Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Kovács Veronika, Palotay Dorka

Ez is hungaricum - A modern tudomány és az oktatás kapcsolata

TDK

Témavezető:
Szabó Csaba

Budapest, 2012.

Tartalomjegyzék

1. Célkitűzés **5**

2. Magyarországi és az európai elvárások **7**
2.1. PISA felmérés . . . 7
2.2. Kerettanterv régen és most . . . 8

3. Kutatók és tanárok véleménye **10**
3.1. Frank András
(egyetemi tanár, ELTE Operációkutatási Tanszék, a Matematikai Intézet igazgatója) . . . 10
3.2. Hajnal Péter
(Egyetemi docens, Szegedi Tudományegyetem Halmazelmélet és Matematikai Logika Tanszék, Tanszékvezető helyettes) . . . 11
3.3. Lovász László
(Akadémikus, egyetemi tanár, ELTE Számítógéptudományi Tanszék) . . . 12
3.4. Sziklai Péter
(egyetemi docens, ELTE Számítógéptudományi Tanszék) . . . 13
3.5. Szőnyi Tamás
(Egyetemi tanár, ELTE Számítógéptudományi Tanszék) . . . 15
3.6. Klacsákné Tóth Ágota
(Nagy László Gimnázium, XX. ker) . . . 17
3.7. Nikházy Lászlóné
(Kazinczy Ferenc Gimnázium, Győr) . . . 17
3.8. Gerőcs László
(ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium, Budapest) . . . 18
3.9. Marton Sándor
(Babits Mihály Gimnázium, Budapest) . . . 19
3.10. Név nélkül . . . 19

4. Bevezetési lehetőségek **21**
4.1. Facebook . . . 21
4.2. Metró . . . 26
4.3. Gyakoroltatott fogalmak . . . 30
4.4. Kompetenciák . . . 30
4.5. Eddigi feladatok lefedése . . . 31

1. Célkitűzés

A magyarországi matematika oktatás hagyományosan feladatorientált. Ezekben a feladatokban folyamatosan megjelennek az élvonalbeli kutatási témák is. Az egyik ilyen modern kutatási terület a gráfelmélet. Az első gráfokkal foglalkozó feladat 1947-ben bukkant fel a Kürschák József Matematikai Tanulóversenyen, azóta a gráfelmélet jelenléte a középiskolai versenyeken folyamatos. Ez tipikusan olyan témakör, amely a gyengébb diákoknak is segít a matematizálás élményében, ugyanakkor a legjobbakat önálló matematikai eredményekhez is vezetheti. A 2002-es középiskolai kerettanterv már 10 órát szán gráfok oktatására kombinatorikával együtt. Ennek ellenére az az általános tapasztalat, hogy a középiskolából kikerülő diákok nagy része nem ismeri a gráfokat.

A gráfelmélet a matematikatörténetnek is fontos fejezete. A XVIII. század elején Euler foglalkozott először gráfokkal (Königsbergi hidak). A gráfelmélet fejlődése a XX. század elején indult meg. Amint a nemzetközi kutatásokban megjelentek a gráfok, Magyarország vezető matematikusai gondoskodtak arról, hogy hazánkban is széleskörben ismertté váljanak. Az egyetemen a matematikus és az alkalmazott matematikus szakirány több kurzusa is foglalkozik gráfokkal és alkalmazásaikkal (például: véges matematika, operációkutatás, játékelmélet, kombinatorikus algoritmusok stb.).

A jelen kutatásunkban a gráfok oktatási kérdéseivel foglalkozunk. Első lépésben áttanulmányoztuk a jelenlegi, valamint a készülő 2013 őszétől bevezetésre kerülő kerettanterveket. Megvizsgáltuk a napjainkban forgalomban lévő 4 tankönyvcsaládot (Matematika 11., Dr. Vancsó Ödön, Ráció könyvek; Matematika 11 – 12. Czapáry-Gyapjas, Nemzeti Tankönyvkiadó; Sokszínű matematika 11., Mozaik Kiadó; Matematika 11., Hajnal-Számadó-Békéssy, Nemzeti Tankönyvkiadó). Megnéztük, hogy milyen szerepet kap (vagy kaphatna) a gráfelmélet. Majd a gráfelmélettel kapcsolatos feladataikat rendszereztük és elemeztük a PISA felmérésben szereplő kompetenciák szerint. Ezek ismeretében először gráfelmélettel foglalkozó tudósok, kutatók, majd jelenleg is aktív középiskolai matematika tanárok véleményét kértük ki a gráfelmélet oktatásával kapcsolatban. Az eddigi kutatási eredményeink alapján célunk a korábbi felépítések megerősítése, vagy egy új felépítés kidolgozása volt. Az interjúkon szerzett benyomások alapján kidolgoztuk a gráfok oktatásának kétféle lehetséges bevezetését, amely egyszerre veszi figyelembe a kerettanterv nyújtotta lehetőségeket, a matematika oktatás szempontrendszerét, a kompetenciákat (PISA) és a kutatók elképzeléseit. A második fejezetben áttekintjük a kerettanterveket, és matematika oktatással szemben támasztott magyarországi és európai elvárásokat. A harmadik fejezetben foglaltuk össze a tudósokkal és tanárokkal készült interjúkat. Ezek a tudósok egyúttal számos könyv, gráfelméleti monográfia, és egyetemi jegyzet szerzői, tapasztalt egyetmi oktatók. A dolgozat fő része a negyedik fejezet, amelyben feladatsorokat állítottunk össze egyrészt internetes kapcsolatok, másrészt Budapest tervezett metróhálózat-térképének segítségével.

Ez a dolgozat már terjedelménél fogva sem tartalmazhatja az interjúk és a feladatsorok teljes elemzését, kutatásainknak azt a részét fogalmaztuk meg, amely közvetlenül megmutatja a változtatások szükségességét és időszerűségét. A feladatsorokat aktív iskolai használatra szántuk, néhány tanár és tankönyvszerző már el is kérte ezek munkaváltozatait. A feladatsorainkat folyamatosan fogjuk frissíteni, és ezt mindenki számára elérhetővé tenni mind dolgozat formájában, mind elektronikusan.

Itt szeretnénk megragadni az alkalmat, hogy köszönetet mondjunk oktatónknak, témavezetőnknek, Szabó Csabának. Aki kutatásunk során folyamatosan segített minket és bíztatott a minél szélesebb látókörűségre, valamint felhívta figyelmünket a kutatási módszerek következetes alkalmazásaira.

2. Magyarországi és az európai elvárások

2.1. PISA felmérés

PISA (Programme for International Student Assesment)

A PISA 1997 óta működő felméréssorozat, amit a Gazdasági Együttműködési és Fejlesztési Szervezet (OECD) hozott létre. „A tanulók tudását mérő nemzetközi program”, mely három területen vizsgálja a 15 éves diákok teljesítményét. Ezek a szövegértés, matematika és természettudomány. A méréseket 3 évente végzik, és minden évben kiemelten vizsgálják a három terület egyikét. 2003-ban a matematikán volt a hangsúly.[1]

„A PISA szerint az alkalmazott matematikai műveltség (mathematical literacy) az egyénnek azt a képességét jelenti, amelynek segítségével kifejezi, alkalmazza és értelmezi a különböző kontextusokban megjelenő matematikai tartalmakat. Idetartozik a matematikai gondolkodás, a matematikai fogalmak, eljárások, tények és eszközök használata annak érdekében, hogy leírjon, megmagyarázzon vagy megjósoljon egy jelenséget. Az alkalmazott matematikai műveltség segítséget nyújt az egyénnek abban, hogy felismerje a matematika szerepét a világban, és konstruktív, felelős és megfontolt állampolgárként jól megalapozott ítéleteket és döntéseket hozzon.”

