EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

ADOTT TÉMAKÖRBEN KÜLÖNBÖZŐ MÓDSZEREKKEL TÖRTÉNŐ PROBLÉMAFELVETÉS VIZSGÁLATA SZAKKÉPZÉSBEN

TDK dolgozat

Készítették:

Czeglédi Csaba

matematika-könyvtáros osztatlan tanárszak

Stirling Anna Krisztina

matematika-fizika osztatlan tanárszak

Témavezető:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

2021/22

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A matematikaoktatásnak egy köztudottan fontos része a matematikai problémákkal, feladatokkal való foglalkozás. Leggyakrabban ez valamilyen feladatmegoldó tevékenységet jelent, gyakorlófeladatok megoldásától egészen a nagyobb kihívást jelentő versenyfeladatok megoldásáig.

A magyarországi matematikaoktatás közismerten problémaközpontú, számos híres matematikusunk, színvonalas matematikaversenyeink (Arany Dániel Matematikaverseny, KöMaL) is jó példák erre. A problémamegoldási képesség fejlesztésében a versenyfeladatok, felkészítő feladatsorok *megoldása* mellett szerepet kaphat a *problémafelvetés* fejlesztése is: ugyanis a szakértő szintű problémamegoldási folyamat egy fontos lépése a probléma variálása, újrafogalmazása, más problémák felvetése a kapott feladat alapján (Pólya 1957, Duncker 1945).

Nem újkeletű gondolat, hogy a tanulók maguk készítsenek matematikafeladatokat, és foglalkozzanak problémafelvetéssel. Henry Benfield az 1800-as évek végén írt arról egyik művében, hogy a tanuló érdeke a saját problémák, feladatok készítése. Javaslata az volt, hogy a szaktanár ennek érdekében mutasson absztrakt példákat, amelyeket a diákok saját feladattá alakíthatnak (Belfield 1887).

Természetesen ennél modernebb példák is léteznek a problémafelvetés és feladatkészítés matematikaórai vizsgálatára. A problémafelvetés mai kutatását Silver és Kilpatrick munkái alapozták meg (Silver 1994; Kilpatrick 1987). Vizsgálata az utóbbi egy-másfél évtizedben lett a matematikadidaktika vizsgálatának egyik központi témája (Koichu et.al. 2011, Cai et.al. 2015).

1.1. Problémafelvetés és feladatkészítés vizsgálata

A matematika oktatásának szükséges része, hogy legyenek olyan problémák, feladatok, amelyek segítenek a diákságnak találkozni a matematikai gondolkodással, amik által a problémamegoldó képességük fejlődik. Ezek hatására mélyülhet a matematikatudásuk (Rékasi, Stirling 2021/1). Felmerül a kérdés, hogy ehhez a folyamathoz honnan erednek a „jó" feladatok, ki készíti őket, milyen módszerrel? A problémafelvetés kutatása ezekre a kérdésekre is keresi a választ (Singer 2011).

A közoktatásban tanuló diákok problémafelvetési, feladatkészítési képességeinek vizsgálata, és a problémafelvetés matematika órákon történő gyakorlása nem példa nélküli a nemzetközi gyakorlatban (Bonotto, Santo 2015; Blomqvist, Gade 2015; Cai et. al. 2015; Papadopoulos et. al. 2020), de bizonyos, hogy a matematikadidaktikai kutatásoknak egy meglehetősen új irányzata. Talán éppen emiatt az újszerűség miatt tapasztalható, hogy a problémafelvetés vizsgálatában még nem alakult ki egységes rendszer.

A tanárok és diákok nagy csoportjain belül is adódnak különbségek: a kutatások vizsgálják matematika szakos tanárok (Lavy, Shriki 2007), tanítók (Silver, Mamona-Downs, Leung, Kenney 1996) és versenyfeladatkészítők (Poulos 2017), diákok közül pedig általános iskolás (Cai, Hwang 2002; Bonotto, Santo 2015) és gimnazista korú (Silver, Cai 1996; Rékasi, Stirling 2021) problémafelvetési-feladatkészítési képességeit.

Papadopoulos különböző definíció-típusokat is megkülönböztet a problémafelvetés értelmezésére [3.]. Ezeket a típusokat öt kategóriába rendezte:

1. Problémafelvetés, mint új problémák generálása
2. Problémafelvetés, mint már létező problémák újra formálása
3. Problémafelvetés, mint az előző két definíció kombinációja
4. Problémafelvetés, mint kérdések megfogalmazása és kérdések új szemszögből való vizsgálata
5. Problémafelvetés, mint modellezési folyamat

természetesen ezek között a csoportok között nem minden esetben élesek a határok.

Emellett az is nagy különbségeket okoz a problémafelvetés vizsgálatában, hogy nagyon különbözőek azok a módszerek, amikkel a vizsgálatok alanyai feladatokat készítettek. A leggyakoribb problémafelvetési stratégiák a következők: [4.]

i) feladatkészítés megadott adatok alapján

pl.: kapnak egy táblázatot egy kosárcsapat eredményeiről, vagy egy fagylaltárus eladási adatairól – ezekkel az adatokkal feladatokat készítenek

ii) feladatvariálás: új feladat létrehozása meglévő problémák alapján, vagy azokhoz kapcsolódóan

pl.: ennek egy lehetséges módja a „what-if-not" technika [3.]: adott egy feladat egy egyenlőszárú háromszöggel, mi lenne, ha nem egyenlőszárú lenne, hanem szabályos? Ezzel a technikával felfedezhetők új problémák már meglévő feladatok variálásával.

iii) feladat készítése valós szituáció modellezésével:

pl.: banki, pénzügyi szituációk modellezése

iv) adott témára készített feladatok:

pl.: témák lehettek: űrhajó, boszorkány, kertészkedés, filmek, kirándulás

1.2. Miért hasznos a problémafelvetés a matematikaoktatásban?

A problémafelvetési és feladatkészítési képességek fontossága a jelenleg hatályos Nemzeti Alaptantervekben (NAT2012, NAT2020) közvetlenül és közvetett módon is megjelenik.

A 2012-es NAT [1.] hangsúlyozza, hogy a matematikaoktatásnak fontos feladata, hogy a diákok megtanuljanak modellek segítségével gondolkodni, a mindennapi élet problémáit, vagy a természeti jelenségek törvényszerűségeit a matematika nyelvén megfogalmazni. A matematikai gondolkodás egyik alappillére a NAT2012 szerint: *„matematikai modellek megértése (pl. számok, műveletek, nyitott mondatok, sorozatok, függvények, táblázatok, rajzos modellek, diagramok, gráfok, grafikonok); átkódolás más modellbe. Adott modellhez példa, probléma megfogalmazása".*

Az új, 2020-as Nemzeti Alaptanterv [2.] a következőket fogalmazza meg a matematika tantárgy legfőbb céljaiként:

„A matematika tanulásának legfontosabb célja, hogy a tanuló:

1. *megtapasztalja a matematika értékeit, hasznosságát, szépségét;*
2. *megismerje a matematikai gondolkodás természetét és a matematika alapvető sajátosságait;*

3. fejlessze a szövegértését, a szövegalkotó és absztrakciós képességét a matematika nyelvének és szimbólumainak szóbeli és írásbeli alkalmazása során;

4. fejlessze a számolási készségét, a modellezési, a problémamegoldó és döntési képességét;

5. fejlessze a logikus, pontos, kreatív, mérlegelő, stratégiai és rendszerező gondolkodását;

6. alkalmazható tudásra tegyen szert."

A matematika tantárgy specifikus jellemzőinek leírásakor pedig a következőket olvashatjuk:

„A tanítás fő módszere továbbra is a felfedeztetés, a konkrét tevékenységből, játékból, hétköznapi szituációból fakadó indukció. A tanulási tevékenység és problémamegoldás során a tanulót ösztönözni kell egyszerű problémák felfedezésére, megfogalmazására és a mindennapi életből vett szöveges problémák matematikai szempontú értelmezésére. A tanuló konkrét helyzetek megoldására képi és szimbolikus modelleket, stratégiákat alkalmaz és alkot, ezáltal fejlődik problémamegoldó és problémaalkotó képessége."

