Eredetiségi nyilatkozat

Alulírott RÉKASI ANNA (név)
KKL8PD (Neptun-kód) ezennel kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az

ELTE fizika - matematika osztatlan tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként, és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2023. 05. 01.

a hallgató aláírása

Szakdolgozat

Rékasi Anna

fizikatanár – matematikatanár

osztatlan tanári mesterszak

2023.

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

Természettudományi kar

Szakdolgozat

A geometriai megértési szintek megjelenése a közoktatásban első osztálytól az érettségiig a Van Hiele elmélet tükrében

Témavezető:
Dr. Szabó Csaba
egyetemi tanár

Készítette:
Rékasi Anna
fizikatanár – matematikatanár
osztatlan tanári mesterszak

2023.

Tartalom

1. Bevezetés

Szakdolgozatomban két témát járok körül részletesen. Dolgozatom első részében bemutatok két bizonyítást arra vonatkozóan, hogy a talpponti háromszög a legkisebb kerületű háromszög, ami beírható egy hegyesszögű háromszögbe. Ezen bizonyításokhoz saját készítésű ábrákat használtam illusztrációként.

Dolgozatom második részében a közoktatásban tanuló diákok geometriai megértési szintjeivel foglalkozom. Ehhez megvizsgáltam a jelenleg is hatályban lévő Nemzeti Alaptanterv és a hozzá tartozó Kerettantervek geometriára vonatkozó részeit, az elmúlt évek matematika érettségi feladatai közül az emelt szinten geometriával foglalkozó feladatokat, továbbá korábbi, ilyen irányba mutató vizsgálatokat is. Kutatásomban a geometriai megértési szinteket a Van Hiele elmélet alapján tekintettem át, majd ezzel vetettem össze a további vizsgált dokumentumokat. Ezen témából 2021-ben megjelent témavezetőmmel egy közösen publikált cikkem angol nyelven a következő kiadványban: Éva Vásárhelyi & Johann Sjuts (Hrsg.): Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken. A cikk címe Modification of the geometry curriculum in relation to the curriculum reform in the light of the Van Hiele levels (Rékasi, Szabó, 2021).

Az osztatlan tanárképzésben eltöltött 12 félévem alatt kezdetben kísérleti alanyként, később pedig kutatóként részt vettem több különböző kutatásban, vizsgálatban. Másodéves korom óta több kutatással is részt vettem kari- és országos TDK konferenciákon, tartottam előadást a 2020-ban megrendezett Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások konferencián, valamint tagja vagyok a Matematika Tanuláselméleti és Pszichológiai Kutatócsoportnak. A kutatócsoportba való bekerülésem óta szívesen foglalkoztam kutatásokkal, érdekelt, hogy valami újat, valami érdekeset vizsgáljunk.

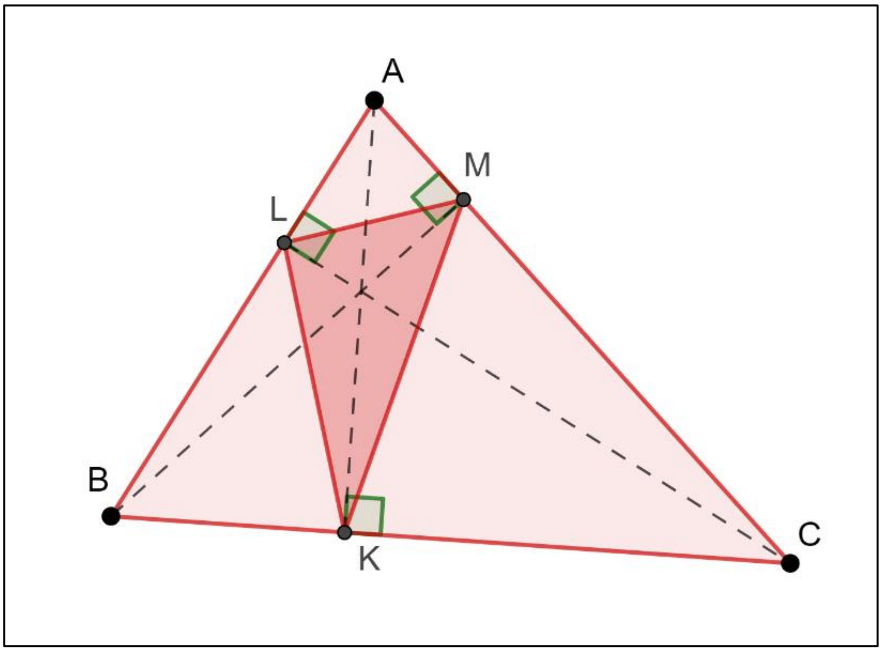
Kezdetben a matematikai problémafelvetéssel, feladatkészítéssel foglalkoztam Stirling Annával közösen. Ez után, ahogyan közeledtem a valódi tanításhoz, egyre több téma elkezdett érdekelni. A Matematika Tanuláselméleti és Pszichológiai Kutatócsoport néhány tagja korábban foglalkozott már a Van Hiele elmélettel, számos érdekességet hallottam tőlük a témáról. Ezért is választottam ezt a témát már 2020-ban, hogy ezen a vonalon folytassam kutatásomat. Ezen téma kapcsán alaposan beleástam magamat a közoktatásban megjelenő geometria tananyag részleteibe. Így jött az ötlet, hogy szakdolgozatom másik része is geometriai jellegű legyen, amin belül végül egy, a háromszögekre vonatkozó érdekes, és talán kevéssé ismert összefüggés, állítás két különböző bizonyítását mutatom be hegyesszögű háromszögekre.

Nagyon érdekes volt számomra mind a bizonyítások elkészítése, a megfelelő segédábrák megszerkesztése, mely során nagyon sokat tanulhattam a megfelelő számítógépes programok használatáról. Ezen kívül nagyon érdekesnek és hosszú távon is hasznosnak tartom, hogy ilyen részletesen megismerhettem a Van Hiele elméletben szereplő geometriai megértési szinteket, melyek bár széles körben elfogadottak és ismertek, mégis úgy vélem, hogy nem feltétlenül tudjuk, hogy ezek milyen pontosan megjelennek a Nemzeti Alaptantervben és a hozzá tartozó Kerettantervekben is.

2. A talpponti háromszög

Lássuk be, hogy a talpponti háromszög a legkisebb kerületű háromszög, ami beírható egy hegyesszögű háromszögbe. A következőkben két különböző bizonyítást fogok bemutatni.

Mi az a talpponti háromszög? Tekintsünk egy ABC általános háromszöget. Az ABC háromszög talpponti háromszöge az a háromszög, melynek csúcsai az ABC háromszög magasságvonalainak oldalaival vett metszéspontjai. (1. ábra)

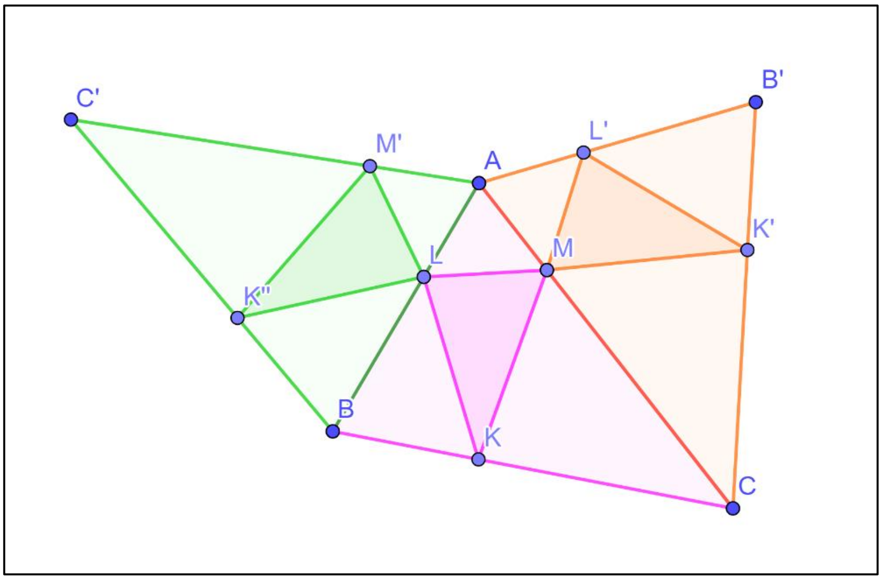


1. ábra – A talpponti háromszög

2.1. Első bizonyítás

Adott egy ABC általános háromszög. Legyen az ABC háromszög A csúcsnál lévő szöge α. Tekintsük az ABC háromszögbe írt KLM háromszöget, melynek K csúcs a BC oldalon, L csúcsa az AB oldalon, M csúcsa pedig az AC oldalon helyezkedik el. Az ilyen KLM háromszögek közül keressük a minimális kerületűt. Szeretnénk belátni, hogy ez a minimális kerületű KLM háromszög éppen az ABC háromszög talpponti háromszöge.

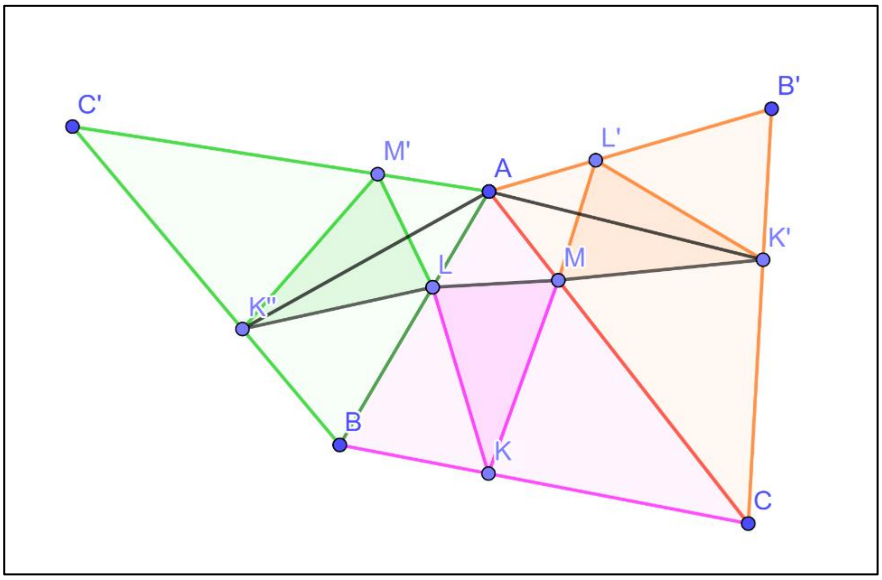
Tükrözzük az ABC háromszöget az AB oldal egyenesére. Legyenek K és M így kapott képei K' és L', C csúcs képe pedig C'. Ez után tükrözzük az eredeti ABC háromszöget az AC oldal egyenesére. Legyenek K és M így kapott képei K'' és L'', B csúcs képe pedig B'. (2. ábra) Ennek a két tükrözésnek az eredményét tekinthetjük úgy, mintha a K' pontot elforgattuk volna 2α szöggel. Két tükrözés szorzata egy elforgatás. Ez alapján látszik, hogy AK' és AK'' szakaszok egyenlő hosszúságúak.