Kompetencia osztályok:[2]

1. Reprodukció, definíciók és számítások alkalmazása.
2. A megszerzett tudás felhasználása, összekapcsolása a felmerülő problémával.
3. Matematikai gondolkodás, általánosítás és egy átfogó kép kialakítása.

A vizsgált matematikai kompetenciák a következők:

1. <u>Matematikai gondolkodás:</u> matematikai kérdések megfogalmazása, ezekre a válasz megadása, matematikai kijelentések (definíciók, tételek, feltételezések) megkülönböztetése és határainak felismerése.
2. <u>Matematikai érvelés:</u> a matematikai bizonyítások lényegének megértése, ilyen bizonyítások kiértékelése, megsejtése és elvégzése.
3. <u>Modellezés:</u> a modellezendő szituáció matematikaivá alakítása, matematikai rendszerek valóságba való áttranszformálása, matematikai modellekkel való foglalkozás, modellek kiértékelése és ismertetése.

4. Problémafelvetés és -megoldás: matematikai problémák felvetése, megfogalmazása és megoldása.

5. Ábrázolás: matematikai szituációk ábrázolása, értelmezése és megkülönböztetése, különböző ábrázolási módok közötti választás és váltás.

6. Szimbolikus, formális és technikai készség: szimbolikus és formális matematikai kifejezések dekódolása és értelmezése, a természetes nyelvvel való kapcsolat megértése, természetes nyelvről formális nyelvre való fordítás, számítások, formulákat tartalmazó állítások és kifejezések, valamint egyenletek kezelése.

7. Kommunikációs készség: matematikai tartalmú kifejezések megértése, matematikai dolgok lényegének leírása.

8. Eszközhasználat: a matematikai tevékenységeket segítő matematikai (informatikai) segédeszközök ismerete és használata.

Kutatásunk során folyamatosan szem előtt tartottuk a PISA által megfogalmazott kompetenciákat. A feladatokat ezeknek megfelelően alakítottuk ki, odafigyelve arra, hogy segítségükkel a diákokban kifejlődjenek a fent említett készségek. Ezekről a feladatok után egy összefoglaló táblázatot készítettünk.

2.2. Kerettanterv régen és most

"A matematika: kulturális örökség; gondolkodásmód; alkotó tevékenység; a gondolkodás örömének forrása; a mintákban, struktúrákban tapasztalható rend és esztétikum megjelenítője; önálló tudomány; más tudományok segítője; a mindennapi élet része és a szakmák eszköze."

(Kerettanterv)

Kutatásunk során áttanulmányoztuk és összehasonlítottuk az eddig hatályban lévő, valamint a 2013 őszétől bevezetésre kerülő kerettanterveket.[3] Tapasztalatainkat az 1. táblázatban foglaltuk össze.

A kerettantervek áttekintésekor már első olvasásra feltűnt, hogy míg a korábbiban csupán egy rövid összefoglaló táblázat, és egy két szavas utalás található, addig az újban sokkal nagyobb hangsúllyal szerepelnek a gráfok. A táblázatból is látható, hogy míg az eddigi kerettantervben csupán 11. osztályban jelentek meg, addig az újban már a $9-10$. kétévfolyamos ciklusban

	Eddigi kerettanterv	*Új kerettanterv*
Hányadik osztályban jelennek meg először a gráfok?	11.	9-10.
Javasolt óraszám	10 óra + folyamatosan beépül a tanagyagba kombinatorikával együtt	$9-10$. évfolyam: 20 óra halmazelmélettel, logikával, kombinatorikával együtt; $11-12$. évfolyam: 11 óra kombinatorikával együtt
Melyik tematikus egységben szerepel?	Gondolkodási módszerek	Gondolkodási és megismerési módszerek
Tovább haladás feltételei/várt eredmények	A gráf szemléletes fogalma, egyszerű alkalmazásai	A gráfok eszközjellegű használata problémamegoldásban

1. táblázat. Kerettantervek összehasonlítása

találkozhatunk velük. Az órakeret egyik esetben sincs szigorúan meghatározva, a javaslatok több anyagrészre vonatkoznak együttesen. Látható az is, hogy az új kerettanterv több lehetőséget kínál.

Az új tantervben már szerepel, hogy mely alapfogalmak elsajátítása a minimális követelmény. Ezek a csúcs, az él, a fokszám, a fokszámok összege és az élek száma közötti összefüggés. Itt már a gráfok alkalmazási lehetőségeit is kiemelik. Az összes anyagrész közül ez az egyik, amelynek a legtöbb kapcsolódási pontja van a többi tantárggyal. Hiszen gondoljunk csak bele, amikor kémia órán a molekulák térszerkezetét ábrázoljuk, tulajdonképpen gráfokat használunk. Az informatikában számtalanszor dolgozunk közvetve, vagy közvetlenül gráfokkal, például már maga a könyvtárszerkezet is egy fagráf. Bár nem gondolnánk, de még a történelem órán is találkozhatunk velük, amikor például családfát ábrázolunk. Ezek mellett az új kerettanterv már utal a gráfok mindennapi jelentőségére is, ehhez a közlekedést hozza példának.

Összességében a kerettantervben történő változások pozitívan érinthetik a gráfok oktatását. Hiszen az új tanterv már felhívja a figyelmet az alkalmazási lehetőségek fontosságára, és több óraszámot biztosít ezek elsajátítására. Félő azonban, hogy mivel az óraszám az egész tematikus egységre közösen vonatkozik, így eltolódhat a hangsúly más anyagrészek felé (pl.: kombinatorika).

3. Kutatók és tanárok véleménye

A gráfoktatás helyzetének feltérképezésekor természetesen elengedhetetlen maguknak az oktatóknak a felkeresése. Fontosnak tartottuk a terület szakértőinek a megkérdezését. Ennek érdekében Magyarország legelismertebb gráfelmélettel foglalkozó professzoraival beszélgettünk. Kíváncsiak voltunk arra, hogy ők milyen bevezetési lehetőségeket tartanak célravezetőnek a gráfok oktatásában.