A Nemzeti Alaptanterv 2020 [2.] mellett számos nemzetközi kutatás is beszámol a közoktatásban tanuló diákok problémafelvető–feladatkészítő tevékenységének hasznosságáról. A szakirodalmak szerint a problémafelvető tevékenység olyan eszközöket ad a diákok kezébe, amelyek segítségével elsőre nem, vagy nehezen „megfogható" problémákat jobban kezelhetőkké alakíthatnak át, például már megoldott részproblémákra való visszavezetés segítségével. Emellett több kutatás kiemeli, hogy a problémafelvetés-feladatkészítés, és a diáktársak által készített problémákkal való foglalkozás nagymértékben növeli a diákok matematikatudását, rendszerezi és mélyíti a feladatok témaköréhez kapcsolódó ismereteiket és nem mellékesen szórakoztató, újszerű formában teszi ezt (Cunningham 2004, Rosli et. al. 2014, Van Harpen, Presmeg 2015).

1.3. Előzmények

Az utóbbi időben egyre nagyobb hangsúlyt kap a feladatkészítés és problémafelvetés vizsgálata (Rosli et. al. 2014; Singer, Ellerton, Cai 2015; Koichu, Kontorovich 2009, 2011, 2012; Papadopoulos, Patsiala 2020), azonban a felvetett problémák minőségének vizsgálatára még nincsen egységes rendszer. Nagyon sokfélék a szempontok és a hangsúlyok, ezért általában az adott kutatások témájától függ, milyen szempontrendszer szerint vizsgálják a felvetett problémákat a kutatók.

Silver (Silver 1994) például az alábbiak szerint vizsgálta a felvetett problémákat:

- folytonosság: a felvetett problémák vagy kérdések száma
- rugalmasság: hány különböző kategóriába sorolhatók a felvetett problémák
- eredetiség: mennyire különböznek a felvetett problémák az eddig ismertektől

Emellett a kritériumrendszer mellett megjelennek a kreativitást vizsgáló szempontok is (Kontorovich et al. 2011). Szintén kiemelik annak a fontosságát, hogy a kitűzött feladat legyen „helyénvaló”. Azaz, feleljen meg a feltételek közt nem megadott íratlan szabályoknak, mint például nem szélsőséges vagy félreérthető a megfogalmazása, legyen matematikailag pontos (és matematikai – tehát ne azt kérdezze, hogy milyen színű volt a labda).

Crespo és Sinclair (Crespo, Sinclair, 2008) tanárszakos hallgatók problémafelvetését vizsgálta a probléma megoldásának esztétikuma és a kutatás és feltárás fontosságának a probléma megoldásában való megjelenése alapján.

Rosli és munkatárai 2015-ben írt cikkükben 11 szempontot sorakoztatnak fel a diákok/tanárjelöltek által felvetett problémák értékelésére:

- Az információ forrása (source of information)
- Megoldhatóság (solvable)
- Hasonló problémát már látott/oldott meg (similar problem seen/worked)
- Életből vett probléma (Real-life situation)
- Realisztikus, értelmes, érthető (realistic, made sense, understandable)
- Matematikailag pontos/ megfelelő (mathematicly appropriate)
- Magával ragadó, vonzó (engaging)
- Nehézségi szint (difficulty level)
- Eredetiség és kreativitás (originality and creativity)
- Kihívást jelentő (challenging)
- Korosztálynak megfelelő (age appropriateness). Ez a tanulmányban a középiskolások számára megoldható feladatokat jelentette.

Munkánkban Rékasi Anna és Stirling Anna által a fenti szakirodalmak alapján kidolgozott (Rékasi, Stirling 2018, 2019, 2021/1,2) értékelési rendszerét használtuk, amelynek rövid összefoglalása az 1. táblázatban látható. (Részletes kifejtés található a mellékletekben).

<table>
<tr><th>Szakmai rész</th><th>pont</th><th>Élvezetességi rész</th><th colspan="2">pont</th></tr>
<tr><td>Valamilyen Tananyaghoz illő</td><td>8 pont</td><td>Újszerű/eredeti /ötletes</td><td>6 pont</td><td rowspan="2">Az összegük, kivéve, ha az összeg nagyobb mint 6. Ekkor 6 pont.</td></tr>
<tr><td>Nehéz/könnyű (kihívás)</td><td>4 pont</td><td>Matematikai élmény</td><td>6 pont</td></tr>
<tr><td>Matematikailag helyes</td><td>8 pont</td><td>Beöltöztetés</td><td colspan="2">6 pont</td></tr>
<tr><td>Korosztályhoz illő</td><td>5 pont</td><td>Korszerűség</td><td colspan="2">4 pont</td></tr>
<tr><td colspan="2">Összesen 25 pont</td><td colspan="3">Összesen 16 pont</td></tr>
</table>

1. táblázat

(Rékasi, Stirling 2021/1,2)

2. A kutatás leírása

Kutatásunkban 9. osztályos diákok problémafelvetési-feladatkészítési képességeit vizsgáltuk, és a problémafelvetési tevékenységük hatását a problémamegoldásukra, tanórai tevékenységükre. Ezt a hatást az adott reguláris tananyagból íratott be- és kimeneti tesztek megíratásával mértük. A tesztek a mellékletek között megtalálhatók. A résztvevő diákok kétféle problémafelvetési stratégiát használtak: feladatvariálást, és adott matematikai témára való problémafelvetést. Mindkét feladatkészítési stratégia kijelölt témaköre a Pitagorasz-tétel és a statisztika volt. Kutatásunkban szerettük volna vizsgálni, milyen hatással van a probléma*felvetési* tevékenység a diákok probléma*megoldására*. Emellett arra is kíváncsiak voltunk, hogy a különböző stratégiákkal milyen hatékonysággal készítenek feladatokat a résztvevők. Várakozásaink a következők voltak: a feladatvariálással készült feladatok megfogalmazása, szakmaisága átlagosan jobb, mint a tematikusan felvetett feladatoké. Ezzel szemben a tematikusan felvetett feladatok várakozásaink szerint változatosabbak a variálással készítetteknél. További feltevésünk az volt, hogy a gimnazisták által felvetett feladatok a szempontrendszer alapján átlagosan jobbak lesznek, mint a technikum tanulói által készítettek.

A KMASZC Varga Márton Kertészeti és Földmérési Technikum két kilencedikes osztályának diákjai voltak a kísérlet résztvevői. A matematika órákat az osztályok együtt töltik, nincs csoportbontás. A kertépítő osztályban (9/A) 25 diák, a földmérő osztályban (9/C) 31 diák vett részt a projektben. A Technikum szociális összetétele igen eltérő, a vizsgált két csoportban mind SNI-s, mind BTMN-es diákok jelen voltak. A 9/A-ban 5-5 tanuló rendelkezett BTMN és SNI besorolással; a 9/C-ben a BTMN besorolással rendelkező tanulók száma 8, az SNI besorolással rendelkezőké pedig 3. Az év eleji szintfelmérők eredményei alapján is megállapítható volt, hogy a 9/C osztály diákjai matematikai felkészültségüket illetően jobban teljesítenek majd a tanév során. Hiszen a 32 pontos, középfokú felvételi feladatokból összeállított feladatsor kitöltése után az alábbi eredmények születtek: a C osztály elért pontszámainak átlaga 16,58 pont volt, míg az A osztály elért pontszámainak átlaga 12,83 pont lett. Mindkét csoport heti 4 órában tanulja tantermi környezetben a matematikát. Ebben nem különböznek, s emellett még az őket tanító szaktanár is ugyanaz.

