utcából, vissza is kellene jönni. A b, esetben pedig akkor lesz a legrövidebb, ha csak jobbra illetve fölfelé megy, hiszen ekkor közeledik a hivatalhoz. Így az összes ilyen út jó a két épület között. Távolságuk pedig annyi lesz, amennyit a polgármesternek haladnia kell összesen jobbra illetve fölfelé. A 12. ábrán látható esetben  $5 + 3 = 8$ .

Megjegyzés: Ezzel közösen definiáltuk a taxis metrikában a távolságot.

Először speciális esetre néztük meg (amikor egy utcában vannak), majd így haladtunk az általános felé, hiszen ez egy furcsa, szokatlan geometria, amivel a legtöbben még nem találkoztak. Így jó, ha lépésről lépésre ismertetjük meg a gyerekeket vele. Megnézzük hogy miben hasonlít az eddig megszokott, természetessé vált euklideszi távolságra, majd csak ezt követően térünk át a szokatlan tulajdonságokra. A feladatok során folyamatosan párhuzamot vonhatunk a két geometria között. Például euklidesziben két pontot összekötő szakasz egyértelmű volt, itt több lehetőségünk van.

Ekkor felmerülhet a kérdés, hogy hányféle legrövidebb út van összesen.

**12. Feladat.** *Hányféleképp juthat el a polgármester a boltba, illetve a hivatalba (ha a lehető leggyorsabban oda szeretne érni)?*

*1, Megoldás.* A boltba nyilván egy. A hivatalba menet összesen nyolcszor lép vagy jobbra, vagy fölfelé. A nyolc lépésből bármikor, de pontosan háromszor haladhat fölfelé, így összesen annyi út van ahányféleképpen a nyolc lépésből kiválaszthatja azt a hármat amikor épp fölfelé lép. (Ugyanezt végiggondolhatjuk az öt jobbra lépésre is.) Így az utak száma:

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$$

□

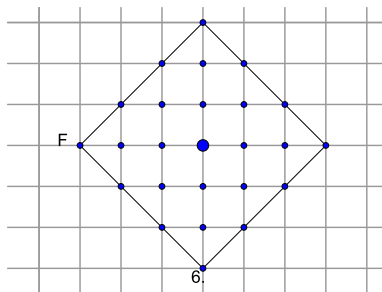
*2, Megoldás.* Először nézzük egyszerűbb esetre, és mindig írjuk rá a pontokra, hogy oda hányféleképpen lehet eljutni. Ha egy utcában vannak bármilyen távolságra, akkor nyilván egyféle. Ha az egységnégyzet átellenes sarkaiban, akkor oda eljuthat eggyel lejjebből, vagy eggyel balrábból, így összesen kétféle úton. A  $(4, L)$  koordinátájú pontba a  $(4, K)$ , vagy  $(3, L)$  pontból mehet, így összesen  $1 + 2 = 3$  úton, hiszen a  $(4, L)$ -be egy, a  $(4, K)$ -ba kétféle lehetőség van. Így a négyzetrács minden pontjára ráírhatjuk az oda vezető utak számát, az eggyel alatta illetve eggyel balra lévő rácsponthoz szereplő szám összegeként. Így adódik, hogy az  $(7, N)$  pontba összesen 56 legrövidebb út vezet. □

Így egy kombinatorikapéldához jutottunk, amivel a matematika témakörei közötti köhézióra világíthatunk rá, hiszen geometriafeladat kapcsán merült fel kombinatorikai kérdés. Fontos ezt is szemléltetni, hogy a matematika nem különálló témakörökből áll, ezek összefüggnek, egységet alkotnak (NAT).