3.1. Frank András
(egyetemi tanár, ELTE Operációkutatási Tanszék, a Matematikai Intézet igazgatója)

Frank András elmondta, hogy bár az egyetemen gráfelmélet oktatásban régóta vesz részt, de a terület középiskolai megjelenítésével sohasem foglalkozott. Ezért észrevételei, megjegyzései legfeljebb csak vitaindító ötleteknek, lehetséges megközelítéseknek tekinthetők. Benyomása szerint nem igazán szerencsés az olyan alapvető gráfelméleti fogalmak, mint fa, út, kör, fokszám mechanikus bevezetéseivel kezdeni az ismerkedést. Célravezetőbb lehet olyan konkrét, életszerű problémákat keresni, és szemügyre venni, amelyek természetesen vezetnek el egyes gráfelméleti fogalmak megfogalmazásának igényéhez. Úgy gondolja, hogy a hatékony algoritmusok vizsgálata az egyetemi oktatásban ugyan alapvetően fontos, ezek középiskolai tárgyalására nem igen van lehetőség. Ugyanis már az is nehéz feladat, hogy egy algoritmusról eldöntsük, hogy hatékony-e.

Számos olyan algoritmus van, amelyek gyakorlati áttekintése rengeteg időbe telne. Tekintsük például azt a feladatot, mely során egy n pontú gráfról kell eldönteni, hogy csúcsait ki lehet-e színezni k színnel úgy, hogy azonos színű csúcsok között ne vezessen él. Ha bármely két pont között vezet él, akkor és csak akkor létezik jó színezés, ha $k \geq n$. Ha van két pont (u és v), amelyek nem szomszédosak, akkor az u és v csúcsok színe vagy megegyezik, vagy különböző. Ha egyforma színű a két pontunk, akkor tudjuk őket egyesíteni, ha eltérő színűek, akkor köztük húzhatunk egy új élt. Mind a két esetben egy új gráfot kaptunk. Ezeket a lépéseket ismételgetve 2^n lépés során juthatunk el a végső színezésig. Ez az algoritmus tehát hiába véges, a lépésszám még így is nagy, az algoritmus exponenciális nagyságú, és már kis (pl.: 30 pontú) gráfokra is a gyakorlatban teljesen használhatatlan. „Akkor tekintünk hatékonynak egy algoritmust, ha a lépésszáma a bemenő adatok méretének egy hatványával korlátozható. Az ilyen algoritmust polinomiális futásidejűnek nevezik (szemben az exponenciális vagy még nagyobb futásidejű algoritmusokkal).” Annak eldöntése pedig, hogy melyek azok az algoritmusok, amelyek polinomiálisak, már bőven meghaladja a középiskolai szintet, egyetemen is csak másodévben kerülnek elő, és még itt is gondot okoz a hallgatók számára.

A gráfelmélet középiskolai bevezetése a Königsbergi hidak problémájával kezdődhetne. Ennél a híres matematikai problémánál Königsberg (ma: Kalinyingrád) város hídjainak bejárhatóságát vizsgáljuk. A várost átszelő folyón 7 híd ível át, amelyek a folyó két szigetét is érintik. Az egyik szigetről $2-2$ híd vezet mind a két parta, a másiknál $1-1$. A hetedik híd a két szigetet köti össze. A kérdés az, hogy vajon be lehet-e járni úgy a hidakat, hogy minden hídon pontosan egyszer haladjunk át. Első megközelítésben rá kell vezetni a diákokat arra, hogy a lerajzolás alakja nem számít. Vagyis, a szárazföldeket (a két partot és a szigeteket), mint pontokat ábrázolhatjuk, köztük pedig éleket húzhatunk a hidaknak megfelelő módon.

Felmerült a kérdés, hogy egy 2 pontú gráfban lehet-e a pontok fokszáma $2-2$. Természetesen lehet, több esetben is. Itt bevezethetjük a többszörös él, valamint a hurokél fogalmát. A hurokél esetén azonnal tisztázni kell azt a kérdést, hogy mennyivel járul hozzá a fokszámhoz, hiszen ezt többféleképpen lehet értelmezni. Fontos arra ügyelni, hogy meglévő fogalmak kiterjesztésénél az eddigi alaptulajdonságok továbbra is érvényben maradjanak. Így például a hurokél fokszámok összegéhez 2-vel járul hozzá, hiszen a fokszámok összegére vonatkozó eddigi szabályunk csak így maradhat továbbra is igaz.

Véleménye szerint vannak olyan, a gráfelmélet szempontjából fontos, el nem hanyagolható feladattípusok, amelyeket mindenképp alkalmazni kell. Ezekhez kell jó keretmesét kitalálnunk, így érdekesebbé tenni őket. Ide sorolta azokat a feladatokat, ahol megadott sorozatokról kell eldönteni, hogy lehet-e az egy egyszerű gráfnak, páros gráfnak, fának fokszámsorozata. Továbbá az olyan közismert feladatokat, mint például bizonyítsuk be, hogy egy társaságban mindig van két olyan ember, akiknek pontosan ugyannyi ismerősük van a társaságon belül.

3.2. Hajnal Péter (Egyetemi docens, Szegedi Tudományegyetem Halmazelmélet és Matematikai Logika Tanszék, Tanszékvezető helyettes)

Hajnal Péter elmondta, hogy nagyon szerencsés helyzetben érzi magát, hiszen hozzá csak motivált, matematika iránt érdeklődő diákok kerülnek. Véleménye szerint a gráfelmélet bevezetésekor nagy segítség, hogy az egyszerűbb feladatok lerajzolhatók, ezáltal a diákok könnyebben megértik őket, el tud-

1. ábra. Hajnal Péter

ják képzelni a problémát. Úgy gondolja, hogy bizonyos fogalmak formális bevezetése fölösleges. Például az izomorfia egy igen nehéz fogalom, fontosabbnak tartja szemléletes feladatok megoldását, a definíció pontos kimondása helyett. A legrövidebb út keresését a középiskolai szintnél nehezebbnek tartja. Szerinte is fontos valóságközeli, érdekes feladatokat adni a diákoknak, azonban szem előtt kell tartani, hogy a valóság mindig bonyolultabb. Például jó ötletnek tartja órarend-tervezéssel kapcsolatos feladatok megoldását, figyelembe véve azt, hogy a valóságban sokkal több befolyásoló tényező van, mint amennyit egy ilyen feladat keretei megengednek. Félelme, hogy bizonyos diákokat még ezekkel sem lehet elérni, és az érdekesebbnek szánt feladatokat is visszautasítják. Szerinte előnyös lehet a gráfokkal kapcsolatos tudást, más tantárgyak során tanultakkal összekötni. Például a kémiában annak kiszámításakor, hogy egy adott szénhidrogén hány molekulát tartalmaz. Természetesen itt is felmerül a kérdés, hogy miért érdekelné ez a diákokat.