Az elkészült feladatokat egy komplex szempontrendszer alapján értékeltük ki, amelyet Rékasi Anna és Stirling Anna állítottak össze több nemzetközi kutatás alapján (Crespo, Sinclair, 2008; Kontorovich et al. 2011; Rékasi, Stirling 2018, 2019, 2021/1,2; Rosli et. al. 2015; Silver 1994; Singer, Ellerton, Cai 2015). A részt vevő tanulókkal folytatott beszélgetések alapján azt mondhatjuk, izgalmasnak találták a diákok a problémafelvetést. Kreatív munkafolyamatként tekintettek rá, ami által tanulhatnak, ráadásul nem a hagyományos frontális oktatásban kellett részt venniük. Sokak úgy érezték, hogy a kitűzött projekt meghaladja képességeiket, emellett viszont voltak olyanok is, akik kifejezetten élvezték. Sokakra nagyon motiválóan hatott ez az új megközelítése a tanórai munkának. Több csoportnál is megjelent az, hogy szabadjára eresztették a fantáziájukat, mertek egy saját maguk által kigondolt történetben megalkotni egy matematikai problémát. Ezzel ellentétes munka is folyt, ahol maga a matematikai probléma és annak megoldása volt meg előbb. Ezekben a csoportokban a beöltöztetéssel gyűlt meg a bajuk a tanulóknak.

A megoldókulcs elkészítésének folyamata sok helyen rávilágított olyan részletekre, amelyeknél netán pontatlan volt a megfogalmazás, nem volt egyértelmű a kérdés. Tapasztaltuk ezek mellett még azt is, hogy egy kiscsoportban nem feltétlenül oszlott el a munka szerves része. Voltak olyan csapatok, ahol egy ember próbált mindent megcsinálni, s a viselkedése kizárta a többieket a csapatmunkából. Megjelent viszont ennek az ellenkezője is, ahol a legelejétől kezdve jó volt a csapattagok együttműködése, ez az elkészült feladataikon is megmutatkozik.

Az eddigi tapasztalatokat összevetettük Rékasi Anna és Stirling Anna kutatásaiban leírtakkal (Rékasi, Stirling 2021/1,2). Ezekben a kísérletekben 9. és 10. osztályos, elit gimnáziumi tanulók vettek részt, sok csoport emelt szinten tanulta a matematikát, így ők bizonyosan nagyobb tapasztalattal rendelkeznek matematikai problémamegoldás területén és sok feladattal találkoztak már. Az általuk készített feladatok közül néhány megtalálható a

Mellékletek 7. pontjában. Az elkészített feladatok alapján felismerhető egy olyan tendencia, hogy míg az elit gimnáziumi diákok általában komplex, bonyolult feladatokat készítettek (mind matematikai háttér, mind beöltöztetés tekintetében), addig a jelen kísérletben részt vevő tanulók egyszerűbb feladatokat alkottak. A bonyolultabb matematikájú és beöltöztetésű feladatok azonban könnyen veszítettek pontokat az általunk használt szempontrendszer szerint, mert ezeknél sokkal pontosabb és körültekintőbb megfogalmazásra és háttértudásra volt szükség. Így az látható, hogy míg az elit gimnazista diákok "izgalmas" feladatokat készítettek több-kevesebb sikerrel, addig a vizsgált huszonnyolc feladat egyszerűsége miatt könnyebben ért el jó pontszámot és gyakorlófeladatnak ezek is kevés változtatással megfelelőek.

Emellett tapasztalható volt mindkét vizsgált iskolatípusban, hogy sok diák élvezetesnek találta a rendhagyó matematikaórákat, ám mindkét csoportban megjelentek azok a diákok is, akiknek nehézséget okozott, hogy nem a szokásos zárt végű matematikafeladatokat kell megoldaniuk, ahol a munka végeztével biztosan tudják, hogy valami ellenőrizhető, jó eredményre jutottak.

2.2. Módszerünk

A kutatásunk első felében a 9/C osztállyal foglalkoztunk. Első lépésként a 31 fős osztály nyolc kiscsoportra oszlott a diákok egymás által érzett szimpátiája alapján. Hét darab négyfős és egy darab háromfős csapat alakult. Négy csapat tematikus problémafelvetéssel, négy csapat a variálás módszerével készített feladatokat.

A technikum közegét figyelembe véve arra jutottunk, nem valószínű, hogy sok és sokféle feladattal találkoztak az eddigi tanulmányaikban a kísérletben részt vevő diákok. Emiatt a feladatkészítés előtt mutattunk példát mind tematikus problémafelvetésre, mind feladatvariálásra. Ezek a példák a dolgozat végén mellékletként csatolva megtekinthetők. Az adott reguláris tananyag a pitagorasz-tétel volt, ebben a témakörben készítettek feladatokat.

A feladatkészítési utasítások megfogalmazásánál az érthetőségre és egyértelműségre törekedtünk. A tematikus felvetéssel foglalkozó csoportok az alábbi utasítást kapták (1. ábra), míg a feladatvariálással foglalkozók utasítása mellett a variálni kívánt feladat is olvasható volt (2. ábra). A két feladat közül minden csapatnak csupán az egyikre kellett feladatvariációt készíteni.

Készítsetek két olyan saját feladatot és hozzájuk megoldást, amiben a pitagorasz-tételt kell alkalmazni! Az elkészült feladataitokat később egy másik csoport meg fogja oldani.

3. ábra

Készítsetek két, a mellékelt feladathoz hasonló saját feladatot, és hozzá megoldást! A feladataitokban jelenjen az eredeti feladathoz meg hasonló gondolatmenet vagy matematikai háttér! Az elkészült feladataitokat később egy másik csoport meg fogja oldani.

Feladat:

Egy 6 m magas oszlopot $6,5$ m hosszú tartókötelekkel szeretnék rögzíteni. Az oszlop tövétől milyen távolságra lehet a földhöz cövekelni a köteleket?

Egy 15 cm sugarú körbe egy 18 cm-es húrt rajzolunk! Milyen távolságra van ez a húr a kör centrumától?

4. ábra

Kutatásunk másik felét a 9/A osztállyal folytattuk le. Ebben az osztályban a statisztika témakörében foglalkoztak a diákok feladatkészítéssel. Náluk is – szintén szimpátia alapú csoportbontás szerint – kiscsoportok alakultak; két darab négyfős, két darab ötfős, egy darab hatfős és egy darab egyfős csapat. Az egyedül dolgozó diák mind variálással, mind tematikus felvetéssel készített feladatokat. A többi csapat csupán az általunk meghatározott módszert alkalmazta. Az A osztályt tekintve az alábbi utasításokkal láttuk el a csapatokat.

Tematikus felvetéssel foglalkozók esetében minden csapat 3-3 statisztikai fogalommal foglalkozott. Az alábbi fogalmak kerültek kiosztásra különböző variációhármasokban: *átlag, terjedelem, medián, módusz, kördiagram, vonaldiagram, oszlopdiagram.* A feladatvariáláshoz pedig megadtunk egyetlen feladatot, amelyet a diákok kedvükre variálhattak (5. ábra).

Készítsetek két, a mellékelt feladathoz hasonló saját feladatot és hozzájuk megoldást! A feladataitokban jelenjen meg az eredeti feladathoz hasonló gondolatmenet vagy matematikai háttér! Az elkészült feladataitokat később egy másik csoport meg fogja oldani.

Feladat:

Az egyik osztály 20 fős, középszintű érettségire készülő csoportja a 40 pontos dolgozatot a következőképpen írta meg:

Pontszám	38	33	26	20	18	15	7
Dolgozatok száma	3	1	4	3	5	2	2

a. Határozzuk meg az összes dolgozat pontszámának átlagát. Tanáruk a következők szerint adja a jegyeket: 0-30%: elégtelen, 30-45%: elégséges, 45-60%: közepes, 60-80%: jó, 80% vagy afelett: jeles. (A felső határ már jobb jegyet ér.)
b. Ennek ismeretében határozzuk meg a jegyek móduszát és mediánját.
c. Készíts kördiagramot a dolgozatok érdemjegyei alapján.