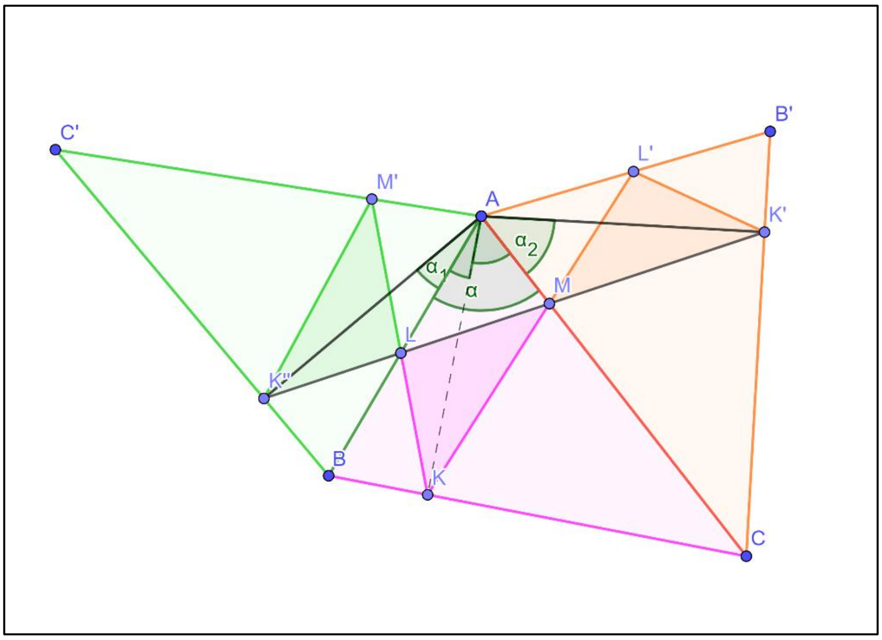
2. ábra – Két tengelyes tükrözés

A $K''MLK'$ töröttvonal éppen KLM háromszög kerülete, mivel K' és K'' pontokat K pont tükrözésével kaptuk. (3. ábra) Mivel ennek a kerületnek minimálisnak kell lennie, ezért olyan beírt háromszöget tekintsünk, melyre teljesül, hogy $K''MLK'$ töröttvonal éppen egy egyenes szakasz. Így kapunk egy olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek szárai AK' és AK'', alapjával szemközti szöge pedig 2α. Az A csúcsnál így kapott szög nagysága a következő módon látható: Jelölj a BAK szöget α_1, a KAC szöget α_2. Ekkor igaz, hogy $\alpha_1 +$

$\alpha_2 = \alpha$, és a tengelyes tükrözések miatt teljesül, hogy CAK' szög éppen α_2, $K''AB$ szög pedig éppen α_1. Így a $K''AK'$ szögre igaz, hogy $\alpha_1 + \alpha + \alpha_2 = 2\alpha$. (4. ábra)



3. ábra – A töröttvonal



4. ábra – Az elforgatás szöge

Tekintsük a $K''AK'$ egyenlő szárú háromszöget. Mivel ezen háromszögben az alappal szemközti szög 2α, így akkor lesz alapja minimális, ha szárai is minimális hosszúságúak. Szárainak K' és K'' végpontjai biztosan a BC' és a $B'C$ szakaszokon helyezkednek el, ezért az egyenlő szárú háromszög száraira teljesül, hogy AK' éppen akkor lesz minimális, ha a K' pont úgy helyezkedik el a BC' oldalon, hogy $AK'C'$ szög derékszög. Mivel K' pontot K pont

AB oldal egyenesére való tükrözésével kaptuk, ezért ekkor K az eredeti ABC háromszög BC oldalához tartozó magasságának talppontja. Hasonlóan a másik szárral is beláthatjuk, de ez most nem szükséges a bizonyításhoz.

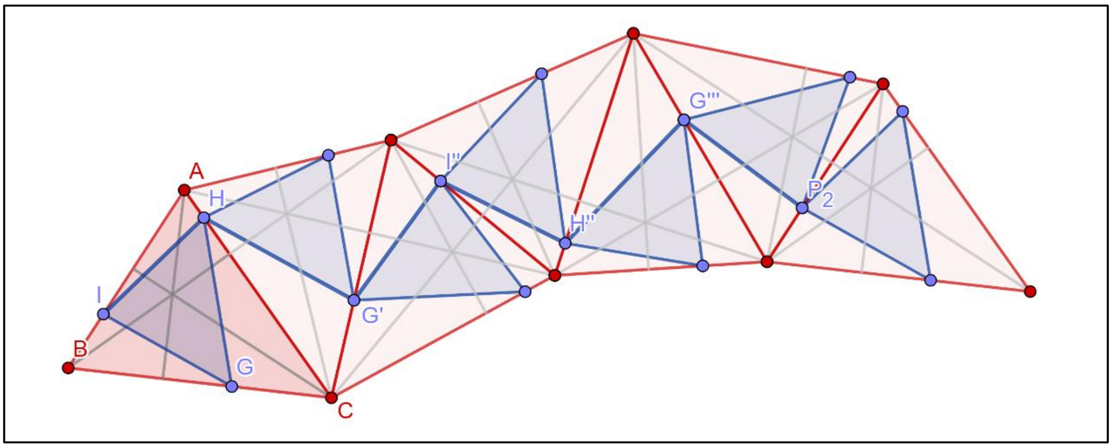
Ha elvégezzük ugyanezen lépéseket, csak először az AC oldal egyenesére tükrözzük a háromszöget, majd BC oldal egyenesére, akkor hasonlóan kapjuk, hogy M pont az ABC háromszög AC oldalához tartozó magasságának talppontja. Ehhez hasonlóan kapjuk azt is, hogy L pont az ABC háromszög AB oldalához tartozó magasságának talppontja. Ez utóbbinak igazolásához az ABC háromszöget először az AC, majd a BC oldalak egyeneseire kell tükröznünk.

2.2. Második bizonyítás

Ezen bizonyítás elvégzéséhez szakirodalomként használtam H. S. M. Coxeter és S. L. Greitzer Geometry Revisited című művét (Coxeter, Greitzer, 1967).

Adott egy ABC általános háromszög. Tekintsük az ABC háromszögbe írt GHI háromszöget, melynek G csúcsa a BC oldalon, H csúcsa az AC oldalon, I csúcsa pedig az AB oldalon helyezkedik el.

Tükrözzük az ABC háromszöget az AC oldal egyenesére. B pont így kapott képe legyen B', G pont képe G', I pont képe I'. Ez után tükrözzük a kapott $AB'C$ háromszöget az $B'C$ oldal egyenesére. A pont így kapott képe legyen A', H pont képe H', I' pont képe I''. Tükrözzük a kapott $A'B'C$ háromszöget az $A'B'$ oldal egyenesére. C pont így kapott képe legyen C', H' pont képe H'', G' pont képe G''. Tükrözzük a kapott $A'B'C'$ háromszöget az $A'C'$ oldal egyenesére. B' pont így kapott képe legyen B'', G'' pont képe G''', I'' pont képe I'''. Tükrözzük a kapott $A'B''C'$ háromszöget az $B''C'$ oldal egyenesére. A' pont így kapott képe legyen A'', I''' pont képe I'''', H'' pont képe H'''. Ez után tükrözzük a kapott $A''B''C'$ háromszöget az $A''B''$ oldal egyenesére. C' pont így kapott képe legyen C''. Nevezzük I'''' pontot P_2 pontnak (5. ábra).



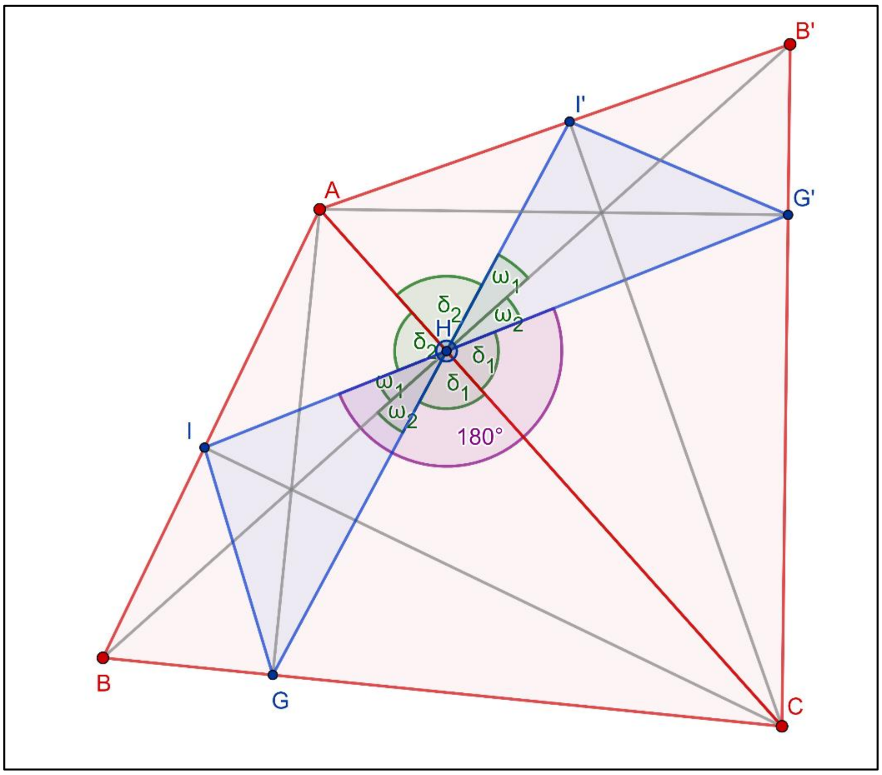
5. ábra – Hat tengelyes tükrözés

A hat tengelyes tükrözés egymás utáni elvégzésével kapjuk, hogy az $IHG'I''H''G'''P_2$ töröttvonal hossza éppen az ABC háromszögbe beírt GHI háromszög kerületének kétszerese. Ez abból adódik, hogy a tükrözésekkel kapott megfelelő szakaszok egyenlő hosszúak. Jelölje az IH szakasz hosszátt g, a HG szakasz hosszát i, az IG szakasz hosszát pedig h. Ekkor teljesül, hogy az első tükrözés miatt HG' szakasz hossza éppen i, az első két tükrözés miatt $G'I''$ hossza h, az első három tükrözés miatt $I''H''$ hossza g, az első négy tükrözés miatt $H''G'''$ hossza i, az első öt tükrözés miatt $G'''P_2$ hossza pedig h. Így ezen töröttvonal hossza $g + i + h + g + i + h = 2 \cdot (g + i + h) = 2 \cdot K_{GHI\Delta}$. Az $IHG'I''H''G'''P_2$ töröttvonal hossza akkor minimális, ha ez éppen egy egyenes, azaz ha a töröttvonal megegyezik az IP_2 szakasszal.

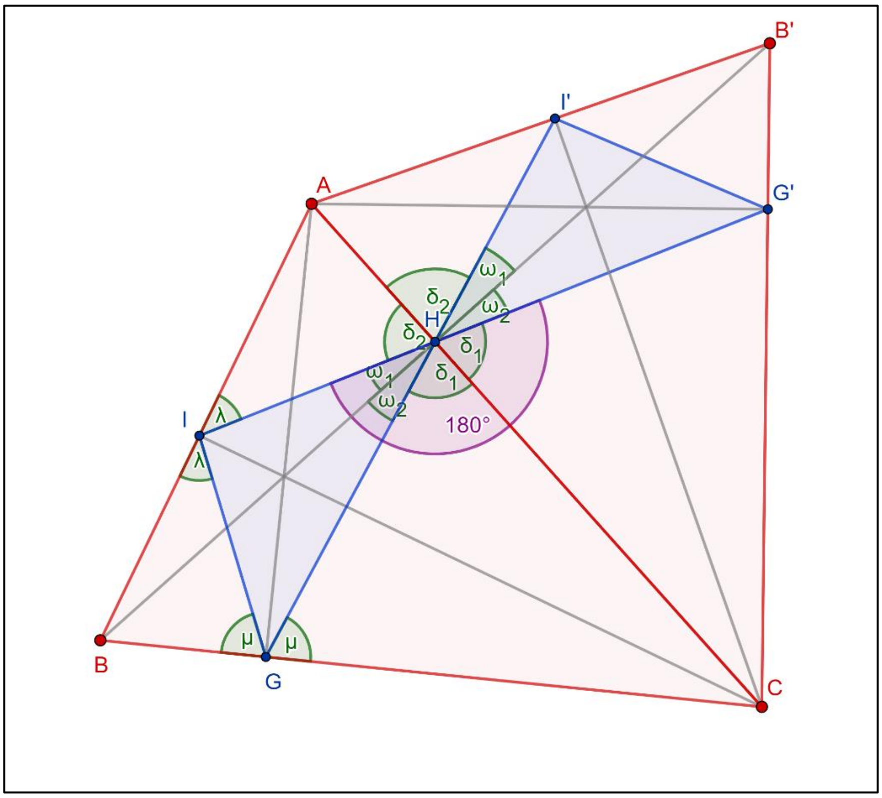
Ezen hat tengelyes tükrözés szorzata felírható eltolásként, mert ezek a tengelyes tükrözések felírhatók elforgatásokként, mely elforgatások szögeinek összege jelen esetben $\alpha + \beta + \gamma + \alpha + \beta + \gamma = 360°$, ahol α, β és γ az eredeti ABC háromszög belső szögei, ezért összegük 180°.