3.3. Lovász László (Akadémikus, egyetemi tanár, ELTE Számítógéptudományi Tanszék)

Lovász László az eddigi gráfelmélet oktatásra szánt órakeretet igencsak limitáltnak tartja, éppen ezért szerinte nagyon fontos a rendelkezésre álló idő leghatékonyabb kihasználása. Úgy gondolja, hogy a fogalmak puszta definiálása nem megfelelő, sok időt vesz el, az anyag így túl száraz, és a célunkat sem érjük el vele. Elmondta, hogy vannak olyan diákok, akiknek a matematikai szépség, vagy egy szép gondolatmenet még manapság is elegendő motiváció,

2. ábra. Lovász László

ugyanakkor találkozhatunk olyanokkal is, akiket így nem lehet elérni. Velük megismertethetjük a gráfelmélet egyes alkalmazási területeit, és így rájöhetnek arra, hogy ez a mindennapi életben is hasznos lehet. Ilyen alkalmazások lehetnének egy játékkal, internettel, vagy GPS-szel foglalkozó feladatok, hiszen a GPS is gráfok segítségével dolgozik. Hozzátette, hogy a kézfogással, koccintással kapcsolatos feladatokat nem nevezhetjük alkalmazásoknak, ezek csupán átszövegezések. Továbbá jó ötletnek tartja, hogy a tanárok gráfokkal kapcsolatos játékokkal színesítsék az órát. Elmondta még, hogy az alkalmazások időről időre változnak. A különféle kongresszusokon mindig téma az, hogy épp az adott időben mit tekintünk matematikai alkalmazásnak. Ezek az alkalmazások folyamatosan változnak, ezért az oktatásban is állandóan frissíteni kellene őket. Ezt ő a tanárok rendszeres továbbképzésének a keretében tudja elképzelni.

3.4. Sziklai Péter (egyetemi docens, ELTE Számítógéptudományi Tanszék)

Sziklai Péter izgalmas és szemléletes feladatok bemutatásával keltené fel a diákok érdeklődését a gráfelmélet iránt. Érdekesnek tartja azokat a példákat, melyekben a cél a legrövidebb út megtalálása. A gráfelméletben az u és v pontok közötti legrövidebb útnak azt az utat nevezzük, mely minimális hosszúságú. Amennyiben a gráf éleit nem láttuk el súlyokkal, akkor ez nem jelent mást, mint a legkevesebb élszámú utat, ellenkező esetben azt, amelynek az élein szereplő súlyok összege a lehető legkevesebb.

Ennek látványos bemutatására két modellt is javasolt. A kettő közti lényeges különbség, hogy míg az első két kiválasztott pont közti minimális

3. ábra. Sziklai Péter

utat keresi, addig a második segítségével egy tetszőleges ponttól az összes többibe vezető legrövidebb utat kapjuk meg.

Az első esetben tekintsünk egy csatornahálózatot, melyet szeretnénk vízzel feltölteni. A feladat megoldásához a rendszert azonosítsuk egy gráffal a következő módon: legyenek a gráf élei a hálózatot alkotó csövek, csúcsai pedig ezek találkozási pontjai. A kérdés az, hogy a gráf két kiválasztott pontja között melyik a legrövidebb út. Ennek megválaszolásához kezdjük el feltölteni a hálózatot az egyik pontnál, és figyeljük a víz áramlását. Számunkra az az időpillanat a fontos, amikor a víz először eléri a célpontot. Ekkor láthatjuk, hogy melyik élen, azaz csövön érkezett. Ezután megkeressük az adott él másik végpontját, melyre újfent elvégezzük a kísérletet. Ezt addig folytatjuk, amíg a kiinduló ponthoz nem érünk. A vizsgálat során kapott csúcsok és élek alkotják a keresett legrövidebb utat.

A második javasolt szemléltetési módszer egy fagolyós Dijkstra-modell. A Dijkstra-algoritmus egy gráf adott csúcsából (legyen ez v) az összes többi csúcsba vezető legrövidebb utat keresi. Ebben az esetben a gráf irányított vagy irányítatlan élei nemnegatív súlyokkal vannak ellátva. Tekintsük azt az S részgráfot, mely azokat a csúcsokat tartalmazza, melyekhez már megállapítottuk a legkisebb súlyú utat v-ből, és azokat az éleket, amik ezeket az utakat alkotják (kiinduláskor ez a részgráf csupán a v kezdőpont). Az algoritmus során minden lépésben egy csúccsal bővítjük ezt a halmazt, mégpedig úgy, hogy a csúcs hozzávételével továbbra is igaz maradjon az S részgráfra vonatkozó feltétel. Ezt úgy tehetjük meg, hogy keressük a következő minimumot:

$$min\,\{\mu_c(u) + c(uv) : uv \text{ kilépő él } S\text{-ből}\}$$

ahol $\mu_c(u)$ az u csúcsba vezető minimális út súlya, $c(uv)$ pedig az adott uv él súlya. Azt az élt vesszük hozzá a halmazhoz, melyen ez a minimum felvétetik.[4]

Az algoritmus bemutatása során a gráf csúcsait azonos nagyságú és súlyú fagolyókkal, az éleket a hosszuknak (súlyuknak) megfelelő fonallal szemléltetjük. A modellt az asztalra fektetjük, majd szépen lassan valamely pontjánál fogva elkezdjük felemelni. A gráf akár egy valódi úthálózat (kicsinyített) modellje is lehet, a csúcsokat összekötő fonalak vagy cérnák hosszai pedig a valódi hosszak. Ha az út hossza kettő, akkor a fonál hossza is kettő, ha π, akkor π. Lassan kezdjük el felemelni az egyik golyónál fogva a gráfot. Figyeljük, hogy a csúcsok mikor emlekednek fel az asztalról. Amikor épp fölemelkedik egy golyó, akkor a kezünkben lévő pont pillanatnyi magassága épp a két pont távolsága a gráfban.

Ezeken a modelleken kívül Sziklai Péter véleménye szerint jól lehetne használni a különböző közösségi oldalakat, mint például a facebookot, illetve az iwiwet gráfos feladatok gyártására. Így például az iwiw legrövidebb út keresés funkciója jól szemléltethető gráfok segítségével.

3.5. Szőnyi Tamás (Egyetemi tanár, ELTE Számítógéptudományi Tanszék)

4. ábra. Szőnyi Tamás

Szőnyi Tamás rámutatott arra, hogy a gráfelmélet csupán 1984 óta szerepel a matematika tanári képzés kötelező tantárgyai között, így akik korábban szereztek diplomát, még nem tanulták, ezért idegenkednek tőle. Elmondta azt is, hogy tanári továbbképzéseken gyakran vitatott kérdés, hogy mennyire fontos a gráfelmélet oktatása. Sokszor felmerült már, hogy nem lenne-e hasznosabb a ráfordított időt más anyagrész, például a másodfokú egyenlet megoldóképletének elmélyítésére felhasználni.

Összegzésként készítettünk egy táblázatot (2. táblázat), amelyben a gráfelmélettel foglalkozó egyetemi oktatók véleményét foglaltuk össze.

A táblázatból jól látható, hogy valamennyien nagyon fontosnak tartják a gráfok oktatását, valamint a modellezési, és valóságközeli feladatok alkal-

	Frank András	***Hajnal Péter***	***Lovász László***	***Sziklai Péter***
Fontos	+	+	+	+
Fogalmak	−	−	−	
Modellezés	+	+	+	+
Valóságközeli feladatok	+	+	+	+
Alkalmazási lehetőségek		Kémia, órarend	GPS, internet	Közösségi oldalak
Legrövidebb út	?	−		+
Euler	+	+		
Továbbképzés			+	

2. táblázat. Egyetemi oktatók véleménye

mazását a témakörben. Az alapfogalmak sulykolását többségük nem tartja célravezetőnek.