5. ábra

A be- és kimeneti dolgozatok és az elkészült feladatok kiértékelése után a diákokkal beszélgetést folytattunk. Lehetőséget biztosítva arra, hogy a feladatkészítési folyamatra vonatkozóan fogalmazhassák meg véleményüket.

3. Eredmények

Az elkészített feladatok említett szempontrendszer segítségével történő pontozása a mellékelt táblázatban megtekinthető a dolgozat "Mellékletek" fejezeténél. Az elkészült huszonnyolc feladatból tizennégy készült feladatvariálással, tizennégy tematikus problémafelvetéssel.

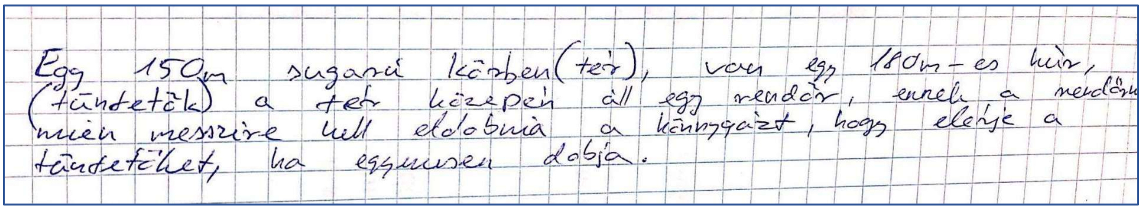
Hipotézisünk az volt, hogy a variálással született feladatok matematikailag helyesebbek, de nem annyira élvezetesek lesznek. A tematikus felvetéssel készülteknél pedig fordítva, azaz a matematikai helyesség rovására próbálnak meg élvezetes feladatot készíteni a gyerekek. Az elkészült feladatok pontozásánál ez bebizonyosodott. Nagyon sok tekintetben az eddigi feladatélményeikre alapoztak, kevésbé tudtak elvonatkoztatni a már megoldott feladatok felépítésétől. Ennek köszönhető, hogy a beöltöztetésükre és az eredetiségükre kevesebb pontot kaptak egyes elkészült feladatok. A diákok által készített feladatok az 5-ös melléklet pontban megtekinthetők.

A felvetett feladatok kiértékelése alapján azt tapasztaltuk, hogy a tananyaghoz illeszkedésüket tekintve a statisztika témakörben felvetett feladatok jóval alatta maradtak a pitagorasz-tétel témakörében felvetetteknél. Átlagosan 6,13 pontot kaptak a pitagorasz-tételes feladatok, a statisztika feladatok pedig 4,77 pontot. Matematikai helyességet tekintve viszont a statisztika feladatok múlták felül a pitagorasz-tételes feladatokat. Átlagosan 6,69 pontot értek el ebben a kategóriában a statisztika témakörben készített feladatok, míg a pitagorasz-tételes feladatok 5,8 pontot. A szakmai szempontok közül a - 28 feladatot vizsgálva - az átlagosan legtöbb pontot kapott összetevője a korosztályhoz illőség, míg az élvezetességi részből a korszerűség szempontja ért el kiemelkedő pontszámot. A két kategória szerinti szempontok közül a tananyaghoz illeszkedés és a matematikai élmény kapta meg átlagosan a legkisebb pontszámot.

Tekintsük meg az alábbi két feladat szempontrendszerünk szerinti pontozását!

1. feladat: (9c_p1-51)

Egy 150 m sugarú körben (tér) van egy 180 m-es húr (tüntetők), a tér közepén áll egy rendőr, ennek a rendőrnek milyen messzire kell eldobnia a könnygázt, hogy elérje a tüntetőket, ha egyenesen dobja?


Egy 150m sugarú körben (tér), van egy 180m-es húr, (tüntetők) a tér közepén áll egy rendőr, ennek a rendőrnek milyen messzire kell eldobnia a könnygázt, hogy elérje a tüntetőket, ha egyenesen dobja.

1. ábra

A feladat tematikus problémafelvetéssel készült, a téma a pitagorasz-tétel volt. A szakmai szempontok közül csupán egyetlen kategóriában veszített egyetlen pontot. Ennek az oka az, hogy valamilyen mértékben alakítani kell a feladaton ahhoz, hogy be lehessen vinni egy matematikaórára. Az élvezetességi rész összetevőiből már több esetben sem kapta meg a maximálisan elérhető pontokat. Ilyen szempont a matematikai élmény és a beöltöztetés. Jól érezhető, hogy a beöltöztetés nem sikerült valami jól. Mivel látszik, hogy a diákok szerették volna elhelyezni az általuk megalkotott matematikai problémát a való életben előfurduló helyzetbe – kissé erőltetettre sikerült, pont emiatt a feladat matematikája egy kissé elromlott –, ezért nem kapott a feladat háromnál kevesebb pontot ebben a kategóriában.

2. feladat: (9a_s1-41)

Egy szépségversenyen 20 nő vett részt. 4 zsűri volt, akik maximum 40 pontot adhattak. Így alakult a verseny:

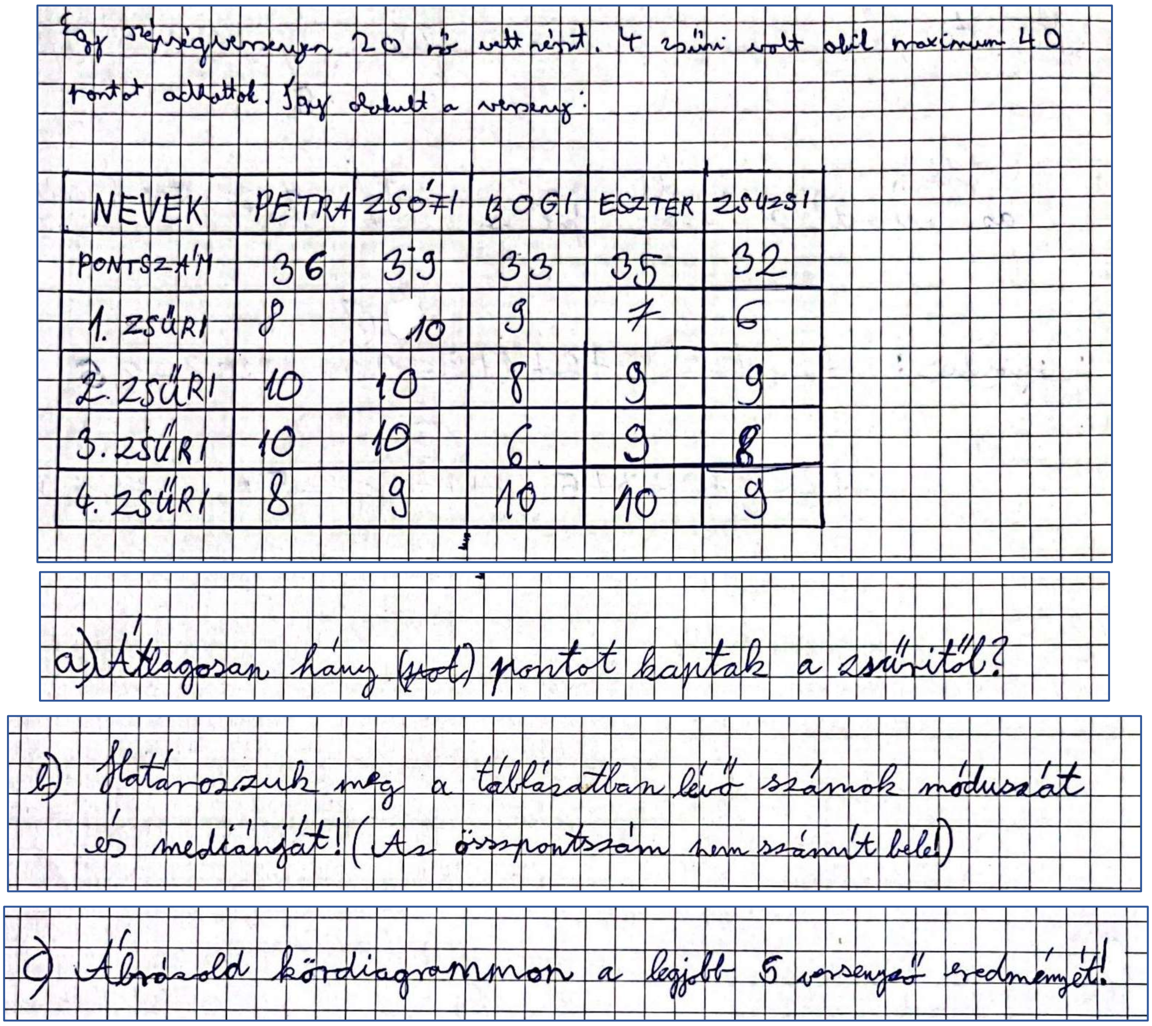
Nevek	**Petra**	**Zsófi**	**Bogi**	**Eszter**	**Zsuzsi**
Pontszám	36	39	33	35	32
1. zsűri	8	10	9	7	6
2. zsűri	10	10	8	9	9
3. zsűri	10	10	6	9	8
4. zsűri	8	9	10	10	9