Véleményem szerint mindkét megoldás tanulságos. Ha már tanultak a gyerekek kombinatorikát, a binomiális együtthatókat, akkor az első megoldás újabb szemléletes példát ad az ismétlés nélküli kombinációra. A második megoldáson pedig észrevehetjük, hogy a rácsponthoz írt számok pont a Pascal-háromszög elemei, így innen is eljuthatunk a binomiális együtthatókon keresztül az első megoldáshoz. Továbbá ez a megoldás a gyerekek rekurzív gondolkodásmódját erősíti, hiszen kisebb távolságokra írtuk fel először, majd ebből kiindulva haladtunk a nagyobb távolságok felé, felhasználva hogy kisebbekre már tudjuk. Ráadásul ez az elgondolás nem használ középiskolai tananyagot, általános iskolásoknak is feladható. Akik versenyekre, szakkörökre járnak, ismerős lehet e módszer (gyakran szerepel például a Zrínyi/Gordiusz matematikaverseny feladatai között is), így nekik a ráismerés élményét nyújthatja.

Miután két pont távolságát definiáltuk megvizsgálhatjuk, hogy hol helyezkednek el azok a pontok, amik egy adott ponttól egyenlő távolságra vannak, vagyis hogy néznek ki a körök.

**13. Feladat.** Nyílt egy pizzéria a városban, a 6. és az  $F$  utca sarkán, ami házhoz szállítást is vállal. Viszont egyenlőre csak biciklis futáraik vannak, akik hogy a pizza ki ne hűljön, az étteremtől csak három egység távolságra szállítanak. Mely házak rendelhetnek így pizzát? És ha motorral már ötre is tudnak?



13. ábra.

*Megoldás.* A 13. ábrán látható négyzeten lévő pontok vannak éppen három távolságra. Ennek belső pontjai kevesebb mint háromra, külső pontjai pedig már több mint háromra. Öt-re hasonlóan egy négyzet és ennek belső pontjai lesznek jók.  $\square$

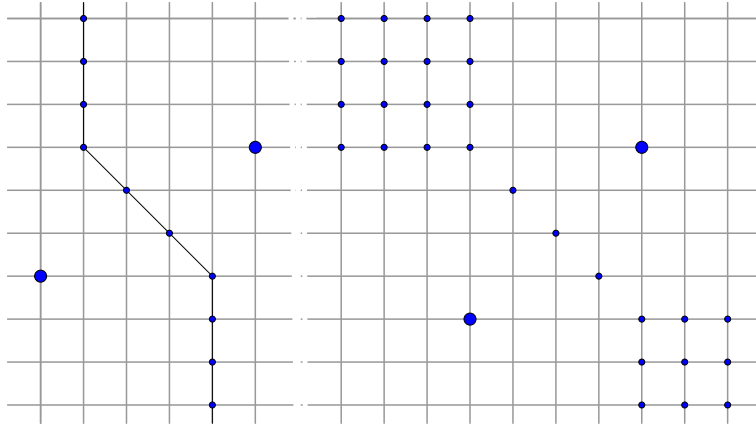
Kis távolságra feladva a feladatot egyszerűen megkapjuk, pusztán próbálgatással, hogy hol lesznek ezek a pontok. Erre mindenki rá tud jönni, semmilyen ötlet nem kell hozzá, így a gyerekek önmaguk veszik észre, tapasztalják meg ennek a különös geometriának a tulajdonságait.

Szemléletesen ezekkel a kis példákkal is látszik, hogy bármilyen nagyobb számra is hasonlóan néznek ki a hagyományos értelemben vett körök, egy négyzetként. Ennek a precíz bizonyításától azonban ebben a dolgozatban eltekintünk. Bár csak a taxis metrika távolságfogalmát, illetve az abszolútértékfüggvény tulajdonságait használnánk, ami önmagában nem haladná meg a középiskolás ismereteket, unalmas lenne a sok egyforma eset vizsgálata. Célunkat e nélkül az absztrakt tárgyalásmód nélkül is elérjük, hogy a gyerekek jártasságot szerezzenek ebben az újfajta geometriában.