Természetesen nem csak az egyetemi oktatókat kérdeztük meg. Középiskolai matematika tanárok véleményét is kikértük a gráfok tanításáról. Arra voltunk kíváncsiak, hogy mennyi időt szánnak a gráfok tanítására, mik azok a fogalmak, feladatok, amik szerepelnek az órákon, és mennyire szeretik tanítani ezt az anyagrészt.

3.6. Klacsákné Tóth Ágota (Nagy László Gimnázium, XX. ker)

5. ábra. Klacsákné Tóth Ágota

Klacsákné Tóth Ágota a kerettanterv alapján minden évben megtanítja a gráfelméletet a 11-es diákjai számára. Azonban ugyanez a kollégáiról már nem mondható el, hiszen ők ezt a témakört teljes mértékben kihagyják az oktatott anyagok közül. Ő is csak az alapvető fogalmakat tanítja meg, kevesebb, mint 10 órát szán rájuk. Éppen ezért önálló munkára csupán egyszerűbb feladatokat adhat fel, hiszen például a körrel kapcsolatos feladatok már problémát jelentenek a diákoknak.

3.7. Nikházy Lászlóné (Kazinczy Ferenc Gimnázium, Győr)

Nikházy Lászlóné a gráfelméletet általában 12. osztályban vezeti be a diákjai számára. Ekkor is csak azokra a részekre koncetrálva, amelyek az érettségihez kellenek. Ez maximum $3-4$ órát jelent, ennél többet időhiányban nem tud rá szánni. Kutatásunk során átnéztük az eddigi évek érettségi feladatsorait, amelyekben mi magunk is meglepődve tapasztaltuk, hogy valóban alig jelennek meg gráffal kapcsolatos, valamint gráfok segítségével megoldható feladatok. Általában egy középszintű érettségiben maximum $2-3$ pontot lehet gráfok ismeretében összeszedni, az összes 100 pont közül. Nikházy Lászlóné hozzátette, hogy ő személy szerint szereti tanítani ezt az anyagrészt, és éppen emiatt nagyon sajnálja, hogy nem tud vele több időt foglalkozni.

6. ábra. Nikházy Lászlóné

3.8. Gerőcs László
(ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnázium, Budapest)

7. ábra. Gerőcs László

Gerőcs László abban a szerencsés helyzetben van, hogy 11-es, 12-es diákokat általában csak fakultáción tanít. Itt sokkal nagyobb óraszám (11-ben heti 2, 12-ben heti 4 órával több) áll rendelkezésére az egyes anyagok feldolgozására, így a gráfok oktatására is. Az alapfogalmakra épülő feladatokon kívül nehezebb példák is előkerülnek az óráin, például az Euler-sétával foglalkozó problémák. Az anyagrészt egy látványos power point bemutatóval vezeti be, amin szerepelnek az alapfogalmak, fontosabb tételek, valamint néhány részletesen kidolgozott feladat. A feladataiban szeretné a diákok figyelmét felhívni a gráfok jelentőségére a mindennapokban, ennek érdekében például szociometriával kapcsolatos feladatokat dolgoznak fel az óráin.

3.9. Marton Sándor (Babits Mihály Gimnázium, Budapest)

8. ábra. Marton Sándor

Marton Sándor elmondta, hogy sajnos ma már nem úgy mennek a dolgok a matematika tanításban, mint az ő diákkorában. Ma már csupán az akkori óraszám 80%-a áll a tanárok rendelkezésére. Ennek következtében nagyon feszített a tempó, de arra mindig nagy hangsúlyt fektet, hogy a gyerekek megtanulják, hogy a gráfok problémamegoldási eszközként nagyon jól használhatók. Hozzátette, hogy csak 2 órát szán rá, a többi időben a geometriát pótolja. Elmondta, hogy az ő iskolájuk nem mérvadó, hiszen ez egy erős gimnázium, a Fazekas után innen mennek a legtöbben a BME-re, valamint a tavalyi Babits-napokon például Lovász László tartott előadást. Továbbá a Tanár Úr elmesélte, hogy ő maga a gráfelméletet könyvekből tanulta meg, hiszen az ő évfolyamának ez még nem volt kötelező tananyag az ELTE-n.

3.10. Név nélkül

Több általunk megkérdezett középiskolai tanár csak név nélkül vállalta, hogy mesél nekünk arról, hogy hogyan oktatja a gráfelméletet. Sokan közülük csak az egyszerűbb feladatokig jutnak el, szerintük a gráfok egyáltalán nem fontosak ezen a szinten. Találkoztunk olyan véleménnyel is, mely szerint annyira egyszerű a gráfelmélet, hogy azt a diákok otthon, egyedül is fel tudják dolgozni. Beszélgettünk több olyan tanárral, akiknél egyáltalán nem szerepelnek a gráfok.

Összegzésként elmondhatjuk tehát, hogy a középiskolai tanárok véleménye igen változatos, de néhány pontban többségük egyetért. Ide sorolható az időhiány, valamint az, hogy érettségin alig szerepelnek gráffal kapcsolatos feladatok, így más tananyagot fontosabbnak tartanak. Mindannyian hangsúlyozták, hogy az alapok nem túl nehezek, és ha lenne rá több idő, akkor hasznos lehetne az oktatásuk.

4. Bevezetési lehetőségek

Az eddigi kutatási eredményeink figyelembevételével a középiskolai gráfelmélet oktatásának egy új felépítésére teszünk javaslatot.

Két merőben különböző téma segítségével dolgoztuk ki bevezető feladatsorainkat. Ezek kiválasztásakor fontosnak tartottuk, hogy minél közelebb álljanak a diákok mindennapjaihoz. Célunk felhívni a diákok figyelmét arra, hogy a gráf nem csak kötelező tananyag, hanem egy olyan eszköz is, amit indirekt módon szinte mindig alkalmazunk a hétköznapokban. Ennek megfelelően valósághoz közeli, gyakorlatias feladatok kidolgozására törekedtünk.

A két fő témakör, amik köré a feladataink épülnek a facebook és a közlekedés, melyekhez kapcsolódó példák nagyon jól szemléltethetők gráfokkal. Mindkettő segítségével bevezethetők a gráfelméleti alapfogalmak, amiket érdekes és változatos feladatokon keresztül ismerhetnek meg a diákok. Nagy előnyük az eddigi feladatokhoz képest, hogy közvetlenül mutatják meg a gráfok alkalmazási lehetőségeit.

A két témakör együttes feldolgozását javasoljuk a középiskolában. A gráfok bevezetését tetszés szerint bármelyikkel elkezdhetjük. Sok fogalom mindkét felépítésben szerepel. Ezek segítségével, amikor rátérünk a második témára, akkor a már megtanult fogalmakat ismételhetjük, a diákok tudását elmélyíthetjük, miközben a még hiányzó fogalmakat is megtanítjuk nekik.

Most tekintsük át az elkészített feladatsorokat. Az egyes feladatoknál megjelöltük, hogy mely fogalmak bevezetésére, gyakoroltatására szolgálnak. A feladatok közül párat részletesebben is kidolgoztunk, néhány helyen rámutattunk a továbbfejlesztési lehetőségekre is.