a.) Átlagosan hány pontot kaptak a zsűritől?

b.) Határozzuk meg a táblázatban lévő számok móduszát és mediánját! (Az összpontszám nem számít bele!)

c.) Ábrázold kördiagramon a legjobb 5 versenyző eredményét!

A feladat variálással készült, a variálás alapját az 5. ábrán látható feladat képezte. A fent olvasható és a 2. ábrán látható feladat leginkább a szakmai részben elérhető pontszámokból veszített, mintsem az élvezetességi összetevőkből. Ahhoz, hogy egy matematikaórára bevihetővé váljon a feladat, nem kevés változtatást kell eszközölni mind a megfogalmazásán, mind a matematikai precizitásán. Nehézségét illetően egyáltalán nem bonyolult, inkább kezd sablonossá válni. Ennek eredménye a matematikai élményre kapott négyes pontszáma, hiszen az élményt inkább a jól sikerült beöltöztetés, mintsem a megoldáshoz vezető ötlet adja. A matematikai helyességének pontszáma a megfogalmazottságából is adódott. Érthető, hogy az általuk várt adatokat milyen számítások, módszerek segítségével szeretnék visszakérni, de nem minden esetben egyértelmű. A beöltöztetés jól sikerült, érdekes helyzetbe ültették át az általunk mintának adott feladatot. Korszerűségét tekintve egyáltalán nem korszerűtlen, ahogyan minden egyéb szempont szerinti kritériumnak is megfelel.


Egy szépségversenyen 20 nő vett részt. 4 zsűri volt akik maximum 40 pontot adhattak. Így alakult a verseny:

NEVEK	PETRA	ZSÓFI	BOGI	ESZTER	ZSUZSI
PONTSZÁM	36	39	33	35	32
1. ZSŰRI	8	10	9	7	6
2. ZSŰRI	10	10	8	9	9
3. ZSŰRI	10	10	6	9	8
4. ZSŰRI	8	9	10	10	9

a) Átlagosan hány pontot kaptak a zsűritől?

b) Határozzuk meg a táblázatban lévő számok móduszát és mediánját! (Az összpontszám nem számít bele!)

c) Ábrázold kördiagrammon a legjobb 5 versenyző eredményét!

2. ábra

A feladatkészítés után a témakörből íratott kimeneti tesztekkel mértük a tanulók problémamegoldási képességének változását. Érdekes, hogy a be- és kimeneti teszteredmények nem mutatnak az adott témakörben feladatkészítéssel foglalkozók és nem foglalkozók fejlődése között szignifikáns eltérést. Azaz a feladatkészítési folyamat fejlesztő hatással volt a diákok problémamegoldási képességére, de nem jelentősebb mértékben a hagyományos tanórákhoz képest. Az alábbi két táblázat mutatja a statisztika témakörben elért eredményeket (2. és 3. táblázat).

Statisztika dolgozat eredményei (bementi)							
9/A				9/C			
Elért pontszám	Százalék	Elért pontszám	Százalék	Elért pontszám	Százalék	Elért pontszám	Százalék
0	0	10	48	11	52	13	62
9	43	2	10	13	62	12	57
15	71	2	10	17	81	12	57
7	33	6	29	2	10	20	95
9	43	15	71	13	62	17	81
13	62	9	43	9	43	18	86
6	29	9	43	14	67	7	33
12	57	19	90	13	62	9	43
16	76	15	71	3	14	4	19
1	5			15	71	9	43
7	33			8	38	4	19
12	57			21	100	7	33
10	48			17	81	9	43
17	81			13	62	18	86
18	86			11	52	16	76
4	19			10	48		
Átlag:	9,72	pont	46,29%	Átlag:	11,77	pont	56,07%

2. táblázat

Statisztika dolgozat eredményei (kimeneti)							
9/A				9/C			
Elért pontszám	Százalék	Elért pontszám	Százalék	Elért pontszám	Százalék	Elért pontszám	Százalék
10	48	7	33	13	62	19	90
18	86	10	48	15	71	18	86
15	71	21	100	19	90	17	81
16	76	4	19	11	52	19	90
16	76	17	81	16	76	13	62
12	57			13	62	14	67
10	48			18	86	4	19
15	71			1	5	12	57
5	24			18	86	7	33
4	19			14	67	9	43
21	100			21	100	17	81
17	81			19	90	17	81
15	71			20	95	18	86
11	52			17	81		
13	62			14	67		
9	43			13	62		

Átlag:	12,67 pont	60,37%	Átlag:	14,69 pont	69,95%

3. táblázat

4. Összegzés

Kutatásunkban két technikumi – egy parképítő, egy földmérő – osztály problémafelvetési képességét vizsgáltuk, s ennek a feladatmegoldásra gyakorolt hatását mértük. A felvetett feladatokat összevetettük Rékasi Anna és Stirling Anna kutatásával, amelyben elit gimnazista diákok feladatkészítését vizsgálták (Rékasi, Stirling 2021). Két problémafelvetési stratégiát választottunk ki. A feladatvariálás és az adott matematikai témára való problémafelvetés módszerét. Az általunk megfogalmazott hipotézisek szerint a két módszerrel készített feladatok matematikai helyességüket és élvezetességüket, beöltöztetésüket tekintve különbözni fognak. A variálással készültek matematikailag helyesebbek lesznek, míg a tematikus felvetéssel alkotottak élményszerűbbek.

A problémafelvetési folyamat előtt mindkét vizsgált témakörből bementi és kimeneti teszteket írattunk, amellyel mértük a problémamegoldási képességüket és a problémafelvetés hatását a feladatmegoldásukra, órai tevékenységükre. A tesztek fejlődést mutattak a feladatkészítés előtti állapothoz képest. Azt is megvilágították, hogy a feladatkészítési folyamat nem szignifikánsabban nagyobb fejlesztő hatással volt a diákok problémamegoldására, mint a hagyományos tantermi órák. A feladatkészítést a diákok kiscsoportokban végezték. A csapatok az egymás iránt érzett szimpátia alapján alakultak ki. Három héten keresztül foglalkoztak a diákok a problémafelvetéssel, feladatkészítéssel. Egy csapat elkészült feladatait a folyamat végén egy másik csapat megoldotta. Ez lehetővé tette, hogy a diákok nem csupán arról tudtak nyilatkozni, hogy milyen véleménnyel vannak a feladatkészítésről, hanem értékelhették mások munkáit is, találkozhattak másféle módszerrel felvetett feladatokkal.

A feladatok kiértékelése során komplex szempontrendszerünk szerint a szakmai szempontokból átlagosan a tananyaghoz illeszkedés és matematikai élmény érték el a legkisebb pontszámokat, míg a korszerűségi és a korosztályhoz illőségi összetevők a legmagasabb pontszámot. Összességében – a 28 feladatot vizsgálva – azt mondhatjuk, hogy a feladatok a szempontrendszer szerint elérhető pontok több, mint nyolcvan százalékát elérték témakörönként.