**14. Feladat.** A városban immáron két pizzéria van, amelyek bármekkora távolságra vállalnak szállítást. Megbeszélték azonban egymás között, hogy az veszi át a rendelést az adott háztól, akihez közelebb van. Hogyan osztották így fel a várost egymás között,

- a) ha a másik pizzéria a 11. és az  $I$  utca sarkára épült?
- b) És ha a 10. és a  $J$  sarkára?

*Megoldás.* Először vizsgáljuk meg, hogy hol helyezkednek el azok a pontok, amelyek egyenlő távolságra vannak a két adott ponttól. Nyilván jók lesznek az őket összekötő szakaszok felezőpontjai, és a két pont, mint átellenes csúcsok által meghatározott téglalap pontjai közül csak ezek lesznek jók. Ekkor próbálgatással észrevehetjük, hogy a többi pont egy-egy félegyenesen van, ami a 14. ábrán látható. Ezen félegyenesek minden pontja jó lesz, hiszen a kezdőpontjai jók, onnan pedig fölfelé illetve lefelé haladva ugyanannyival nő minkét ponttól vett távolság. A vonaltól jobbra az egyik, míg ettől balra a másik ponthoz lesznek közelebb. A négyzet esetében is hasonlóan meggondolhatjuk, hogy a 14. ábrán látható pontok jók.  $\square$



14. ábra.

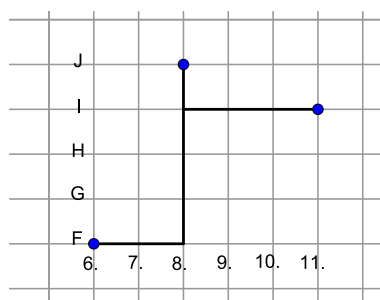
Megjegyzés: Ennek a precíz bizonyításától is eltekintünk.

Ez az előbbi feladattal egy másik bizonyítási technikát tár elénk, amelynek során valahogyan megtaláljuk a helyes megoldást (a feltételeket kielégítő pontokat), és belátjuk, hogy a többire nem teljesül.

Megoldva a feladatot igen meglepő eredményhez jutunk. Már egy téglalap átellenes csúcsaira is különös alakú a szakaszfelező, nem egy egyenes, hanem egy töröttvonal. Négyzetre pedig egészen rendkívüli, hogy egy-egy síknegyed minden pontja olyan, hogy egyenlő távolságra van az átellenes csúcsoktól.

Most, hogy már kellően megismertettük a gyerekeket ezzel a különös geometriával, ráterhetünk a Steiner-fa feladatokra. Először keressük meg három pontra a minimális összhosszúságú feszítőfát.

**15. Feladat.** *A városban nyílt még egy pizzéria (a 14.a) feladatban szereplők mellé) a 8. és J utcák találkozásánál. Szeretnének egymással kommunikálni. Merre fektessék le a telefondrótokat, hogy a legolcsóbb legyen?*



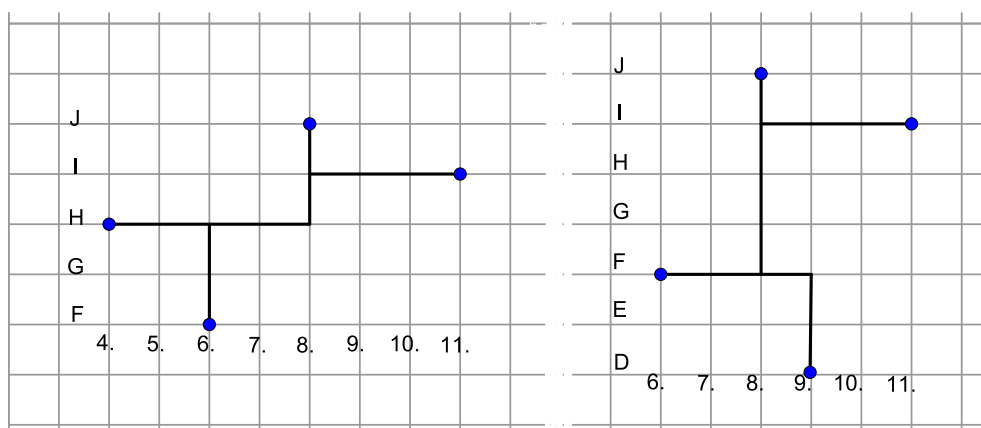
15. ábra.