4.1. Facebook

Két ok miatt esett a választásunk a facebookra. Az egyik az, hogy népszerűsége egyre nagyobb. Hazánkban a felhasználók száma már közel négymillió fő, ezzel a 39. legtöbb facebook felhasználóval rendelkező ország vagyunk. Szinte minden középiskolás diák használja nap, mint nap. Ezen keresztül ismerkednek, tartják a kapcsolatot barátaikkal, szervezik a programjaikat. A másik ok, hogy funkciói rendkívül jól alkalmazhatók a gráfok bemutatására.

A facebookkal kapcsolatos feladatok feldolgozása előtt nagyon fontos tisztázni a használt kifejezéseket. Ebben a fejezetben ismerős, ismeretség alatt természetesen mindig azt értjük, hogy az illetők facebookon egymás ismerősei. A facebook két funkcióját használtuk a feladatokban. Az egyik a megosztás. Erről azt kell tudni, hogy ha egy személy megoszt valamit, akkor azt kizárólag az ismerősei láthatják, és a feladatokban feltesszük, hogy ők látják is a megosztott tartalmat. A másik a bökés funkció, mely segítségével bármely felhasználó virtuálisan megbökhet egy másikat. Az 3. táblázatban összefoglaltuk a facebook funkciók kapcsolatát a gráfokkal.

Facebook funkciók	***Gráffal kapcsolatos alapfogalmak***
Személyek	csúcsok
Ismeretség	él
Ismerősök száma	fokszám
Megosztás	szomszédos csúcsok halmaza
Bökés, bejelölés	irányított él

3. táblázat. Facebook-gráf megfeleltetés

Ezen alapfunkciók segítségével jutunk el az összetettebb fogalmak bevezetéséhez.

A feladatokban a 9.a és 9.b osztály facebookos tevékenységeit vizsgáljuk. Mindkét osztály létszáma 21. A diákok közül többen délutáni szakkörre és nyelvvizsga előkészítőre járnak:

- angol nyelvvizsga előkészítő: 9 fő
- német nyelvvizsga előkészítő: 12 fő
- rajzszakkör: 6 fő
- médiaszakkör: 8 fő

1. Rajzszakkörre Anna, Betti, Csaba, Dani, Eszter és Fanni jár.

   (a) Anna és Csaba ismerősök facebookon. Csabának még Eszter és Dani az ismerőse a csoportból. Betti rajzszakkörös ismerősei Fanni és Eszter. Több ismeretség nincs. Rajzoljuk le az ismeretségi hálót.

   (b) Rajzoljunk le kettő lehetséges ismeretségi hálót, ha csak annyit tudunk, hogy Annának 5, Bettinek 4, Csabának, Daninak és Eszternek 3, Fanninak 2 rajzszakkörös ismerőse van a facebookon.

   Ez a feladat az alapfogalmakkal való megismerkedést szolgálja. A gyerekek modellezési készségének fejlődését segíti. Könnyen lehet, hogy ekkor találkoznak először a gráfokkal, így már maga az ábrázolás is kihívást jelent számukra. A (b) feladatnak izomorfia erejéig két jó megoldása van. Több fontos részletre is felhívhatjuk a diákok figyelmét. Az egyik, hogy az ábrázolást Annától érdemes indítani, hiszen az ő ismerősei adottak, nincs választási lehetőség, mindenkit ismer. A többiekről ez már nem mondható el, esetükben már több jó megoldás is létezik. Érdekessége még a feladatnak, hogy segítségével megismertethetjük a diákokkal az izomorfia fogalmát. Ez egy igen nehéz fogalom, de a definíció pontos kimondására itt nincs is szükség. Hajnal Péter például azt javasolta, hogy az átnevezhetőségre mutassunk rá, azaz arra, hogy ha adott két izomorf gráf, akkor, ha az egyikben a csúcsok jelöléseit a megfelelő módon cseréljük fel, akkor megkaphatjuk a másikat. Természetesen a feladatnak erre a részére célszerű később visszatérni, ha a diákoknak már nem okoz gondot a feladatok gráfos ábrázolása.

2. A 9 fős angol csoportban előfordulhat-e, hogy mindenkinek 3 ismerőse van a facebookon?

3. Az új 9.b osztályban az évnyitó után a diákok elkezdték bejelölni egymást a facebookon. A hét végén Eszter büszkén mondta, hogy míg mindenkinek 20 ismerőse van az osztályból, addig neki már 21. Péter azt állította, hogy Eszter rosszul emlékszik. Kinek van igaza?

4. Bizonyítsuk be, hogy mindig vannak ketten az osztályban, akiknek ugyanannyi ismerősük van facebookon az osztályból.

5. A 21 fős 9.a osztály tagjai között 140 ismeretség van facebookon. Előfordulhat -e, hogy ha valaki megoszt valamit, akkor van olyan osztálytársa, aki ezt nem látja?

6. A 9.b osztályban a lányok közül mindenki ismer mindenkit a facebookon. Tudjuk, hogy a köztük lévő ismeretségek száma 55. Kati is ebbe az osztályba jár. Hány lányismerőse van az osztályból?

   Ez egy összetettebb feladat a teljes gráf élszámának gyakoroltatására. Annyiban érdekesebb a szokásos teljes gráfos feladatoknál, hogy nem a csúcsokból kell az élek számát meghatározni, hanem fordítva, az élek számának ismeretében kell a csúcsok számára következtetni. Ráadásul nem is közvetlenül erre kérdezünk rá, ezzel is segítve az absztrakciós készség fejlődését. A feladatnak talán az a legnehezebb része, hogy a diákok felismerjék, hogy a kérdés megválaszolásához igazából csak a gráf csúcsainak a számát kell megadni, ami az előző feladat megoldása után már nem okoz nagy nehézséget.

7. A 8 fős média szakkör tagjai mindannyian megosztották a vizsgafilmjüket a facebookon. Tudjuk, hogy van olyan videó, amit a szakkör

minden tagja látott. Legalább hány ismeretség van a csoporton belül? Rajzold le!

8. Legkevesebb hány ismeretség szükséges a 12 fős német csoport tagjai között a facebookon ahhoz, hogy ha a tanárnő valakinek elküldi a házi feladatot, akkor az mindenkihez el tudjon jutni?

   Az előző feladatokban a könnyebb alapfogalmakat vezettük be, most pedig összetettebb, egyszerre több fogalmat is gyakoroltató példák következnek.

9. Ugyanezen 12 diák között legalább hány ismeretség szükséges ahhoz, hogy még akkor is biztosan mindenkihez eljusson a házi feladat, ha az ismerősök közül ketten összevesznek és törlik a kapcsolatukat?