Összevetettük a felvetett feladatokat elit gimnazista diákok által készített feladatokkal is. A különböző matematikai képesség különböző feladatokat eredményezett. Az gimnazisták feladatai általánosságban precízebbek és jobb beöltöztetésűek voltak a technikumban felvetettekkel szemben, bár az utóbbiak között is található néhány kifejezetten jól beöltöztetett példa, amelyek kimagaslóan jó pontszámot kaptak ezen a területen. Az elkészült feladatokat a mellékletben található szempontrendszer szerint értékeltük (Rékasi, Stirling 2021). A technikumban tanulók eredményei alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy nem találkoztak sok és sokféle feladattal. Ez beigazolódott is az általuk felvetett feladatok kiértékelésénél. Maradtak a biztos szinten, ragaszkodtak az általuk megszokott minőségű és milyenségű feladatoknál.

Tapasztalataink alapján a problémafelvetés jó eszköze lehet egy tanárnak a matematikaórákon. A kutatásban részt vevő diákok motiváltabbak voltak a három hét alatt megtartott tanórákon. Néhányan közülük felhasználták a problémafelvetést arra, hogy segítsenek társaiknak megérteni az adott reguláris tananyagot. A csoport által felvetett feladatokhoz készített megoldási útmutatók egyértelművé tették számunkra a kérdéses matematikapéldáknál, mire megy ki a feladat, mit szeretnének viszontlátni a megoldásban. Ez segített felmérni, mi az, ami a tananyagból nem világos a gyerekek számára, netán hiányosságot képez a tudásukat illetően. Az elkövetkezendőkben szeretnénk a problémafelvetés hosszútávú tudásra gyakorolt hatását vizsgálni.

Hivatkozások

[1.] Nemzeti Alaptanterv (2012) https://ofi.oh.gov.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf

[2.] Nemzeti Alaptanterv (2020) https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/megtekintes

[3.] MIDK2020 konferencia, Ioannis Papadopoulos: *Navigating in the diverse landscape of problem posing.* https://sites.google.com/site/midk2016jan/plenaris-eloadok/abstract

[4.] https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tavoktatas/probfelv.pdf

Belfield, H. H. (1887). *Revised model elementary arithmetic*. Chicago, IL: Geo. Sherwood.

Blomqvist, Charlotta & Gade, Sharada (2015). From Problem Posing to Posing Problems via Explicit Mediation in Grades 4 and 5. 195-213. 10.1007/978-1-4614-6258-3_9.

Bonotto, Cinzia & Santo, Lisa. (2015). On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School. 103-123. 10.1007/978-1-4614-6258-3_5.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. The Journal of Mathematical Behavior, 21, 401–421.

Cai, Jinfa& Hwang, Stephen& Jiang, Chunlian& Silber, Steven. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. 10.1007/978-1-4614-6258-3_1.

Cunningham, Robert. (2004). Cunningham, R.F. (2004). *Problem Posing: An Opportunity for Increasing Student Responsibility*. Mathematics and Computer Education 38, 1, 83-89.. Mathematics and Computer Education. Mathematics and Computer Education 38, 1, 83-89.. 83-89.

Duncker, K. (1945). *On problem solving. Psychological Monographs* (Vol. 58). New York, NY: American Psychological Association.

Ilana Lavy and Atara Shriki 2007. Problem posing as a means for develeoping mathematical knowledge of prospective teachers. Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Eds: Woo, J.; Lew, H.; Park, K.; Seo, D.) 129-136 2007.

Kilpatrick, J. (1987). Formulating the problem: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R.,& Berman, A. 2011. Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they? In M. Avotiņa, D. Bonka, H. Meissner, L. Ramāna, L. Sheffield & E. Velikova (Eds.), Proceedings of the 6th International Conference Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students (pp. 120-125). Latvia: Latvia University

Papadopoulos, Ioannis & Patsiala, Nafsika. 2020. Capturing Problem Posing landscape in a grade-4 classroom: A pilot study. Conference: CERME 11 At: Utrecht, The Netherlands.

Pólya, György. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Andreas Poulos 2017. A research on the creation of problems for mathematical competitions. The teaching of mathematics 2017, Vol. XX, 1, pp. 26-36

Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2021) *A problémafelvetés és feladatkészítés egy lehetséges megjelenítése matematikaórán.* TDK dolgozat

Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2021) *Közoktatásban tanuló diákok feladatkészítési képességének vizsgálata.* TDK dolgozat

Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina 2018: *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési és problémamegoldási készségeinek összehasonlítása.* TDK dolgozat

Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina 2019: *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési képességeinek vizsgálata fejlesztési céllal.* TDK dolgozat

Rosli, Roslinda & Capraro, Mary & Capraro, Robert. 2014. *The Effects of Problem Posing on Student Mathematical Learning: A Meta-Analysis*. International Education Studies. 7. 227-241. 10.5539/ies.v7n13p227.

Silver, E. A. 1994. On mathematical problem posing. – In: For the Learning of Mathematics 14(No.1), p. 19-28.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. Journal for Research in Mathematics Education, 27(5), 521–539.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. Journal for Research in Mathematics Education, 27, 293–309.

Singer, Michaela; Ellerton, Nerida; Cai, Jinfa; Leung, Eddie C.K.. 2011. In Ubuz, B. (Ed.).Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 137-166. Ankara, Turkey: PME.

Van, H. & Presmeg, Norma. 2015. An Investigation of High School Students' Mathematical Problem Posing in the United States and China. 293-308. 10.1007/978-1-4614-6258-3_14.

Mellékletek

1. melléklet: Szempontrendszer részletezése

Szakmai rész	Elérhető pont	Részletek				
Valamilyen tananyaghoz illő	8 pont	Teljesen jól beilleszthető valamilyen tananyagba, nem kell változtatni rajta (8 pont)	Beilleszthető a tananyagba, esetleg számok kicserélésével, de akár így is (6-7 pont)	Kisebb változtatásokkal, esetleg picike pontosítással bevihető órára is (3-5 pont)	Nem igazán tudnám bevinni órára, de azért látom, hogy hova szerette volna elhelyezni (1-2 pont)	Semmilyen tananyaghoz nem illeszkedik (0 pont)
Nehéz/könnyű (kihívás)	4 pont	Pont jó kihívást jelent, nem túl nehéz, de nem is unalmas (4 pont)	-	Kicsit túl könnyű vagy kezd túl bonyolulttá válni (2-3 pont)	-	Túl könnyű vagy túlontúl nehéz (0-1 pont)
Matematikailag helyes	8 pont	Matematikailag teljesen korrekt (8 pont)	Vannak benne apróbb matematikai pontatlanságok, de érthető, hogy mit szeretett volna (5-7 pont)	Úgy tűnik, hogy a beöltöztetés eléggé elrontotta a feladat matematikáját, de alapvetően jó lenne (3-4 pont)	Matematikailag elég pontatlan, de azért látszik, hogy nem teljesen rossz (1-2 pont)	Teljesen hibás matematikailag (0 pont)
Korosztályhoz illő	5 pont	A megjelölt korosztály számára ideális, bevihető, feladható (5 pont)	Kicsit nehéz még, de körülbelül eltalálta a szintet (4 pont)	Nehéz vagy túl könnyű a korosztálynak, de azért van olyan osztály, ahova be lehetne vinni kicsi változtatásokkal (2-3 pont)	-	Nem igazán lehet bevinni a korosztálynak, mert túl nehéz vagy teljesen át kellene variálni (0-1 pont)