Ekkor az eltolással I pont képe $I'''' = P_2$ pont lesz. Ebből adódik, hogy az eltolás mértéke éppen az IP_2 szakasz hosszával egyenlő. A fenti megállapítással tehát látható, hogy a minimális kerületű beírt GHI háromszög kerületének kétszerese lesz az eltolás mértéke.

Vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz az IHG' töröttvonal egy egyenes szakasz. A tükrözés miatt a GHC szög megegyezik $CHG'\sphericalangle$ szöggel. Jelöljük ezeket δ_1-val. Ekkor H-nál ω_1+$\omega_2 + 2 \cdot \delta_1 = 180°$. Hasonlóan adódik, hogy $I'HA\sphericalangle = AHI\sphericalangle = \delta_2$ és így ω_1+$\omega_2 + 2 \cdot \delta_2 = 180°$. A jelölések a 6. ábrán láthatóak (6. ábra). Ekkor adódik, hogy $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Hasonlóan belátható, hogy a $HIA\sphericalangle$ szög megegyezik a $BIG\sphericalangle$ szöggel és $IGB\sphericalangle$ szög megegyezik a $CGH\sphericalangle$ szöggel (7. ábra).

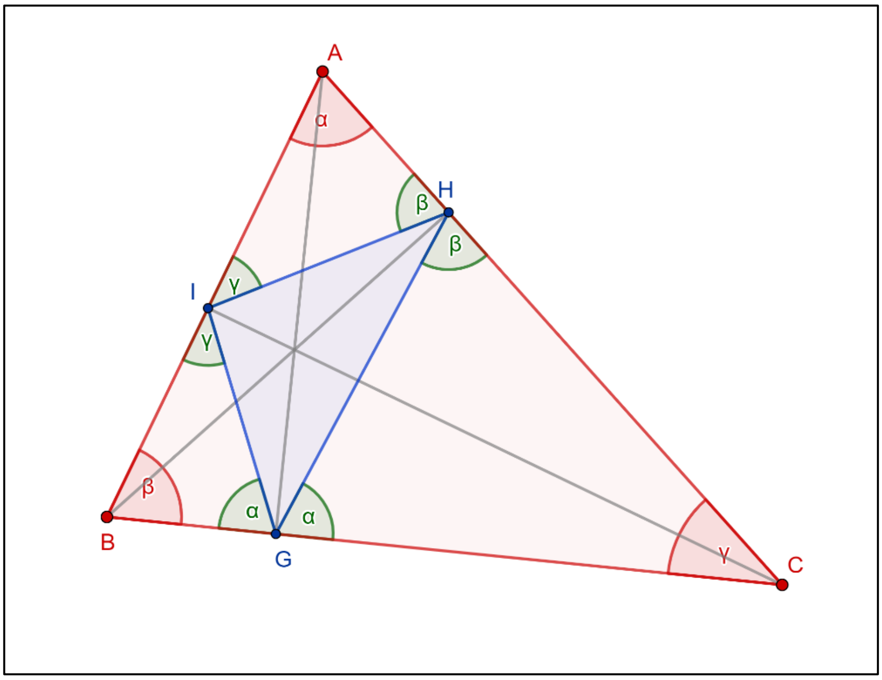


6. ábra – A töröttvonal első két szakasza



7. ábra – Szögek egyenlősége

Az AHI háromszögben teljesül, hogy $\delta + \lambda = 180° - \alpha$ (I.). Hasonlóan a BIG háromszögben $\mu + \lambda = 180° - \beta$ (II.) és a CHG háromszögben $\delta + \mu = 180° - \gamma$ (III.). Tekintsük az (I.) (II.) és (III.) egyenletekből álló három ismeretlenes egyenleterendszert, melyben az ismeretlenek δ, μ és λ. Ezt az egyenletrendszert megoldva adódik, hogy $\delta = \beta$, $\mu = \alpha$ és $\lambda = \gamma$. (8. ábra)



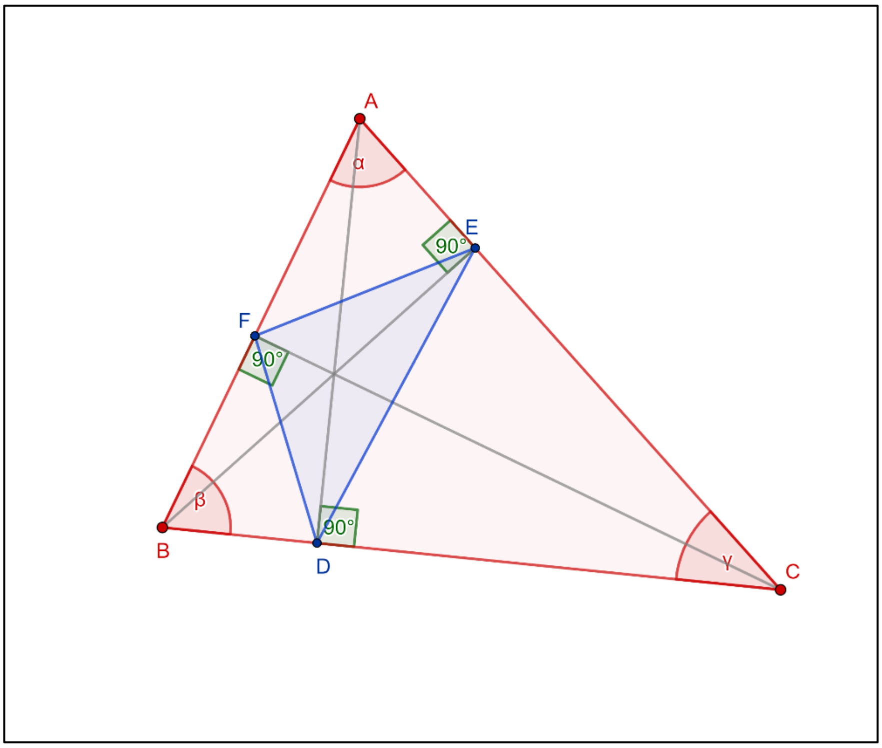
8. ábra – Szögek közötti összefüggések

Innen két különböző módon folytathatjuk a bizonyítást:

(1.) Tekintsük az ABC háromszög talpponti háromszögét. Jelölje ennek a BC oldalon elhelyezkedő csúcsát D, az AC oldalon elhelyezkedő csúcsát E és az AB oldalon elhelyezkedő csúcsát F (9. ábra). Mivel $CDA\sphericalangle = BEC\sphericalangle = 90°$, ezért AC szakasz merőleges vetítése a BC oldal egyenesére a DC szakasz, CB szakasz merőleges vetítése az AC oldal egyenesére pedig az EC szakasz. Ebből adódik, hogy $|\overline{AC}| \cdot x = |\overline{DC}|$ és $|\overline{BC}| \cdot x = |\overline{EC}|$, ahol $x = \cos(\gamma)$. Ebből kapjuk, hogy az ABC háromszög hasonló a DEC háromszöghöz. A két háromszög hasonlóságából adódik, hogy $CDE\sphericalangle = \alpha$ és $DEC\sphericalangle = \beta$. Hasonlóan belátható, hogy $AEF\sphericalangle = \beta$, $EFA\sphericalangle = \gamma$, $BFD\sphericalangle = \gamma$, és $FDB\sphericalangle = \alpha$.

Ezen összefüggések és az (I.), (II.), (III.) egyenletekből álló egyenletrendszerből kapottak alapján adódik, hogy a GHI háromszög oldalai párhuzamosak a DEF háromszög oldalaival. Ez pontosan akkor teljesül, ha $G = D$, $H = E$, $I = F$, mert a két háromszög az ABC

háromszögbe írt háromszögek. Ekkor tehát a vizsgált GHI háromszög éppen az ABC háromszög talpponti háromszöge.



9. ábra – Szögek a talpponti háromszögben

(2.) Amennyiben a fentebb kifejtett ötlet nem jut eszünkbe, akkor alkalmazhatunk háromszögek hasonlóságára vonatkozó összefüggéseket azonnal is. Az (I.), (II.) és (III.) egyenletekből álló egyenletrendszer fenti megoldásai alapján kapjuk, hogy vannak az ABC háromszöghöz hasonló háromszögeink: $ABC\Delta \sim GHC\Delta$, $ABC\Delta \sim AHI\Delta$, és $ABC\Delta \sim GBI\Delta$. Ezen három hasonlóságból adódik, hogy:

$ax = a_1$

$bx = b_1$

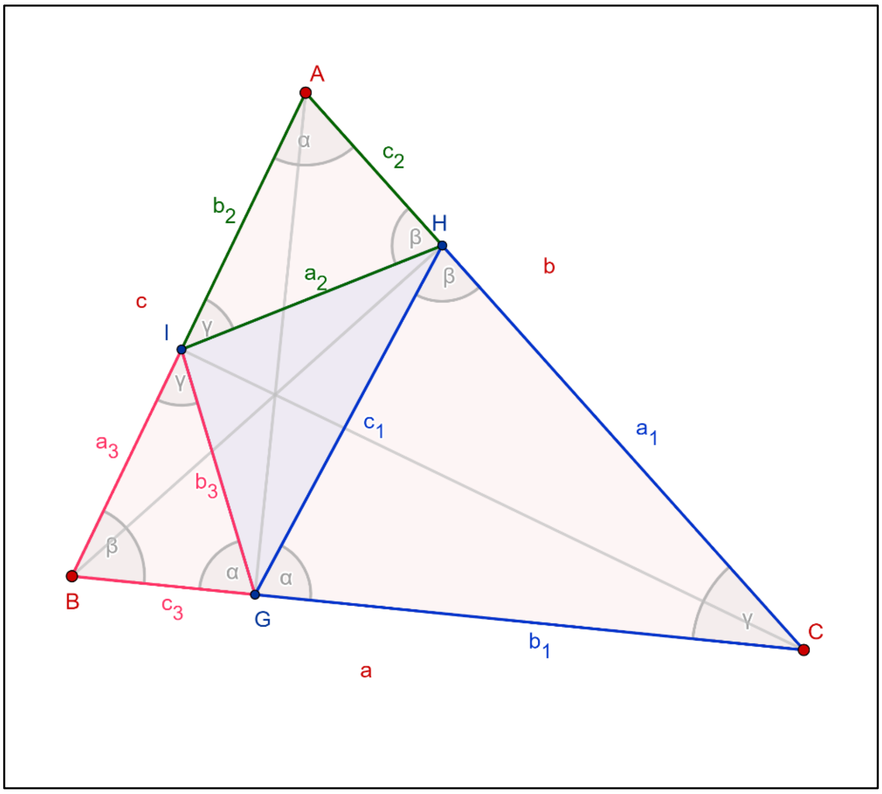
$by = b_2$

$cy = c_2$

$az = a_3$

$cz = c_3,$

ahol $|\overline{AB}| = c$, $|\overline{AC}| = b$, $|\overline{BC}| = a$, $|\overline{CH}| = a_1$, $|\overline{CG}| = b_1$, $|\overline{AI}| = b_2$, $|\overline{AH}| = c_2$, $|\overline{BI}| = a_3$, és $|\overline{BG}| = c_3$. x, y, és z pedig a hasonlóságok arányai. (10. ábra)