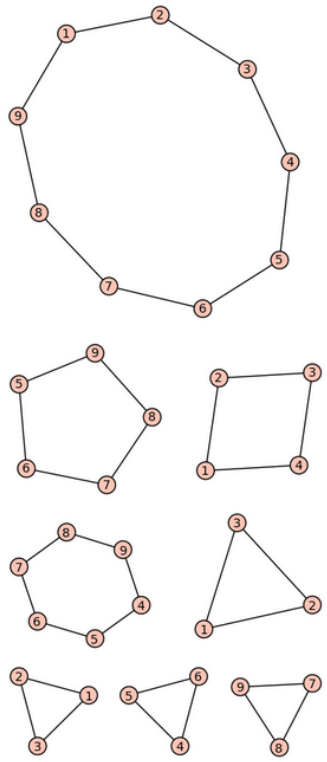
10. A 9.b osztályban mindenkinek legalább egy osztálytársa ismerőse a facebookon, és tudjuk, hogy kevesebb ismeretség van az osztályon belül, mint 21.

    (a) Bizonyítsuk be, hogy biztosan van olyan, akinek csak egy ismerőse van az osztályból.

    (b) * Hány ismeretség lehet az osztályban?

11. Balázs megosztotta facebookon a londoni kiránduláson készült videót. A 9 fős angol csoportból mindenkinek pontosan két ismerőse van a facebookon. Aki meglátja közülük az új videót, szintén megosztja azt. Előfordulhat-e, hogy valaki nem látja a videót? Rajzoljuk le a lehetőségeket!

    Ha mindenkinek két ismerőse van, akkor az ismeretségeket ábrázoló gráf diszjunkt körök uniója lehet csak. A diákok első gondolata valószínűleg a 9 pontú kör lesz. A kérdést azért fogalmaztuk meg így, hogy ezután ne álljanak meg, folytassák a gondolkodást: meg lehet-e oldani, hogy valakihez ne jusson el a videó? A válasz természetesen igen, hiszen a gráf 2 vagy 3 kisebb kör uniója is lehet.



9. ábra. Diszjunkt körök uniója

12. Anna a rajzszakkörön mindenkit megkérdezett, hogy hány barátjukat bökték már meg a szakkörről, illetve, hogy őket hányan bökték meg. A válaszokat az alábbi táblázatban foglalta össze:

	A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***
Hány embert bökött meg?	1	0	1	0	3	1
Hány ember bökte meg?	1	1	2	1	1	1

4. táblázat. Anna felmérése

Bizonyítsuk be, hogy valaki nem mondott igazat!

Ennek a feladatnak a megoldása egyáltalán nem nehéz, célunk csupán az irányított gráfok bemutatása. A feladat segítségével a diákok láthatják, hogy milyen sok lehetőség rejlik még a gráfokban. Természetesen az irányított gráfok részletesebb vizsgálata már nem fér bele a kerettantervben meghatározott óraszámba, legfeljebb fakultáción foglalkozhatunk velük mélyrehatóbban.

4.2. Metró

A közlekedés témakörben Budapest tervezett metróhálózatának térképét vettük alapul. Már maguk a metróvonalak és a megállók egy gráfot alkotnak.

10. ábra. Metrótérkép

Térkép objektumai	***Gráffal kapcsolatos alapfogalmak***
Állomások	csúcsok
Metró vonalak	élek
Adott állomásról indulási irányok száma	fokszám
Csomópontok	2-nél nagyobb fokszámú csúcsok
Párhuzamos metróvonalak	párhuzamos él

5. táblázat. Metró-gráf megfeleltetés

Ezen alapfunkciók segítségével jutunk el az összetettebb fogalmak bevezetéséhez.

1. Keress olyan megállót ahonnan

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4 irányba tudsz elindulni.

Melyik megállóból lehet a legtöbb irányba elindulni?

Ez a feladat a gráfokkal való ismerkedést segíti. Az irányok száma a metró vonalak gráfjában az egyes csúcsok fokszáma. A legtöbb csúcs fokszáma 2, ezek azok a megállók, amelyeken egy metró vonal halad át. Az 1 fokszámú csúcsok pontosan a végállomások. 3 fokszámú csúcsot nem találunk, érdemes feltenni a kérdést, hogy mikor lehetne ilyen a gráfban. Természetesen ez csak úgy lenne lehetséges, ha egy metróvonal végállomása, és egy másik metró köztes állomása egy pontba esne.

A legtöbb irányba a Deák Ferenc térről tudunk elindulni, itt 4 metró találkozik, vagyis 8 irányba indulhatunk.

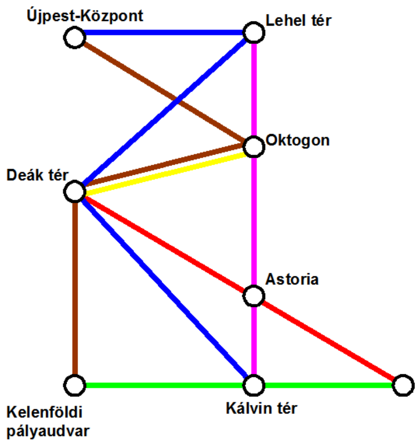
Ennél a feladatnál a párhuzamos élektől eltekinthetünk.

2. Rajzold le azt a gráfot, amelynek csúcsai a csomópontok, élei a köztük lévő metróvonalak.

   Ez egy bevezető feladat, melynek célja a gyerekek modellezési készségének a fejlesztése (12. ábra). Ehhez egy nagyon hasonló feladat: Rajzoljuk le azt a gráfot, amelynek csúcsai azok a megállók, amik elhagyásával továbbra is bármely két állomás között vezet út! Itt egy nagyon hasonló gráfot fogunk megkapni, azzal a különbséggel, hogy az eredeti feladat élei ebben már utak. Ilyen formában természetesen már csak az összefüggőség bevezetése után adhatjuk fel a diákoknak.

3. Minden metróvonalon különböző színű pecsétet adnak jegykezeléskor. Egy jegyen lehet több pecsét, de 2 egyforma színű nem. Össze lehet gyűjteni az összes pecsétet egy jegyre úgy, hogy közben nem jöhetünk fel a metróból?

   Ez egy játékos feladat, amelyben a diákokat próbálkozásokra, rajzolásra ösztönözzük. Az előző feladatban lerajzolt gráf nagy segítséget nyújthat számukra. Az összes színű pecsétet több lehetséges úton is össze lehet gyűjteni. Az egyik ilyen: Oktogon - Astoria - Keleti pályaudvar - Kálvin tér - Deák tér - Oktogon - Újpest-Városközpont.



11. ábra. Átrajzolt metrótérkép

4. Hány metrót kell még építeni ahhoz, hogy bármely 2 csomópont között legyen közvetlen járat?

5. Gergő felszáll a metróra. Azt a játékot találja ki, hogy miután ment vele egy kicsit, leszáll, majd egy másikra felszáll, és azzal is elmegy valameddig. Biztosan vége lesz egyszer ennek a játéknak?

   Előfordulhat, hogy ennek a játéknak sosem lesz vége, ha például Gergő körbe-körbe utazgat a csomópontok között.

6. Melyek azok a szakaszok, amelyeket ha lezárnak, akkor még mindig el tudunk jutni bármely állomásról bármelyikre.

7. Mutass 4 különböző eljutási lehetőséget a Kálvin tértől Újpest-Központig.

   (a) Van-e 2 olyan út, amelyeknek nincs közös megállója?

   (b) Ha az Astoriát lezárják, akkor van-e 2 ilyen út?