Élvezetességi rész	**Elérhető pont**	**Részletek**				
Újszerű/eredeti/ ötletes	6 pont	Nagyon ötletes vagy nagyon ötletesen alakított át egy általa már ismert/látott feladatot (6 pont)	Újszerű (4-5 pont)	Nem nagyon ötletes, de azért látszik, hogy próbálkozott vagy lehet, hogy ő szereti ezt a típust, de nem igazán kreatív (3 pont)	Meglehetősen "tucatfeladat", de próbálta kicsit megváltoztatni, inkább kevesebb, mint több sikerrel (1-2 pont)	Egyáltalán nem ötletes, teljes mértékben tucatfeladat (0 pont)
Matematikai élmény	6 pont	Nagyon élményszerű a megoldása vagy valamilyen nagyon újszerű matematikai ötlet kell hozzá (6 pont)	Újszerű ötlet kell hozzá (4-5 pont)	Nem nagyon újszerű a matematikai élmény, de azért látszik, hogy próbálkozott (3 pont)	Próbálkozott kicsit élményszerűvé tenni, de nem igazán sikerült (1-2 pont)	Egyáltalán nem nyújt matematikai élményt a megoldása (0 pont)
Beöltöztetés	6 pont	Jól van beöltöztetve (6 pont)	Beöltöztetgette, de kicsit rossz vagy kicsit elromlott valamitől (például: túlbonyolította) (5 pont)	Nem nagyon öltöztette be, de azért látszik, hogy próbálkozott vagy elromlott a beöltöztetés valamitől (2-4 pont)	Meglehetősen rosszul van beöltöztetve vagy szinte egyáltalán nincs beöltöztetve (1 pont)	Egyáltalán nem öltöztette be, teljesen csak a konkrét feladatot írta le vagy nagyon rosszul öltöztette be, teljesen értelmetlen (0 pont)
Korszerűség	4 pont	Nem korszerűtlen (4-3 pont)	-	Korszerűtlen, de nem nagyon (2 pont)	-	Teljesen korszerűtlen és nem igazán tehető azzá (0 pont)

2. melléklet: Bemeneti teszt

1.) Adja meg az alábbi minta terjedelmét, átlagát, móduszát és mediánját! (5 pont)

13; 1; 1; 2; 8; 14; 5; 7; 3

2.) Adjon meg egy adatsokaságot, amelynek átlaga és mediánja egész szám! A minta legalább négy és legfeljebb hat elemet tartalmazzon! (3 pont)

3.) Tudjuk egy minta legkisebb elemét, ismerjük ugyanennek a mintának a terjedelmét. Ennyi információból megállapítható-e a mintánk legnagyobb eleme? Válaszát indokolja! (2 pont)

4.) Adottak egy 36 fős osztály irodalom dolgozatainak eredményei: 13 közepes, 7 jó, 16 jeles. (11 pont)

a.) Ábrázolja kördiagramon és oszlopdiagramon egyaránt az érdemjegyek eloszlását!

b.) Adja meg az osztályzatok mediánját!

c.) Az egyik diák azt állítja, hogy a dolgozatok rosszul sikerültek, mivel az átlag el sem éri a 4-est. Igaza van-e az adott tanulónak? Válaszát számítással indokolja!

3. melléklet: Kimeneti teszt

1.) Adja meg az alábbi minta terjedelmét, átlagát, móduszát és mediánját! (5 pont)

2; 5; 19; 23; 11; 9; 2; 3; 0

2.) Adjon meg egy adatsokaságot, amelynek átlaga és mediánja egész szám! A minta legalább négy és legfeljebb hat elemet tartalmazzon! (3 pont)

3.) Tudjuk egy minta legnagyobb elemét, ismerjük ugyanennek a mintának a terjedelmét. Ennyi információból megállapítható-e a mintánk legnagyobb eleme? Válaszát indokolja! (2 pont)

4.) Adottak egy 36 fős osztály történelem dolgozatainak eredményei: 13 közepes, 7 jó, 16 jeles. (11 pont)

a.) Ábrázolja kördiagramon és oszlopdiagramon egyaránt az érdemjegyek eloszlását!

b.) Adja meg az osztályzatok mediánját!

c.) Az egyik diák azt állítja, hogy a dolgozatok a megszokotthoz képest jól sikerültek, mivel az átlag eléri a 3,5-öt. Igaza van-e az adott tanulónak? Válaszát számítással indokolja!

4. melléklet: Példafeladatok

FELADATVARIÁLÁS

a.) Peti három szabályos dobókockával dobott egyszerre. (A szabályos dobókocka lapjai 1-től 6-ig vannak számozva.) Öccsének csak annyit árult el, hogy az egyik dobókockával 6-ost dobott, és a három dobott szám összege 15-nél kisebb páratlan szám. Milyen számokat dobhatott Peti a dobókockával? Sorold fel az összes lehetséges esetet! (A dobókockákon szereplő számok felsorolásának sorrendje nem számít.)

b.) Peti három szabályos dobókockával dobott egyszerre. (A szabályos dobókocka lapjai 1-től 6-ig vannak számozva.) Minden dobásban a dobott számok összege néggyel osztható lett, és kisebb volt, mint 12. Milyen számokat dohatott Peti a dobókockáival? Sorold fel az összes lehetséges esetet! (A dobókockákon szereplő számok felsorolásának sorrendje nem számít.)

c.) Peti négy szabályos dobókockával dobott egyszerre. Tudjuk, hogy bármilyen sorrendben is írta fel a dobott számokat, mindig páros számot dobott, és minden dobásban csak két egyforma szám szerepelt. Sorold fel, milyen dobásai lehettek Petinek! (A felsorolásban a számok sorrendje nem számít.)

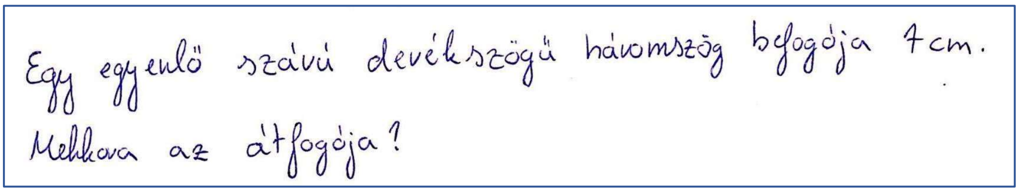
TEMATIKUS PROBLÉMAFELVETÉS

Téma: gráfok

a.) Az iskolai rajzszakkörre Anna, Béla, Csaba, Dani, Eszter és Flóra jár. Anna és Csaba ismerősök facebookon. Csabának még Eszter és Dani az ismerőse a csoportból. Béla rajzszakkörös ismerősei Flóra és Eszter. Több ismeretség nincs. Rajzold le az ismertségi hálót!

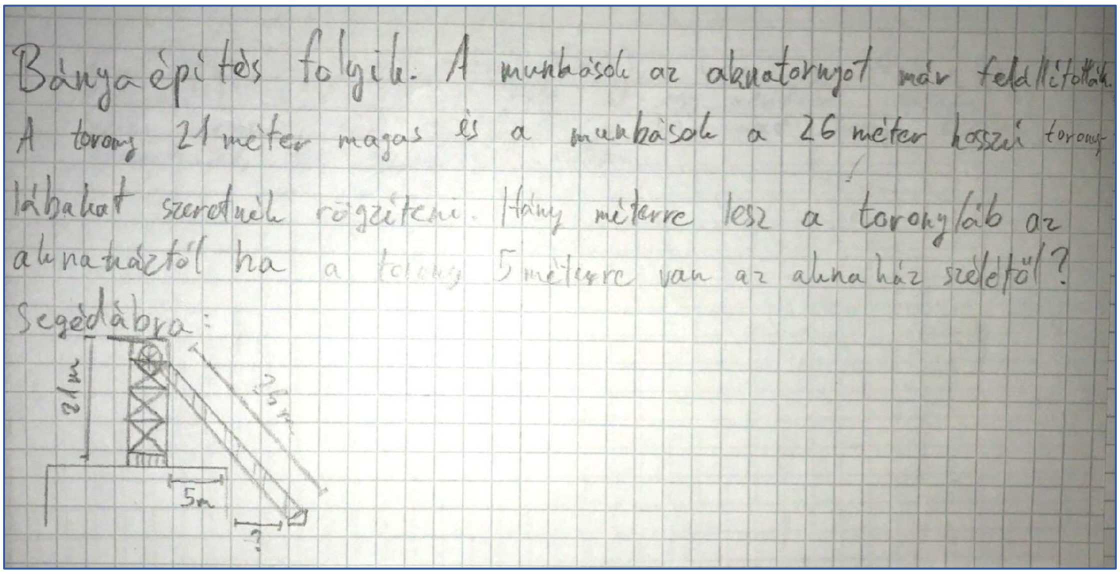
b.) Albert, Ambrus, András, Arnold és Attila egy baráti társaságot alkotnak. Ambrus azt állítja, hogy a társaságból 3 főnek 3-3 ismerőse van facebookon (a többiek közül), két főnek csak 1. Igaza lehet-e Ambrusnak?