*Megoldás.* A feladatunk tehát olyan minimális összhosszúságú úthálózatot felrajzolni, ami mindhárom pontot tartalmazza. A megoldás a 15. ábrán látható. Ennél rövidebbet nem lehet, hiszen az úthálózatban bármely pontból bármely másikba el kell jutnunk úton. Így a 6. utcától el kell tudnunk jutni a 11-ig, továbbá az F-től J-ig is, ami összesen  $5 + 4 = 11$ .  $\square$

Előfordulhat, hogy általános helyzetű három pontra nehezebben megy, ekkor segítő kérdéseket tehetünk fel, például mi lenne, ha egy utcában lennének, tehát ha az előző feladat b, részében szereplő pizzériát nézzük. Mivel feltehetően próbálgatással rajzolják fel az utat, tehát felrajzolnak egy lehetségeset, majd pedig azt javítják, így minden ilyen esetben látják, hogy ami minimálisnak tűnt, mégsem a legjobb volt. Ezzel felmerül az igény a bizonyításra, hogy amit aztán már nem tudnak tovább javítani az valóban a minimális-e. Ekkor világíthatunk rá, hogy egy alsó becslés adásával bebizonyítható, hogy nincs jobb.

Egy algoritmus adásával belátható, hogy három pontra mindig megvalósítható az alsó becslésnek megfelelő hosszúságú úthálózat. Például függőlegesen a középső ponthoz behúzzuk a rajta fekvő vízszintes egyenest, majd függőleges vonalakkal hozzákötjük a másik két pontot. (Ha függőlegesen nincs középső, akkor legalább kettő kollineáris, ekkor húzzuk be az ő egyenesüket.) Ennek a feladatnak a nehézsége inkább csak abban rejlik, hogy felmerül-e az igény a gyerekekben általánosan megfogalmazni valamit, ha már egyszer a konkrét feladatot megoldottuk.

Több pontra általánosan azonban már nincs gyors algoritmus. A gyerekek érdeklődéséhez mértén megvizsgálhatjuk négy pont Steiner-fáját is próbálgatással, ki tud rövidebbet rajzolni. Ha a 15. feladat pontjaihoz a  $(4, H)$  pontba felveszünk egy újabbat (16. ábra) egy olyan speciális esetet kapunk, melyre megvalósítható a három pontnál látott alsó becsléshez tartozó fa. Ha viszont az új pontot a  $(9, D)$  koordinátájú pontba vesszük fel a minimális fa hosszabb lesz mint a megfelelő páronkénti koordináták különbségének összege.



16. ábra.

Hasonló alsó becslés általánosan  $n$  pontra is adható, de a speciális esetektől eltekintve ezek meg sem közelítik a valódi minimumot, így ezekkel már nem foglalkozunk.