10. ábra – Hasonló háromszögek

Ekkor teljesül, hogy $b_1 + c_3 = a$, $a_1 + c_2 = b$, és $a_3 + b_2 = c$. Behelyettesítve: $b \cdot x + c \cdot z = a$, $a \cdot x + c \cdot y = b$, és $a \cdot z + b \cdot y = c$. Ezen egyenletek alapján $c \cdot z = a - b \cdot x$ és $c \cdot y = b - a \cdot x$. Az $a \cdot z + b \cdot y = c$ egyenletet c-vel szorozva és az előbbi összefüggéseket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$a^2 - abx + b^2 - abx = c^2 \text{ (IV.)}$$

Az ABC háromszögre felírva a koszinusztételt:

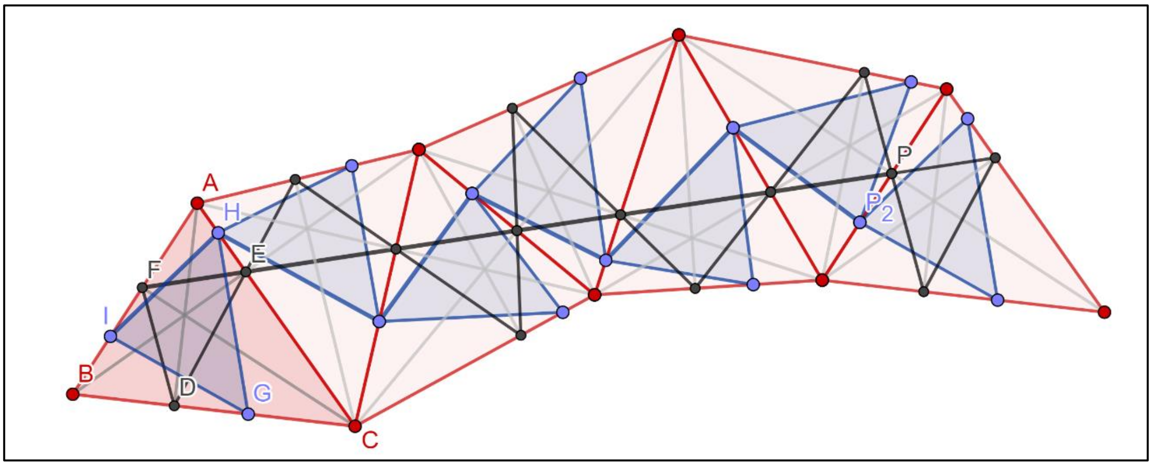
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \text{ (V.)}$$

(IV.) és (V.) egyenleteket egymásból kivonva majd rendezve kapjuk, hogy $x = \cos(\gamma)$. Ekkor tehát fennáll, hogy $a \cdot \cos(\gamma) = a_1$, ami azt jelenti, hogy a_1 az a oldal merőleges vetülete, azaz $BHC\sphericalangle$ szög éppen 90°. Hasonlóan igazolható, hogy $CGA\sphericalangle = 90°$ és $CIA\sphericalangle = 90°$. Ez azt jelenti, hogy $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, és $\overline{CI}$ szakaszok az ABC háromszög magasságai. Ekkor a GHI háromszög az ABC háromszög talpponti háromszöge.

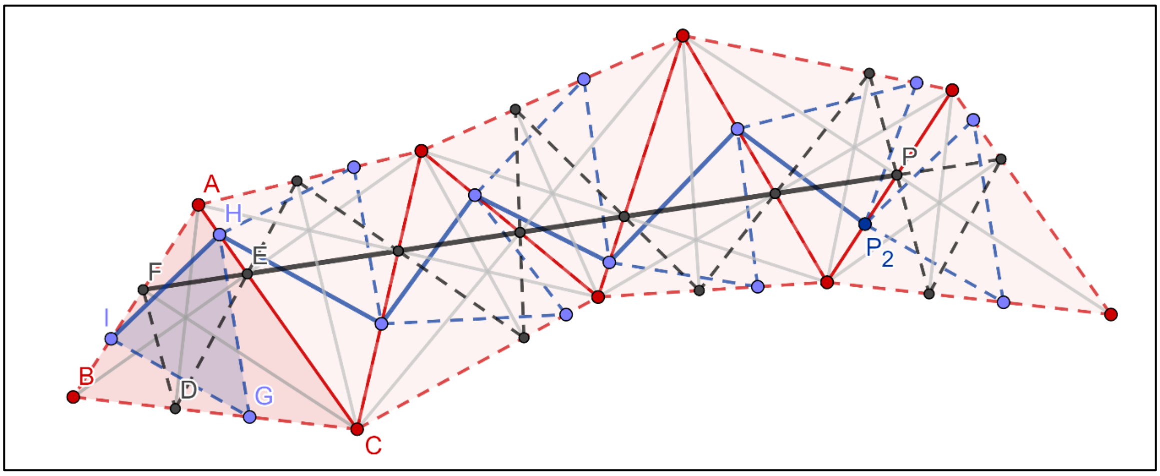
Hasonlóan adódik, hogy az ABC háromszög talpponti háromszögével teljesül a teljes $IHG'I''H''G'''P_2$ töröttvonal egyenessége.

Az $IHG'I''H''G'''P_2$ töröttvonal hossza tehát pontosan akkor minimális, azaz akkor egyezik meg az IP_2 szakasszal, ha a GHI háromszög az ABC háromszög talpponti háromszöge. Ez lesz tehát a minimális kerületű háromszög, mely beírható az ABC háromszögbe.

Az 9. és 10. ábrákon látható egy olyan GHI beírt háromszög, mely nem a talpponti háromszög, illetve az EFG talpponti háromszög, valamint az ezen háromszögekkel kapott töröttvonalak is. (11. és 12. ábra).



11. ábra – Két beírt háromszög



12. ábra – A beírt háromszögek kétszeres kerületei

2.3. Összegzés

Dolgozatom első részében bemutattam egy matematikai összefüggés, állítás két különböző bizonyítását. Az állítás, hogy a talpponti háromszög a legkisebb kerületű háromszög, ami beírható egy hegyesszögű háromszögbe.

Az első bizonyítás során az eredeti háromszöget tükrözzük két tetszőleges oldalára. Ezen tükrözések segítségével kapunk egy olyan töröttvonalat, melynek hossza éppen az eredeti háromszögbe beírt tetszőleges háromszög kerülete. A töröttvonal hosszának minimalizálásával, azaz feltételezve, hogy a töröttvonal egy egyenes, megkapjuk, hogy az eredeti háromszögben a tükrözések tengelyeként felhasznált egyenesekre illeszkedő oldalak által közrezárt csúcsot és a beírt háromszög szemközti csúcsát összekötő szakasz éppen az eredeti háromszög egyik magassága. Hasonlóan bizonyíthatjuk a háromszög másik két csúcsára is ezen összefüggést.

A második bizonyításban egymás után hat tengelyes tükrözést végzünk el olyan módon, hogy így kapunk egy töröttvonalat, melynek hossza a beírt háromszög kerületének kétszerese. Ez után a töröttvonal hosszának minimalizálása következik, melynek eredményeként egy egyenest kapunk. Ez után belátható, hogy ekkor a beírt háromszög éppen a talpponti háromszög. Ezen bizonyítás során háromszögek hasonlóságát és különböző szögek összegeire vonalkozó összefüggéseket is felhasználtam.

Nagyon érdekesnek találtam, hogy egy ilyen egyszerűnek tűnő állításra két ennyire különböző bizonyítás adható.

3. A geometriai megértési szintek megjelenése a közoktatásban a Van Hiele elmélet tükrében

Dolgozatom következő része a 2021-ben megjelent Modification of the geometry curriculum in relation to the curriculum reform in the light of the Van Hiele levels (Rékasi, Szabó, 2021) című, témavezetőmmel közösen publikált angol nyelvű cikkem magyar fordítása kisebb változtatásokkal.

3.1. Absztrakt

Ezen dolgozatban megvizsgáljuk a magyarországi matematikaoktatáson belül a geometriaoktatás szintjeit. Összehasonlítjuk a Nemzetia Alaptantervet és a hozzá tartozó Kerettanterveket az érettségi vizsga megfelelő részeivel geometriai szempontból, mely összehasonlítás eszközeként a Van Hiele elméletben szereplő geometriai megértési szinteket használjuk fel. Megfigyeltük, hogy az érettségi vizsga geometriai feladatai nem követik a Nemzeti Alaptanterv által előírt megértési szintet. Ezeket a megfigyeléseinket összehasonlítjuk az elsőéves matematika tanárszakos hallgatók Usiskin tesztjeinek eredményeivel.

3.2. Bevezetés

A 2014/15-ös és a 2020/21-es tanévek mérföldkőnek mondhatóak a Magyar matematikaoktatás területén. A 2014/15-ös tanévben megváltozott az érettségi felépítése, a 2020/21-es tanévben pedig bevezetésre került a 2020-as új Nemzeti Alaptanterv (NAT 2020). A magyar középfokú matematikaoktatásban nagy szerepet kap a geometria. Ezt mutatja az is, hogy a középiskolai, gimnáziumi matematika tananyag mintegy 35%-át a geometria tananyag teszi ki. Hasonlóan hangsúlyosak ezek a témakörök az érettségi vizsgán is. Mindezek fényében úgy gondolom, hogy releváns és hasznos megvizsgálni a kapcsolatot a geometriai van Hiele szintek, az új Nemzeti Alaptanterv és az érettségi vizsga között.

Egy hasonló vizsgálatot folytattak Muzsnay Anna és tsai 2015-ben (Muzsnay és mtsai., 2020). Bemutatták a magyar középfokú oktatásban a geometriai megértés szintjeit. Kutatásuk célja volt, hogy felmérjék, a középfokú oktatásban tanuló diákok mely geometriai megértési szinten vannak. Különös figyelmet fordítottak arra, hogy ez mennyire van párhuzamban azzal, amit a 2012-es Nemzeti Alaptanterv elvár a diákoktól (NAT 2012). A geometria tananyag és a tantervi szabályozások által elvárt geometriatudás alapos összehasonlításához segítséget nyújtott számunkra az az egybeesés, hogy a kutatásuk éppen az érettségi változtatásának évében folyt. Muzsnay és tsai a Van Hiele szintek használatával vizsgálták, hogy a diákonak hogyan fejlődik a középfokú oktatás során a geometriatudásuk. Egyik legfőbb kérdésük volt, hogy a tanulók eljutnak-e 12. évfolyamon a Van Hiele elmélet szerinti 4. szintre, mely a bizonyítás szintje. Öt különböző középfokú oktatási intézmény 342 diákjával töltették ki az Usiskin tesztet (Usiskin, 1982). Ennek segítségével vizsgálták, hogy a résztvevők mely Van Hiele szinten vannak. A kutatást a 2015/2016-os iskolai tanévben végezték.

Megállapították, hogy a középiskolás korú diákok átlagos geometriatudása a Nemzeti Alaptanterv által elvárt szint alatt marad, és ez az átlag nem változik 9. és 12. évfolyam között. Ennek a feltételezett oka lehet, hogy a diákok a középfokú tanulmányaik során főként az érettségi vizsgára készülnek, melyre a 12. évfolyam végén kerül sor. Bár az érettségi vizsgán a feladatok 30 százaléka geometriai, mégis ezeknek a problémáknak a nagy része nem igényel magasabb szintű geometriai ismereteket. Ezen vizsgálatukon túl Muzsnay és tsai megvizsgálták az elsőéves matematika tanárszakos hallgatók Van Hiele szintjét is.

Az új Nemzeti Alaptanterv megjelenése miatt nem vizsgálták újra a középfokú oktatásban tanuló diákok geometria tudását. Azonban minket foglalkoztatott, hogy történtek-e ennek fényében valamilyen változások.