5. melléklet: Néhány technikumba járó diák által felvetett feladat



9c_p2-21

Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög befogója 7 cm. Mekkora az átfogója?



9c_p1-41

Bányaépítés folyik. A munkások az aknatornyot felállították. A torony 21 méter magas és a munkások a 26 méter hosszú toronylábakat szeretnék rögzíteni. Hány méterre lesz a toronyláb az aknaháztól, ha a torony 5 méterre van az aknaház szélétől?

1.)
ER-ZSI KERÍTÉST ÉPÍT A CÖLÖP AMIT LEVER A
FÖLDBE AZ 2,5M HOSSZÚ EZT EGY 3,5 M HOSSZÚ
RÚDDALTÁMASZTJA MEG MILYEN MESSZE VAN A CÖLÖP-
TÖL A RÚD VÉGE ?

9c_p1-11

Erzsi kerítést épít. A cölöp, amit lever a földbe 2,5 m hosszú, ezt egy 3,5 m hosszú rúddal támasztja meg. Milyen messze van a cölöptől a rúd vége?

6. melléklet: A technikumban felvetett feladatok pontozása

	szakmai rész							élvezetességi rész							össz	
	csoport	valamilyen tananyaghoz illő	nehéz/könnyű (kihívás)	matematikailag helyes	korosztályhoz illő	össz	össz/max	újszerű/eredeti/ötletes	matematikai élmény	beöltöztetés	korszerűség	eredetiség+ mat élmény össz	össz	össz/max		**össz/max**
	max	8	4	8	5	25	100%	6	6	6	4	6	16	100%	**41**	**100%**
csoport	stratégia (1: var, 2:téma)	valamilyen tananyaghoz illő	nehéz/könnyű (kihívás)	matematikailag helyes	korosztályhoz illő	szakmaiság		újszerű/eredeti/ötletes	matematikai élmény	beöltöztetés	korszerűség	eredetiség+ mat élmény össz	élvezetesség			összesítés
9c_p1-11	1	7	4	8	5	24	96%	3	3	4	4	6	14	88%	**38**	**93%**
9c_p1-12	1	2	2	2	5	11	44%	0	0	1	3	0	4	25%	**15**	**37%**
9c_p2-21	2	8	3	8	5	24	96%	3	2	0	4	5	9	56%	**33**	**80%**
9c_p2-22	2	3	3	2	5	13	52%	4	2	2	4	6	12	75%	**25**	**61%**
9c_p2-31	2	7	4	8	5	24	96%	3	3	3	4	6	13	81%	**37**	**90%**
9c_p2-32	2	5	4	3	5	17	68%	4	3	5	4	6	15	94%	**32**	**78%**
9c_p1-41	1	7	2	8	3	20	80%	6	6	5	4	6	15	94%	**35**	**85%**
9c_p1-42	1	7	2	8	3	20	80%	6	6	5	4	6	15	94%	**35**	**85%**
9c_p1-51	1	7	4	8	5	24	96%	6	3	3	4	6	13	81%	**37**	**90%**
9c_p1-52	1	7	3	3	4	17	68%	4	3	1	4	6	11	69%	**28**	**68%**
9c_p1-61	1	7	4	5	5	21	84%	3	2	4	4	5	13	81%	**34**	**83%**
9c_p1-62	1	8	3	8	5	24	96%	3	2	2	4	5	11	69%	**35**	**85%**
9c_p2-71	2	3	4	4	5	16	64%	4	3	5	4	6	15	94%	**31**	**76%**

9c_p2-72	2	7	3	8	5	23	92%	4	3	5	4	6	15	94%	**38**	**93%**
9c_p2-73	2	7	3	4	5	19	76%	6	5	5	4	6	15	94%	**34**	**83%**
9a_s2-11	2	5	3	7	5	20	80%	5	3	6	4	6	16	100%	**36**	**88%**
9a_s2-12	2	5	3	8	5	21	84%	4	3	2	2	6	10	63%	**31**	**76%**
9a_s2-21	2	8	4	8	5	25	100%	6	6	6	4	6	16	100%	**41**	**100%**
9a_s2-22	2	5	4	7	5	21	84%	6	6	6	4	6	16	100%	**37**	**90%**
9a_s2-31	2	6	2	8	5	21	84%	2	2	2	2	4	8	50%	**29**	**71%**
9a_s2-32	2	4	3	7	5	19	76%	3	3	5	2	6	13	81%	**32**	**78%**
9a_s1-41	1	5	4	7	5	21	84%	6	5	6	3	6	15	94%	**36**	**88%**
9a_s1-42	1	3	3	5	5	16	64%	6	4	6	4	6	16	100%	**32**	**78%**
9a_s1-51	1	3	4	7	5	19	76%	3	3	4	3	6	13	81%	**32**	**78%**
9a_s1-52	1	3	4	4	5	16	64%	3	3	4	3	6	13	81%	**29**	**71%**
9a_s1-61	1	7	4	7	5	23	92%	6	3	6	4	6	16	100%	**39**	**95%**
9a_s1-62	1	5	4	7	5	21	84%	5	3	5	4	6	15	94%	**36**	**88%**
9a_s1-63	2	3	4	5	5	17	68%	4	3	5	4	6	15	94%	**32**	**78%**

7. melléklet: Néhány gimnazisták által felvetett feladat

1. feladat:

Charlie legújabb angyalai új kihívásba ütköznek. El kell lopniuk a Rózsaszín Párducot a Louvre-ból és biztonságba helyezni, mivel fülest kaptak, hogy pár enyveskezű bandita el akarja rabolni. Hogy megakadályozzák a banditákat, meg kell fejteniük a széf kódját. Annyit tudnak, hogy az első akadály, egy hatalmas páncélszekrény, ami 4jegyű kóddal nyitható. Ahhoz, hogy a kódot megtudják, meg kell oldaniuk kettő matematikai feladványt. Ám azt is meg kell vizsgálniuk, hogy a két egyenletnek mi a közös gyöke, és azt kell megszorozniuk 1002-vel, hogy megkapják a kódot. (Tehát, ha mindkét egyenletnek gyöke a 7, 7X1002 -> a kód 7014 lesz)

a.) Melyik x-ekre teljesül az alábbi egyenlet, ahol p egy valós szám?

$$x^2 - (8-p)(x+2) - 2p = (p-3) - 22x^2$$

2. $x^2 - 7x + 10 = 0$

2. feladat:

Pistike szeretne függvényekből házat építeni. Segítsetek neki! Rajzoljatok egy házat függvények, egyenletek segítségével! Mi megadtunk egy példát: A ház elemei a falak, tető, ablakok és alj, a kertjében pedig nőjön fű! Legyetek kreatívak, a lényeg, hogy ház legyen, plusz elemeket (ablak, ajtó, stb.) szívesen veszünk! A függvényeket írjátok be GeoGebrába, mentsétek el képként, majd vágjátok le a felesleges részeit, tehát adjátok meg írásban, hogy mit mivel rajzoltatok meg és adjátok meg a használt függvények értelmezési tartományát!