## Hivatkozások

- [1] N. Kollár K, Szabó É., *Pszichológia pedagógusoknak*, Osiris, 181 (2004)
- [2] American Broadcasting Company, *Ratings search for Numb3rs* (June 15, 2010)
- [3] National Science Board, *The „Numb3rs” Add Up: Popular TV Show and Its Creators Receive Public Service Award* (April 16, 2007)
- [4] <http://numb3rs.wolfram.com> (Nov 25, 2011)
- [5] [www.math.cornell.edu/numb3rs](http://www.math.cornell.edu/numb3rs) (Nov 25, 2011)
- [6] E. Weisstein, *The Math(ematica) behind Television’s Crime Drama NUMB3RS*, (May 24, 2007)
- [7] K. Devlin, *Numbers gets the math right*, Mathematical Association of America (Aug, 2007)
- [8] R. J. Rensaa, *The Image of a Mathematician*, <http://people.exeter.ac.uk> (Nov 26, 2011)
- [9] M. Mead and R. Metraux, *The image of the scientists among high school students: a pilot study*, *Science*, 126 (3270), 384-390., (1957)
- [10] J. L. Wilson and C. M. Latterell, *Nerds? Or nuts? Pop culture portrayals of mathematicians*, *ETC: A Review of General Semantics*, 58, 172-178 (2001)
- [11] A. Rampal, *Images of science and scientists: A study of school teachers’ views I. Characteristics of scientists*, *Science Education*, 76(4), 415-436 (1992)
- [12] R. A. Schibeci and I. Sorenson, *Elementary school children’s perceptions of scientists*, *School Science and Mathematics*. 83 (1): 14-19 (1983)
- [13] H. Türkmen, *Turkish primary students’ perceptions about scientist and what factors affecting the image of scientists*, *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 4(1), 55-61. (2008)
- [14] M.R.I. Odell, P. Hewitt, J. Bowman, W.J.Boone, *Stereotypical images of scientists: A cross-age study*, Paper presented at the 41st annual national meeting of the National Science Teachers Association, Kansas City, MO. (Apr, 1993)
- [15] K. D. Finson, *Applicability of the DAST-C to the images of scientists drawn by students of differerntial racial groups*, Paper presented at the annual regional meeting of the North Central Region Association for the Education of Teachers of Science, Madison, WI. (2001)
- [16] J.S. Berry and S.H. Picker, *Your pupils’ images of mathematicians and mathematics*, *Mathematics in School*, 29: 24-26 (2000)
- [17] Kosztolányi J., Kovács I., Pintér K., Urbán J., Vincze I., *Sokszínű matematika tankönyv 9*, Mozaik, 206 (2005)



- [18] Somfai Zs., *A matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai (5-12. évfolyam)* (2001 július)
- [19] *243/2003. (XII. 17.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról;* (9, 22, 41. old.)
- [20] Garey, M. R.; Graham, R. L.; Johnson, D. S., *The complexity of computing Steiner minimal trees*, SIAM J. Appl. Math. **32** (1977), no. 4, 835–859.
- [21] G. Robins and A. Zelikovsky, *Improved Steiner tree approximation in graphs*, in Proceedings of the 11th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2000), 2000, pp. 770–779.
- [22] Byrka, Jarosław, et al *An improved LP-based approximation for Steiner tree.*, STOC'10—Proceedings of the 2010 ACM International Symposium on Theory of Computing, ACM, New York, 583–592,
- [23] Dingzhu, Du and Hu, Xiaodong, *Steiner tree problems in computer communication networks*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008. xiv+359 pp
- [24] Prömel, Hans Jürgen; Steger, Angelika, *The Steiner tree problem. A tour through graphs, algorithms, and complexity* Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg Sohn, Braunschweig, 2002. viii+241 pp.
- [25] Hwang, Frank K., Richards, Dana S. and Winter, Pawel, *The Steiner tree problem* Annals of Discrete Mathematics, 53. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992. xii+339 pp.
- [26] [http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat\\_point.shtml](http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml), *The Fermat Point and Generalizations*, (Nov 20., 2011.)
- [27] Lewin, K., Dembo, T., Festinger, L. Sears, P.S. (1944). *Level of aspiration*. In Hunt, J.M. (Ed), *Personality and the behavior disorders. Vol. 1*. New York: Ronald Press, 333-344
- [28] <http://demonstrations.wolfram.com/SteinerNetworksForFourPoints> (2012, febr. 15.)
- [29] [http://en.wikipedia.org/wiki/Charlie\\_Eppes](http://en.wikipedia.org/wiki/Charlie_Eppes) (2012, március 20.)
- [30] <http://www.flickr.com/photos/scottgr/376657900/> (2012, március 10.)