A következőkben lépésről lépésre áttekintjük a szükséges és a feltételezett geometriai ismereteket a magyar közoktatásban. Bemutatásra kerül a 2020-as új Nemzeti Alaptanterv és a hozzá tartozó Kerettantervek (Kerettanterv, 2020) geometriai része. Összevetjük az diákoktól elvárt, feltételezett geometriai ismereteiket a Van Hiele elméletben megfogalmazott geometriai megértési szintekkel. Muzsnay Anna és tsai ötlete alapján (Muzsnay és mtsai., 2020) kategorizáljuk az érettségi vizsgában megjelenő geometriai problémákat. A kategóriák alapjául vesszük, hogy melyik feladat, feladatrész milyen Van Hiele szintet vár el a megoldótól. Végül bemutatjuk a magyar matematika tanárszakos hallgatók Van Hiele szintjeit az Usiskin teszt alapján.

3.3. A Van Hiele szintek és a Kerettanterv

A Nemzeti Alaptanterv tartalmazza a matematika tananyagot a következő tagolás szerint: Milyen tanagyagokat kell elsajátítania a diákoknak 1-4., 5-8. és 9-12. évfolyamokon. Ezen túl kitér az elvárt tanulói kompetenciákra is. A Kerettantervek, melyek a Nemzeti Alaptantervhez illeszkedő tartalmi szabályozók, felosztja a Nemzeti Alaptanterv vonatkozó részeit és két éves intervallumokra tagolja a közoktatás időtartamát. A Kerettanterv javaslatot tesz az egyes témakörökre fordítandó óraszámokra is. Ez a javaslat lehetővé tesz bizonyos fokú rugalmasságot is az egyes intézmények, pedagógusok számára. Az intézmények lokálisan megtervezik a tanmenetet, melyet a pedagógusok még hozzáigazítanak saját osztályaikhoz, csoportjaikhoz. 12. évfolyam végén a diákok érettségi vizsgát tesznek, mely nem csak középfokú tanulmányaik lezárását jelenti, de egyben egy felvételi vizsgaként is szolgál az egyetemekre, felsőoktatási intézményekbe.

A Van Hiele szintek széles körben ismertek és elfogadottak. Egy minél pontosabb és átfogóbb szemléltetés érdekében a szinteknek két különböző leírását fogjuk bemutatni. AZ első a szabványos, megszokott, a másik pedig Burger és Shaughnessy értelmezése (Burger, Shaughnessy, 1986). A legjelentősebb különbség a két leírás között, hogy az utóbbi tételesen, részletesebben és hangsúlyosabban kifejti, hogy mit nem tudnak még az adott szinten lévő diákok. Az egyes Van Hiele szinteket elemekre bontva az 1. táblázat tartalmazza, összefoglalásaik pedig a következőkben olvashatóak.

Level 1: Ráismerés

Ezen a kezdeti szinten a diákok felismerik az alakzatokat ábrák alapján és egy egységként kezelik ezeket. Az alakzatokat teljes egészében látják, nem különböztetik meg ezek részeit vagy tulajdonságait. Ezen a szinten észleléseik alapján döntenek, nem pedig érveléssel. Másrészt meg tudják tanulni a geometriai fogalmakat, azonosítják a formákat, le tudnak másolni adott mintákat. Azonban ezen a szinten még nem ismerik fel a formák egyes részeit, így azok tulajdonságait sem.

Level 2: Vizsgálódás

Ezen a szinten megkezdődik a geometriai elgondolások elemzése. Pédául a diákok ezen a szinten már össze tudják gyűjteni az alakzatok tulajdonságait, de még nem látják köztük az összefüggéseket. Felismerik, hogy az alakzatoknak vannak részei és felismerik az alakzatokat a részeik alapján. Általában ismerik az alakzatok tulajdonságait, de még nem tudják, hogy mely tulajdonságok szükségesek és melyek elegendőek az adott alakzat leírásához. Az alakzatok közötti teljes összefüggésrendszert még nem ismerik, a definíciókat még nem értik ezen a szinten.

Level 3: Rendszerezés

A 3. szinten a diákok már rendszerben látják a tulajdonságokat és az alakzatokat, következtetéseket tudnak levonni az alakzatok tulajdonságai alapján (például egy négyszögben a szemközti szögek egyenlősége szükségessé teszi, hogy a szemközti oldalak egyenlőek legyenek). Hasonlóan tudnak következtetéseket levonni ábrák alapján is (a téglalap paralelogramma, mert rendelkezik a paralelogramma összes tulajdonságával). Tehát ezen a szinten már értik a csoportosításokat, a definíciók jelentéssel bírnak. Képesek informálisan alátámasztani érveiket. Azonban ezen a szinten a diákok még nem értik a formális levezetések szerepét és jelentőségét.

Level 4: Következtetés

A 4. szint a formális következtetések szintje. A tanulók ekkor már el tudnak végezni egyszerűbb bizonyításokat (nem csak megjegyezni ezeket), értik az axiómák, tételek, definíciók, bizonyítások közti különbséget. Ismerik a szükséges és elégséges feltételek jelentését. Látják, hogy lehetséges egy bizonyítást több különböző módon is elvégezni és különbséget tehetnek állítás és megfordítása között is.

Level 5: Formális logika

Ez a legabsztraktabb szint. Az a személy, aki ezen a szinten van, ő már különböző geometriai axiómarendszerekben gondolkozik. Az 5. szinten lévő tanulók már értik az indirekt- és a teljes indukciós bizonyításokat, értik a nem-euklideszi geometriai rendszereket.

Fontos megemlíteni, hogy az 5. van Hiele szintnél felmerül, hogy valóban egy ide tartozó szintről beszélhetünk-e. Ezt a szintet szerencsére a középiskolás korosztály esetében nem kell vizsgálnunk, ez a szint az 1. Táblázatban sem kerül tárgyalásra.

Level	Szint leírása	NAT (2020)	Kerettanterv
1.	***„Level 0*** 1. Pontatlan tulajdonságokat használ az ábrák összehasonlításához és az alakzatok azonosításához, jellemzéséhez. 2. Korábban látott mintákra hivatkozik az alakzatok jellemzésekor. 3. Az alakzatok azonosításakor és leírásakor irreleváns tulajdonságokat vesz figyelembe, például az alakzat elhelyezkedése az oldalon. 4. Nem tudja elképzelni, hogy végtelenül sokféle alakzat van. 5. Következetlen rendezések, azaz nem közös	**1-4. osztály** „megkülönbözteti és szétválogatja szabadon választott vagy meghatározott geometriai tulajdonságok szerint a gyűjtött, megalkotott testeket, síkidomokat; megfigyeli az alakzatok közös tulajdonságát, megfelelő címkéket talál megadott és halmazokba rendezett alakzatokhoz; megtalálja a közös tulajdonsággal nem rendelkező alakzatokat;” (NAT, 2020) „kiválasztja megadott síkidomok közül a sokszögeket; megnevezi a háromszögeket, négyszögeket, köröket;” (NAT, 2020)	**1-2. oszt** 1. „Sokszögek elnevezése oldalak és csúcsok száma szerint” 2. „Sokféle alakú testek közül a gömb és a szögletes testek kiemelése érzékszervi tapasztalatok alapján” 4. „Háromszögek, négyszögek, körlapok felismerése, kiválogatása, megnevezése” 5. „Testek jellemző tulajdonságainak keresése, megfigyelése, megnevezése: sík vagy görbe felületek, „lyukas – nem lyukas”, „tömör”, „bemélyedése van”, „tükrös” (…) Síkbeli alakzatok jellemző tulajdonságainak keresése, megfigyelése, megnevezése: egyenes vagy görbe határvonalak, „lyukasság”, „szögek beugrása”, „tükrösség””

	tulajdonságok alapján való rendezés. 6. Nem tudja az alakzatok tulajdonságait az alakzat meghatározásához szükséges feltételekként kezelni. Például az alakzatokat túl kevés adat (nyom) után kitalálja (egy feladatban), mintha vizuálisan képzelné el a nyomok alapján.		6. „Válogatások előállított vagy megadott testek között szabadon” (Kerettanterv, 2020)
2.	***Level 1*** 1. Az alakzatok explicit összehasonlítása az egyes részeik tulajdonságai alapján. 2. Még nem tudja rendszerezni az alakzatok típusait,	**1-4. osztály** „megnevezi a téglatest lapjainak alakját, felismeri a téglatesten az egybevágó lapokat, megkülönbözteti a téglatesten az éleket, csúcsokat; tudja a téglalap oldalainak és csúcsainak számát, összehajtással megmutatja a téglalap szögeinek egyenlőségét;	**3-4. oszt** 1. „Testek, síkbeli alakzatok halmazokba rendezése közös tulajdonság alapján” 2. „Halmazokba rendezett testek, síkbeli alakzatok közös tulajdonságainak megfigyelése, halmazok címkézése” 3. „Testek, síkbeli alakzatok halmazokba

	például a négyszögeket. 3. Rendezés saját csoportosítás szerint, például az oldalak tulajdonságai alapján, miközben a szögeket és a szimmetriát figyelmen kívül hagyja, és hasonlók. 4. Alakzatok azonosításakor rengeteg szükséges tulajdonság felsorakoztatása az elegendő tulajdonságok meghatározása helyett. 5. A tulajdonságok explicit használatával írja le az alakzatokat a típusuk megnevezése helyett, akkor is, ha tudja a típusukat. Például a helyett, hogy téglalap, azt	megmutatja a téglalap azonos hosszúságú oldalait és elhelyezkedésüket, megmutatja és megszámlálja a téglalap átlóit és szimmetriatengelyeit; megfigyeli a kocka mint speciális téglatest és a négyzet mint speciális téglalap tulajdonságait; megnevezi megfigyelt tulajdonságai alapján a téglatestet, kockát, téglalapot, négyzetet;" (NAT, 2020)	rendezése közös tulajdonság alapján" 4. „Halmazokba rendezett testek, síkbeli alakzatok közös tulajdonságainak megfigyelése, halmazok címkézése" 5. „Előállított vagy megadott sokszögek jellemzése felismert tulajdonságokkal" 6. „Testek, síkbeli alakzatok jellemzése megfigyelt tulajdonságok alapján" 7. „Halmazokba rendezett testek, síkbeli alakzatok közös tulajdonságainak megfigyelése, halmazok címkézése" 8. „Négyzet kiemelése a téglalapok közül oldalai és szimmetriái alapján" (Kerettanterv, 2020)

	mondja, hogy olyan alakzat, melynek négy oldala van és minden szöge derékszög. 6. Elutasítja a tankönyvi definíciókat, helyettük saját személyes jellemzést ad az alakzatokról. 7. A geometriát fizikaként kezeli a tételek érvényességének vizsgálatakor. Például ábrákat készít és azokon keresztül végez megfigyeléseket. 8. Még hiányzik a matematikai bizonyítás megértése.		
3.	***Level 2*** 1. Az alakzattípusok teljes	**5-8. oszt** „ismeri a speciális négyszögeket: trapéz, paralelogramma, téglalap,	**5-8. oszt** 1. „A speciális négyszögek (trapéz, paralelogramma, téglalap, deltoid, rombusz, húrtrapéz, négyzet)

	definíciójának felépítése. 2. Képes alakítani a definíciókat, továbbá képes az új fogalmak definícióinak azonnali elfogadására és használatára. 3. Explicit hivatkozások a definíciókra. 4. Képes elfogadni egy adott definíció különböző formáit, más megfogalmazásait. 5. Az alakzatok típusai közti logikai sorrend elfogadása. 6. Képes az alakzatokat matematikailag pontos tulajdonságok alapján csoportosítani.	deltoid, rombusz, húrtrapéz, négyzet; (…) felismeri a síkban az egybevágó alakzatokat (…) ismeri a háromszögek tulajdonságait: belső és külső szögek összege, háromszög-egyenlőtlenség; ismeri a Pitagorasz-tételt és alkalmazza számítási feladatokban; ismeri a négyszögek tulajdonságait: belső és külső szögek összege, konvex és konkáv közti különbség, átló fogalma.” (NAT, 2020)	felismerése és legfontosabb tulajdonságaik megállapítása ábra alapján; alkalmazásuk; halmazábra” 3. „Négyszögek tulajdonságainak ismerete és alkalmazása: belső és külső szögek összege, konvex és konkáv közti különbség, átló fogalma” 5. „A speciális négyszögek (trapéz, paralelogramma, téglalap, deltoid, rombusz, húrtrapéz, négyzet) felismerése és legfontosabb tulajdonságaik megállapítása ábra alapján; alkalmazásuk; halmazábra” 6. „A speciális négyszögek (trapéz, paralelogramma, téglalap, deltoid, rombusz, húrtrapéz, négyzet) felismerése és legfontosabb tulajdonságaik megállapítása ábra

	7. A “ha, akkor” utasítások pontos használata. 8. Képes korrekt informális deduktív érvelésre, implicit módon használva olyan logikai formákat, mint a láncszabály (ha p-ből következik q és q-ból r, akkor p-ből is következik r). 9. Még nem teljesen tiszta az axiómák és a tételek szerepe.		alapján; alkalmazásuk; halmazábra” 7. „Pitagorasz-tétel ismerete és alkalmazása” (Kerettanterv, 2020)
4.	***Level 3*** 1. Kétértelmű kérdések tisztázása és a feladatok újrafogalmazása pontosabb nyelvezettel. 2. Rendszeres találgatások és kísérletek a sejtések deduktív igazolására.	**9-12. oszt** „ismeri és alkalmazza a háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmakat és tételeket; ismeri és alkalmazza a Pitagorasz-tételt és megfordítását; (…) ismeri és alkalmazza a Thalész-tételt és megfordítását (…)	**9-10. oszt** 1. „Szabályos sokszög területe átdarabolással” 2. „Szabályos sokszög területe átdarabolással” 3. „Az oldalfelező merőlegesek és a belső szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tétel bizonyítása (…)

	3. Egy matematikai tétel igazságának vizsgálatakor a bizonyításra való hagyatkozás. 4. A matematikai szövegekben szereplő komponensek szerepének megértése, mint axiómák, definíciók, tételek, bizonyítások. 5. Az euklideszi geometria alapelveinek elfogadása.“ *(Burger, Shaughnessy, 1986)*	ismeri és alkalmazza a hasonló síkidomok kerületének és területének arányára vonatkozó tételeket; (…) ismeri és alkalmazza a hasonló testek felszínének és térfogatának arányára vonatkozó tételeket.” (NAT, 2020)	A Pitagorasz-tétel bizonyítása” „Konvex sokszögeknél az átlók számára, a belső és külső szögösszegre vonatkozó tételek ismerete, bizonyítása és alkalmazása” „A Thalész-tétel bizonyítása” 4. „A háromszög nevezetes vonalaira, pontjaira és köreire vonatkozó fogalmak, tételek ismerete és alkalmazása: oldalfelező merőleges, szögfelező, magasságvonal, súlyvonal, középvonal, körülírt, illetve beírt kör” 5. „Alapszerkesztések végrehajtása hagyományos vagy digitális eszközzel euklideszi módon: szakaszfelező merőleges, szögfelező, merőleges

			és párhuzamos egyenesek szerkesztése, szög másolása" (Kerettanterv, 2020)

1. táblázat

Egyértelműen látható, hogy mind a Nemzeti Alaptanterv (NAT 2020), mind pedig a hozzá tartozó Kerettantervek követik a Van Hiele szinteket. Sőt, valójában néhány kivételtől eltekintve szinte teljes mértékben megegyeznek.

Az 1. táblázat bemutatja az összefüggést a Van Hiele szintek, a Nemzeti Alaptanterv és a Kerettantervek megfelelő részei között. Ezek alapján az 1. szintre 2. osztályban, a 2. szintre 4. osztályban, a 3. szintre 6. osztályban, a 4. szintre pedig 10. osztályban jutnak el a diákok. Ezt vizsgálva megállapítottuk, hogy van eltérés a 2014-es vizsgálatban leírtakhoz képest. Muzsnay Anna és tsai cikkében (Muzsnay és mtsai., 2020) az 1. szinthez a 4. évfolyam, a 2. szinthez a 6. évfolyam, a 3. szinthez a 8. évfolyam és a 4. szinthez a 10. évfolyamot társították. Ebből látjuk, hogy bár a köztes fejlődés szakaszainak időtartamai eltérőek a mi vizsgálatunkhoz képest, a 4. szintet ugyanazon az évfolyamon kellett elérnie a diákoknak a korábbi Nemzeti Alaptanterv (NAT 2012) elvárásai alapján is. Igyekeztünk aszerint számozni a Kerettanterv és az adott Van Hiele szint egyes részeit úgy, hogy a számozás megmutassa, mely részek kapcsolódnak egymáshoz. Ez alatt azt értjük, hogy ezzel könnyebben összevethetőek az egyes elemek. Ennek ellenére nem minden elemet vettünk végig lépésről lépésre. Néhány ezek közül egyértelmű. Mi minden szinten néhány kulcsfontosságú elemet emeltünk ki. Fontos szem előtt tartani, hogy míg a Van Hiele szintek általánosabban a megértésről szólnak, addig a Nemzeti Alaptanterv és a hozzá tartozó Kerettantervek ennél konkrétabbak.

Ennek az oka, hogy a tantervi szabályozásnak részletesnek kell elnnie. Vegyük példának egy tétel haszálatát és megértését. A Pitagorasz-tétel haszálata 5-8. osztályban már elvárt, viszont teljes megértése csak a 9-12. évfolyamon. A különbség megtalálható a következőkben: a 3. szint 7. pontjában szereplő “ha, akkor” összefüggés alkalmazása és a 4. szint 3. pontjában található “A bizonyításra, mint biztos igazságra való hivatkozás egy matematikai állítás igazának eldöntésében”. Hasonlóan a tételek 9-10. évfolyamon: 3. szint 4. pontja, mely szerint megértik egy matematikai leírás elemeit, mint axiómák, definíciók, tételek, bizonyítások. Ezzel szemben a 2. szint 9. pontjában még összekeverik, nem látják tisztán a különbséget axiómák és tételek között. Éppen ezért egy 9-10. osztályos tanulónak már nem 3. szinten kell lennie, hanem el kell érnie a 4. szintet, amikor állítások használatáról van szó.

A következőkben a táblázat oszlopait tárgyaljuk, hogy megmutassuk köztük a párhuzamot. Az egyes elemek között a határvonalak nem élesek, ahogyan nem is kell annak lenniük. A 2. szint 5. eleme párhuzamban áll a Kerettanterv 5. és 6. pontjával, de a 6. pont az 1. szint 6.

elemével is összevethető. A Kerettanterv 7. pontja a Van Hiele szint 4. és 7. eleméhez is tartozik. A 2. szint 6. eleméből látható, hogy ennél nem is várnak többet.

Majdnem tökéletes az egyezés a 3. Van Hiele szint és a Kerettanterv között. Az egyetlen nem egyező részlet a 9. pont. A Kerettanterv nem emeli ki, hogy mit nem kell tudni. Például Thálesz tételének és a szögekre vonatkozó tételek bizonyításához implicit módon használják Euklidesz axiómáit, viszont 5-8. osztályban ezekről még nincsen semmilyen tudásuk.

Vannak részek, ahol a párhuzam nem szóról szóra látható, ám mégis szembetűnő. Néhány példát emelnénk ki a 4. Van Hiele szint esetében. A szintek leírása általános kompetenciákat tartalmaz, míg a Kerettanterv tételek listáját adja meg azok alkalmazásaival együtt. Továbbá a következő általános követelmények szerepelnek a 2020-as Nemzeti Alaptantervben, nem csak a geometriai részt tekintve. "… a 9–12. évfolyamokon fokozatosan hangsúlyosabbá válik a matematika deduktív jellege" vagy „Az új fogalmak megalkotása, az összefüggések, stratégiák felfedezése és az ismereteknek feladatok, problémák megoldása során történő tudatos alkalmazása fejleszti a kombinatív készséget, a meglévő ismeretek mobilizálásának készségeit, a problémamegoldó gondolkodás eltérő típusainak adekvát használatát." vagy „sejtéseket fogalmaz meg és logikus lépésekkel igazolja azokat" vagy „tud egyszerű állításokat indokolni és tételeket bizonyítani." végül „adott problémához megoldási stratégiát, algoritmust választ, készít". A Nemzeti Alaptanterv ezen elemei az 1. Táblázatban teljes egészében lefedik a Van Hiele elméletben szereplő szintek közül a 4. szintet.

3.4. Érettségi

Muzsnay és tsai vizsgálatát követve (Muzsnay & al., 2020) megvizsgáltuk, hogy a matematika érettségi geometriai témájú feladataihoz mely Van Hiele szintek szükségesek. Leginkább arra voltunk kíváncsiak, hogy mely feladatokhoz szükséges, hogy egy 12. évfolyamot teljesítő diák a Van Hiele elmélet szerinti 4. szinten legyen. Muzsnay és tsai (Muzsnay & al., 2020) a következő példát mintaként mutatták be. Ez a feladat a 2006. évi emelt szintű matematika érettségi egyik bonyolultabb feladata volt.

„Egy függőleges tartórúdra a talajtól 4 m magasan mozgásérzékelőt szereltek, a hozzákapcsolt lámpa 140°-os nyílásszögű forgáskúpban világít függőlegesen lefelé.

a) Készítsen vázlatrajzot az adatok feltüntetésével!
b) Milyen messze van a lámpától a legtávolabbi megvilágított pont?

c) Megvilágítja-e a lámpa azt a tárgyat, amelyik a talajon a tartórúd aljától 15 m távolságra van? d) A tartórúdon méterenként kampókat helyeztünk el, amelyekre fel tudjuk akasztani a mozgásérzékelő lámpáját. Alulról számítva hányadik kampót használjuk, ha azt akarjuk, hogy a vízszintes talajon ne világítson meg a lámpa $100\ \mathrm{m}^2$-nél nagyobb területet?” (2006, középszint, 18. feladat, k_mat_06maj_fl.pdf)

2. táblázat

Az előbbi példa óta megváltozott az érettségi. A következőkben a 2018-as és a 2019-es évi emelt szintű érettségiből mutatunk be geometriai témájú feladatokat (Emelt szintű feladatsor 2018, 2019).

1. „Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm. a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű! Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja. b) Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya 3:4:5. c) Ennek a derékszögű háromszögnek a területe $121{,}5\ \mathrm{cm}^2$. Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!” (2018. emelt szint, 1. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

3. táblázat

A hivatalos megoldás szerint ki kell számolni vagy a legnagyobb szög koszinuszát, vagy az összes szög koszinuszát. Tehát, az 1. a) részfeladat megoldásához a tanulónak adatokat kell behelyettesítenie egy már tanult képletbe, a koszinusztételbe. Ha ez a képlet eszébe jut, akkor egy egyszerű számolással megoldható a feladatrész. Ez maximum 3. Van Hiele szintet követel meg, hiszen nem szükséges hozzá bizonyítás, önálló ötletsorozat, tételek összetettebb alkalmazása, definíciók vagy axiómák.

1. b) megoldása		
„Jelölje a háromszög oldalainak hosszát $a-d, a, a+d$ $(0<d<a)$.	1 pont	$b, b+d, b+2d,$ $(b, d>0)$
A Pitagorasz-tétel alapján $(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$.	1 pont	$b^2+(b+d)^2=(b+2d)^2$
A négyzetre emeléseket elvégezve és rendezve: $a^2=4ad$	1 pont	$b^2-2db-3d^2=0$
($a\neq 0$-val osztva) $a=4d$.	1 pont	A b-ben másodfokú egyenletet megoldva $b=3d$ ($b=-d$ nem megoldás)
A háromszög oldalai tehát $3d, 4d$ és $5d$, az oldalak aránya ezért valóban 3:4:5.	1 pont	
Összesen:	5 pont”	

4. táblázat

Az 1. b) részfeladat megoldásához elegendő a Pitagorasz-tétel ismerete. Ennél több geometriai ismeret nem szükséges hozzá. Ez ismét csupán egy egyszerű formula alkalmazása és nem is egy “ha, akkor” összefüggés használata. Ugyan szükséges hozzá a Pitagorasz-tétel használata, de ez a tétel széles körben és meglehetősen jól ismert, a diákoknak nem okoz hosszas fejtörést ennek ilyen módon történő alkalmazása.

Nem állítjuk, hogy ez nem volna megfelelő feladat, és távolról sem állítjuk, hogy nem kellene a Pitagorasz-tételt kérdezni. Az egyetlen dolog, amit állítunk ezzel kapcsolatban, hogy ez a probléma nem igényli, hogy a tanuló a 4. Van Hiele szinten legyen.

1. c) megoldása		
„A háromszög területe: $\frac{3d\cdot 4d}{2}=121{,}5$.	1 pont	
Innen $12d^2=243$, azaz ($d>0$ miatt) $d=4{,}5$.	1 pont	

A háromszög oldalainak hossza tehát $13{,}5\ cm$, $18\ cm$ és $22{,}5\ cm$.	1 pont	
Összesen:	3 pont”	

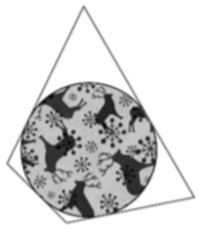
5. táblázat

Ezen megoldás a hegyesszögű háromszög területképletére épül. Nem szükséges a megoldáshoz valódi Van Hiele szint.

A hegyesszögű háromszög területképletét 6. osztályban tanulják a diákok.

7. „Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve a diákok különböző díszeket készítettek.

A gyerekek másfajta díszeket is készítettek úgy, hogy színes kartonlapra nyomtatott kör alakú képeket négy-négy egyenes vágással vágtak körül. Az egyik ilyen módon kapott érintőnégyszög alakú függődísz oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. A négyszög egyik oldala 23 cm, a kerülete pedig 80 cm.



c) Mekkora lehet a négyszög másik három oldalának hossza?”

Megjegyzés: A 7. feladat a) és b) kérdései nem geometria feladatok.
(2018. emelt szint, 7. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

6. táblázat

7. c) második megoldás		
„Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a számtani sorozat növekvő. Ebben az esetben a 23 a sorozatnak a harmadik vagy negyedik tagja lehet (mert a sorozatnak biztosan két-két 20-nál kisebb, illetve nagyobb tagja van).	1 pont	
Ha a 23 a sorozatnak a harmadik tagja, akkor (a sorozat differenciáját d-vel jelölve)	1 pont	

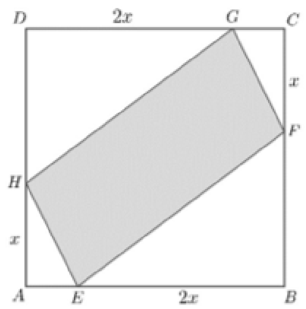
$(23-2d)+(23-d)+23+(23+d)=80.$		
Innen $92-2d=80$, azaz $d=6$.	1 pont	
Ha a 23 a sorozatnak a negyedik tagja, akkor $(23-3d)+(23-2d)+(23-d)+23=80$.	1 pont	
Innen $92-6d=80$, azaz $d=2$.	1 pont	
A négyszög másik három oldala tehát 11, 17 és 29 vagy 17, 19 és 21 (cm) lehet. (Mindkét esetben létezik konvex négyszög.)	1 pont	
Mivel $11+29=17+23$ és $17+23=19+21$, mindkét kapott négyszög valóban érintőnégyszög.	1 pont	
Összesen:	7 pont”	

7. táblázat

A megoldás alig használ geometriai tudást. A geometriai érsz az utolsó lépés, mikor a tanulónak ellenőriznie kell, hogy a szemközti oldalak egyenlő hosszúságúak-e. Megjegyzendő, hogy bármely számtani sorozatban két egymást követő elem összege egyenlő a közvetlenül előttük és közvetlenül utánuk álló két elem összegével. A megoldás teljességéhez nem szükséges kimondania a tanulónak azt a tételt sem, hogy egy négyszög akkor érintőnégyszög, ha szemközti oldalainak összege egyenlő. Ennélfogva állíthatjuk, hogy ezen megoldáshoz nem szükséges Van Hiele 4. szinten lennie a megoldónak. A feladatra összesen kapható 7 pontból mindössze 1 pont jár geometriai tartalomra.

1. „Az $ABCD$ négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az *ábrán* látható módon az $EFGH$ paralelogrammát írjuk. Az AH és a CF szakasz hossza x méter, a BE és a DB szakasz hossza $2x$ méter ($0<x<2$).

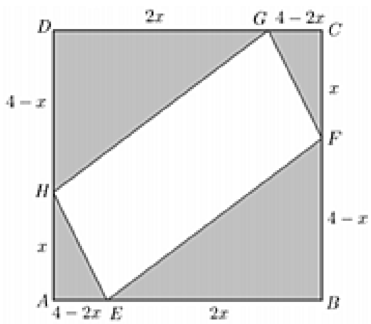
a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma területe (m^2-ben mérve): $T(x)=4x^2-12x+16$.



b) Határozza meg az *x* értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen!

c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1{,}25$.”   (2019. emelt szint, 1. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

8. táblázat

<table>
<tr><td colspan="3">1. a) megoldása</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>„(A paralelogramma területét megkapjuk, ha az $ABCD$ négyzet területéből levonjuk a négy derékszögű háromszög területét.)
$$BF = DH = 4 - x$$ és $$AE = CG = 4 - 2x.$$</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>$T(x) = 16 - 2 \cdot \frac{x(4-2x)}{2} - 2 \cdot \frac{2x(4-x)}{2}$</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>$T(x) = 16 - 4x + 2x^2 - 8x + 2x^2$</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td colspan="2">Összevonás után: $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$, ami a bizonyítandó állítás volt.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">Összesen:</td><td>4 pont”</td></tr>
</table>

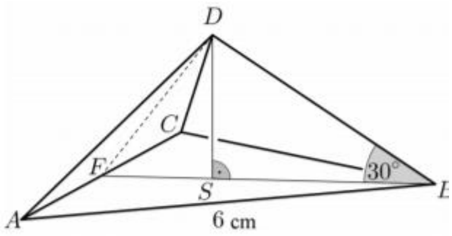
9. táblázat

Az 1. a) részfeladatban a tanulónak észre kell vennie a háromszögeket és a paralelogrammát az ábrán. Ez a definíció szerint 3. szint. Ezek után területképletek használatára lesz szüksége, mely nem igényel magasabb szintű geometriatudást. A b) feladatrész algebra vagy analízis, ehhez két mintamegoldás tartozik, az egyikben deriválás szerepel. A c) részben szögeket kell kiszámolni, melyhez először a megfelelő szögek tangensére less szükség. Ehhez a tanulónak definíció szerint 3. Van Hiele szinten kell lennie.

4. „Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert“ használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek alapéle 6 cm hosszú, az oldalélei pedig 30°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.   a) Határozza meg a tetraéder térfogatát!”

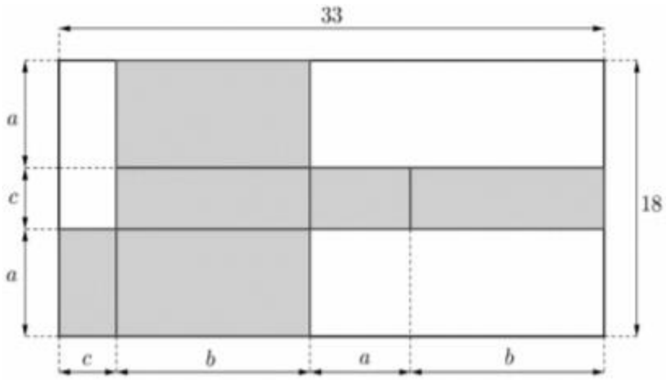
Megjegyzés: A 4. feladat b) kérdése nem geometria feladat. (2019. emelt szint, 4. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

10. táblázat

<table>
<tr><td rowspan="2">4. a) megoldása

</td><td>„Az ábra jelöléseit használjuk. A gúla ABC alapjának középpontja (súlypontja) S. DS merőleges az alaplapra, a feltétel szerint pedig $SBD\angle = 30°$.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td>BS az ABC szabályos háromszög magasságának (súlyvonalának) kétharmada:
$$BS = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 2\sqrt{3}(\approx 3{,}46)(\text{cm})$$</td><td>2 ponts</td></tr>
<tr><td colspan="2">A gúla testmagassága $DS = BS \cdot \text{tg}30° = 2\ (\text{cm})$.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td colspan="2">Az ABC háromszög területe: $T = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}(\approx 15{,}59)(\text{cm}^2)$</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td colspan="2">A gúla térfogata: $V = \frac{T \cdot DS}{3} = 6\sqrt{3}(\approx 10{,}4)\text{cm}^3$.</td><td>1 pont</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="right">Összesen:</td><td>6 pont”</td></tr>
</table>

11. táblázat

A probléma első része, hogy megtaláljuk a gúlának egy olyan keresztmetszetét, melyből kiszámítható a magassága. Ehhez fel kell ismernie a tanulónak az él és a magasság álta meghatározott részt. Ennek felismerése 3. szintű. A kapott alakzat egy szabályos háromszög fele. Ezek után ki kell számolnia egy szabályos háromszög magasságát. Ehhez ismert egy másik szabályos háromszög magassága. Fel kell használnia, hogy a szabályos háromszögben súlypont (középpont) a súlyvonal (magasságvonal) oldalhoz közelebbi harmadolópontja. Ezek után használ egy “ha, akkor” utasítást, hogy megtalálja a keresett hosszt. Ezen lépések bonyolultabbnak hatnak, mint maga a megoldás. Azonban fontos meglátnunk, hogy ezek közül a lépések közül egyikhez sem szükséges a megoldónak 4. Van Hiele szinten lennie. Az egyetlen lehetőség a 4. szint használatára a hosszúságok közti kapcsolat megtalálása, de a szabályos háromszög annyira speciális, hogy ehhez a problémához így nem szükséges a 4. szint.

5. **„**Egy 33 x 18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg. a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7\ cm$! b) Hogyan kell megválasztani az a, b, c élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen? Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg. c) A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van, amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem?”    (2019. emelt szint, 5. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

12. táblázat

5. a) megoldása		
„(A szakaszok hosszát cm-ben mérve) $2a + c = 18$ miatt $c = 18 - 2 \cdot 7 = 4$.	1 pont	
$a + 2b + c = 33$ miatt $b = \frac{33-7-4}{2} = 11$.	1 pont	
A téglatest térfogata: $abc = 7 \cdot 11 \cdot 4 = 308\ \mathrm{cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	3 pont”	

13. táblázat

Az a) feladatrészben az alakzat részeit fel kell ismerni, majd egy rövid számolást követően a térfogatképlet segítségével megválaszolhatjuk a kérdést. Ez valójában egy alacsonyabb 3. szint. A b) részben a kocka térfogatképletét kell alkalmaznunk. Nem használunk komolyabb geometriai ismereteket ebben a megoldási folyamatban.

5. c) megoldása		
„A téglatest 8 csúcsa összesen $\binom{8}{3} = 56$ háromszöget határoz meg.	1 pont	
Ezek közül le kell vonni azokat, melyeknek síkja egybeesik a téglatest valamelyik lapjának síkjával. Mind a hat lapon négy ilyen háromszög van, összesen tehát 24.	2 pont	
A megfelelő háromszögek száma $(56 - 24 =)32$.	1 pont	
Összesen:	4 pont”	

14. táblázat

A c) feladatrészben a számításhoz szükséges érveléshez fel kell ismernie a tanulónak az ábra részeit. Valójában ebben a legfőbb geometriai tudás annak ismerete, hogy bármely három nem kollineáris pont meghatároz egy háromszöget. Ez után ezek közül ki kell vonni azokat, emlyek a téglatest valamelyik lapjának síkján helyezkednek el. Ennek a feladatrésznek a megoldásához nem szükséges a 4. szint.

6. „Egy egyenlő szárú háromszög oldalai hosszúságának átlaga 10, szórása $3\sqrt{2}$. a) Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát!” (2019. emelt szint, 6. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

15. táblázat

6. a) megoldása	
„A háromszög kerülete 30 egység. Jelölje az oldalak hosszát x, x és $30 - 2x$	1 pont
A szórás miatt:	1 pont

$\sqrt{\frac{(10-x)^2+(10-x)^2+(2x-20)^2}{3}}=3\sqrt{2}.$		
$200-40x+2x^2=18$ $2x^2-40x+182=0$ $x^2-20x+91=0$	$\sqrt{2(10-x)^2}=3\sqrt{2}$ $\sqrt{(10-x)^2}=3$ $\lvert 10-x\rvert=3$	1 pont
$x=7$ vagy $x=13$		1 pont
A háromszög oldalai az első esetben $7,7,16$ egység, a második esetben $13,13,4$ egység.		1 pont
Ellenőrzés: Az első eset nem lehetséges, mert nem teljesül a háromszög-egyenlőtlenség. A második eset lehetséges, mert teljesül a háromszög-egyenlőtlenség (és a szórás $\sqrt{\frac{3^2+3^2+6^2}{3}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ valóban).		1 pont
Összesen:		6 pont”

16. táblázat

A számítások elvégzéséhez két geometriai információ szükséges: egy egyenlő szárú háromszögnek van két egyenlő oldala és a háromszög-egyenlőtlenség. Ezek a 2. és talán a 3. szinthez tartoznak, amikor használjuk az egyenlőtlenséget.

3.5. A matematika tanárszakos hallgatók Van Hiele szintje

Bereczky-Zámbó és tsai 2018-as cikkében (Bereczky-Zámbó és mtsai., 2018) egy olyan kutatásról írnak, melyben első éves matematika tanárszakos hallgatók geometria tudását tesztelték a Van Hiele szintek mentén. A hallgatók a tesztet 2015 februárjában töltötték ki. Ez szinte közvetlenül az érettségi rendszer megújítása előtt történt. A tesztet közvetlenül a második félévben kezdődő első geometria kurzusuk megkezdése előtt töltötték ki. Az eredmények a 10. táblázatban láthatóak. A táblázat a Van Hiele szinteket is tartalmazza. Látható, hogy a 46 résztvevő diák közül 22 fő, azaz 48% volt az 5. Van Hiele szinten, 24 fő pedig a 3. szinten. Ez azt jelenti, hogy 24 hallgató volt a Nemzeti Alapptantervben előírt 8. osztályos szinten, míg 22 hallgató az elvárt 5. szinten.

	Van Hiele szint				
	5	4	3	2	2 alatt
2015	22	0	24	0	0

17. táblázat

3.6. Összegzés

Ebben a dolgozatban bemutatásra kerültek a geometria oktatás szintjei a Magyar matematikaoktatásban. Megvizsgáltuk a Nemzeti Alaptanterv, a hozzá tartozó Kerettantervek és az érettségi vizsga megfelelő részei közötti összefüggéseket, különbségeket. Az összehasonlítás alapjául vettük a Van Hiele elmélet szintjeit. A Van Hiele elmélet széles körben elfogadott a geometriai megértési szintek vizsgálatára. Megállapítottuk, hogy mind a Nemzeti Alaptanterv mind pedig a hozzá tartozó Kerettantervek lépésről lépésre követik a Van Hiele elméletben megfogalmazott geometriai megértési szinteket Magyarországon. Tizedik évfolyamra a tanulóktól elvárja, hogy a 4. Van Hiele szinten legyenek. Ez után megvizsgáltuk és elemeztük a 2018-as és a 2019-es évek érettségi vizsgáinak geometria feladatait. A hozzájuk tartozó hivatalos megoldókulcsokban szereplő megoldások vizsgálatával megállapítottuk, hogy ezen feladatok megoldásához nem szükséges hármas Van Hiele szintnél magasabb geometriatudás. Ez azt jelenti, hogy az írásbeli érettségi vizsgán elvárt geometria tudás kevesebb, mint amit a Nemzeti Alaptanterv és a Kerettantervek szerint a diákoknak el kell sajátítania 12. évfolyam végére. Kovács 2017-es munkájában (Kovács, 2017) a mellett érveltek, hogy az érettségi vizsga nagymértékben befolyásolja a diákok tanulását, sőt a pedagógus tanórai munkáját is. Ennek oka, hogy a vizsga jellege, a feladatok típusa kiszámítható, sok mindent előre tudhatunk a vizsga jellegéről. Valójában az érettségi vizsga felsőoktatási felvételiként is szolgál. A vizsga eredményének döntő szerepe van a diákok életében. A tanárok megítélése is függhet attól, hogy diákjaik milyen eredményeket érnek el az érettségi vizsgán. Ennek következtében mind a diákoknak, mind a pedagógusoknak közös érdeke, hogy megfelelően felkészüljenek a tanulók az érettségi vizsgára. Így valójában nincs egyértelmű motivációjuk a tanároknak, hogy a diákok geometriából elérjék a Van Hiele elméletben leírt 4. szintet. Inkább koncentrálnak a tanórákon a matematika tananyag azon részeire, melyek szükségesek lesznek az érettségi vizsga sikeres teljesítéséhez.

(Muzsnay és mtsai., 2020) kutatása alapján 2015-ben a Nemzeti Alaptanterv követelménye és az érettségi vizsga által elvárt tudás közti rés problémákat okozott a felsőoktatásban. Azt állítják, hogy nagy eltérés van a felsőoktatásba belépő tanulók geometriatudása és a felsőoktatási intézmények által elvárt geometriatudás között. Vizsgálatuk eredménye alapján a matematika tanárszakos hallgatók 48%-a érte el a 4. szintet. Nem állítjuk, hogy ez az érettségi vizsga vagy a középfokú matematikaoktatás hibája volna. Azonban ez egy lehetőség arra, hogy mérlegeljünk. A jól sikerült érettségi elérésének célja háttérbe szoríthatja a magasabb tudás megszerzésére való törekvést, annak ellenére, hogy a Nemzeti Alaptanterv szerint ez elvárt lenne.

Mikor I. Ptolemaiosz egyiptomi fáraó túl bonyolultnak találta Euklidész Elemek című művét, megkérte Euklidészt, hogy magyarázza el neki egyszerűbben. Euklidész válasza a fáraónak ma is érvényes:

„A geometriához nem vezet királyi út."

4. Összefoglalás

Dolgozatomban két témát jártam körül. Az első részben két különböző bizonyítást mutattam be a következő állításhoz: a talpponti háromszög a legkisebb kerületű háromszög, ami beírható egy hegyesszögű háromszögbe. Az első bizonyításhoz a háromszöget két oldalának egyenesére tükröztem tengelyesen. Ez után beláttam, hogy a tükrözésekkel kapunk egy olyan töröttvonalat, melynek hossza éppen a háromszögbe beírt háromszög kerülete. Ezen töröttvonal hossza akkor lesz minimális, ha ez éppen egy egyenes szakasz. Innen már bizonyítható, hogy ez a hossz, azaz a beírt háromszög kerülete pontosan akkor minimális, ha ez éppen a talpponti háromszög, azaz a három csúcsa az eredeti háromszög három magasságának talppontja. A második bizonyításban hat egymás után elvégzett tengelyes tükrözéssel dolgoztam, melyekkel egy olyan töröttvonalat kapunk, melynek hossza a beírt háromszög kerületének kétszerese. Ismét a töröttvonal hosszának minimalizálása a cél, mely úgy érhető el, ha a töröttvonal éppen egy egyenes szakasznak felel meg. A második bizonyítás esetében ez után szögek közti összefüggések, valamint hasonlóságok felhasználásával láttam be, hogy a töröttvonal hossza pontosan akkor minimális, ha a beírt háromszög éppen az eredeti háromszög talpponti háromszöge.

Dolgozatom második részében a jelenleg érvényben lévő Nemzeti Alaptanterv és a hozzá tartozó Kerettantervek geometriával foglalkozó részeit, továbbá emelt szintű érettségi feladatokat vetettem össze a Van Hiele elméletben szereplő geometriai megértési szintekkel. Munkám ezen részének alapja a 2021-ben megjelent, témavezetőmmel közösen írt Modification of the geometry curriculum in relation to the curriculum reform in the light of the Van Hiele levels című cikk, mely a Éva Vásárhelyi & Johann Sjuts (Hrsg.): Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken kiadványban jelent meg angol nyelven (Rékasi, Szabó, 2021). A vizsgálat eredményeként láttuk, hogy a Nemzeti Alaptanterv és a Kerettantervek szinte szóról szóra, lépésről lépésre párhuzamba helyezhetők a Van Hiele elmélet féle megértési szintekkel. Ezzel szemben a vizsgált tanévek geometria témájú érettségi feladatai nem várják el azt a geometriai szintet a tanulóktól, melyet a Nemzeti Alaptanterv szerint el kell érniük 12. évfolyam végére.

5. Irodalomjegyzék

Bereczky-Zámbó, Csilla; Muzsnay, Anna; Szeibert, Janka; Török, Tímea (2018). *Geometriai szemléletfejlődés az egyetemen,* TDK dolgozat

Burger, W. F.; Shaughnessy, J. M. (1986) *Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry*, Journal for Research in Mathematics Education 17.1, pp. 31–48, doi: https://doi.org/10.2307/749317.

Coxeter, H. S. M.; Greitzer, S. L. (1967) *Geometry Revisited*

Emelt szintű érettségi feladatsorok. 2018. https://dload-oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2018tavasz_emelt/e_mat_18maj_fl.pdf

Emelt szintű érettségi feladatsorok javítási-értékelési útmutató. 2018. https://dload-oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2018tavasz_emelt/e_mat_18maj_ut.pdf

Emelt szintű érettségi feladatsorok. 2019. https://dload-oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2019tavasz_emelt/e_mat_19maj_fl.pdf

Emelt szintű érettségi feladatsorok javítási-értékelési útmutató. 2019. https://dload-oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok_2019tavasz_emelt/e_mat_19maj_ut.pdf

Kovács, Veronika (2017). *Gráfok modern bevezetése a középiskolában,* Képzés és Gyakorlat 15.1-2., pp. 275-294., doi: https://doi.org/10.17165/TP.2017.1-2.16

Középszintű érettségi feladatsorok. 2006. https://dload-oktatas.educatio.hu/erettsegi/feladatok2006tavasz/kozep/k_mat_06maj_fl.pdf

Központi írásbeli feladatsorok, javítási útmutatók, www.oktatas.hu.

Muzsnay, A.; Szabó, C.; Bereczky-Zámbó, C.; Szeibert, J. (2020). *Students' non-development in high school geometry*, Annales Mathematicae et Informaticae 52 pp. 309-319, doi: https://doi.org/10.33039/ami.2020.12.004

Nemzeti Alaptanterv (2020). Magyar Közlöny, www.magyarkozlony.hu

Rékasi, A., Szabó, C. (2021). *Modification of the geometry curriculum in relation to the curriculum reform in the light of the Van Hiele levels*. In *Theoretische und empirische*

Analysen zum geometrischen Denken pp. 273-290, doi: https://doi.org/10.37626/GA9783959872003.0.15

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project*. Chicago: Chicago Univ, IL.

A 2020-as NAT-hoz illeszkedő tartalmi szabályozók, www.oktatas.hu.

The Hungarian National Core Curriculum (2012). Teaching Mathematics and Computer Science. www.ofi.hu

6. Ábrajegyzék