   (c) Minimum hány állomást kell ahhoz lezárni, hogy ne lehessen eljutni a Kálvin tértől Újpest-Központig?

   Ennél a feladatnál nagyon kell vigyáznunk arra, hogy a hétköznapi értelemben használt út szó, valamint a gráfok esetében az út fogalma nem feltétlenül jelenti ugyanazt. Az első feladat, miszerint mutassunk 4 különböző eljutási lehetőséget, a hétköznapi értelemben utalhat 4 különböző útvonalra, de a gráfelméleti fogalomra nem, hiszen a térképen nem találunk 4 olyat, melyeknek se közös állomása, se közös szakasza nincs. Itt megemlíthetjük a séta fogalmát.

2 olyan utat, melynek nincs közös megállója még találhatunk, azonban az Astoria lezárása után ez már nem lehetséges, hiszen minden útvonal áthalad a Deák Ferenc téren. A (c) kérdésre a válasz 1, elég a Deák Ferenc teret lezárni, bármely másik megálló lezárása esetén lesz még út a két állomás között.

Az ebben a feladatban megjelent fogalmak a jelenlegi felépítésben nem jellemzőek. Mi azért döntöttünk amellett, hogy szerepeljenek a feladatsorunkban, mert az egyetemi professzorok szinte kivétel nélkül ajánlották, emellett nagyon látványosak, jól szemléltethetőek, valamint sok alkalmazási területen igen fontosak.

8. Az 1-es (sárga) metró Barack Obama látogatása miatt le van zárva az összes megállójával együtt. El tudsz-e jutni a Csömöri úttól a Filatorigátig metróval?

9. Új tarifát vezetnek be a metróvonalakon. Eszerint annyiszor 30 Ft-ot kell fizetnünk, ahány állomást érintünk. Minimum mennyibe kerül eljutni Újpest-Városkaputól a Ferenc körútig?

   Újpest-Városkaputól a Ferenc körútig átszállás nélkül el tudunk jutni a kék metró vonalán. Azonban fontos észrevenni, hogy ha közben a Lehel téren átszállunk az 5-ös (rózsaszín) metróra, és a Kálvin téren szállunk vissza a kékre, akkor 60 Ft-ot spórolhatunk. Ezzel a feladattal már utalhatunk az élsúlyozott gráfokra, amelyek már ugyan meghaladják a középiskolás szintet, azonban érdekes lehet a diákok számára. Emelt szinten akár ehhez kapcsolódó feladatokat is kidolgozhatunk.

10. A Lehel téren betörtek egy bankba. A rendőrök üldözőbe vették a bankrablót, aki a metróba menekült. Úgy próbálta megtéveszteni a rendőröket, hogy néhányszor átszállt, és másik metróval folytatta az útját. Ha egy metrószakaszon már utazott a rabló, akkor azt már figyelik a rendőrök, így nem tud újra azon utazni. Amíg tudott, lent maradt a metróban. Amikor már nem volt más lehetősége, kijött a metróból. A rendőrök már a kijáratnál várták. Hol kapták el a bankrablót?

    Az Euler-sétával, Euler-körrel foglalkozó feladatok a középiskolai gráfoktatás talán legérdekesebb része. Ez az a témakör, melyhez a jelenlegi tankönyvekben is találhatunk érdekes feladatokat, és amely leginkább felkelti a diákok érdeklődését. A feladat megoldása a 12. ábrán látható gráf segítségével célszerű. Megoldható párhuzamos élekkel, és azok nélkül is. Első esetben a válasz az Oktogon, utóbbinál a Deák Ferenc tér.

4.3. Gyakoroltatott fogalmak

Készítettünk egy táblázatot, melyben összefoglaltuk, hogy feladatsoraink segítségével mely fogalmakkal ismerkedhetnek meg a diákok.

Fogalmak	*Facebook*	*Metró*
Csúcs	1., 2., 3., 4.	1., 2., 3.
Él	1., 2., 3., 4.	1., 2., 3.
Fokszám	1., 2., 3., 4., 10., 12.	1., 2.
Csúcsok és élek száma közötti összefüggés	10.	
Fokszámok összege	2., 3., 12.	
Teljes gráf	5., 6.	4.
Út	7., 8.	1., 2., 7.
Séta		7.
Fa	7. (csillag), 8., 10.	
Kör	9., 11.	2., 5., 6.
Összefüggőség	9., 11.	2., 6., 7., 8.
Komponensek	9., 11.	6., 7., 8.
Elvágó pont(halmaz)		7., 8.
Diszjunkt út	9.	7.
Irányított gráf	12.	a legtöbb feladat átalakítahtó
Párhuzamos él		2.
Legrövidebb út		9.
Euler		10.

6. táblázat. A feladatokban fellépő gráfelméleti fogalmak

4.4. Kompetenciák

A feladatsor készítése közben nem csak az volt a célunk, hogy a szükséges fogalmakat lefedjük, hanem az is, hogy a különböző kompetenciák fejlődését is segítsük. Ennek alapjául a PISA felmérésben szereplő kompetenciák szolgáltak. Készítettünk egy táblázatot, melyben a 2.2. fejezetben ismertetett kompetencia komponenseket, az azok fejlesztését szolgáló feladatokkal párosítottuk.

Kompetenciák	***Feladatok***
Gondolkodás	F/5, 6, 9, 12, M/2, 3, 5, 7, 9
Érvelés	F/2, 3, 4, 6, 10, 11, M/4, 7, 8, 10
Kommunikáció	minden feladatban az első lépés a matematikai tartalom megértése
Modellezés	F/1, 3, 6, 7, 11, M/1, 3, 9, 10
Problémafelvetés- és megoldása	F/2, 4, 8, M/4, 6, 7, 8
Ábrázolás	F/1, 7, 11, M/3
Szimbolikus, formális nyelv és technikai műveletek	egyik feladatot sem közvetlenül a matematika nyelvén fogalmaztuk meg, így ez a diákok feladata
Eszközhasználat	számos eszközt segítségül hívhatunk, pl.: számítógép

7. táblázat. Kompetenciák a feladatokban

4.5. Eddigi feladatok lefedése

Feladataink az eddigi tankönyvek feladatainak jelentős részét lefedik. Egyes fogalmakat kevésbé tartottunk fontosnak (például: izolált pont, hurokél), helyettük más fogalmakat vezettünk be (például: elvágó pont, komponensek stb.).
Az alábbi táblázatban megmutatjuk, hogy az általunk megvizsgált tankönyvcsaládok feladatait hogyan fedik le a feladatsoraink. A következő jelöléseket használtuk:

- V: Matematika 11., Dr. Vancsó Ödön, Ráció könyvek
- Cz: Matematika 11 – 12., Czapáry-Gyapjas, Nemzeti Tankönyvkiadó
- S: Sokszínű matematika 11., Mozaik Kiadó
- H: Matematika 11., Hajnal-Számadó-Békéssy, Nemzeti Tankönyvkiadó

Feladataink	***Eddigi feladatok a tankönyvekben***
Facebook/1	V/48, S/45/5, H/188
Facebook/2	S/45/2, H/185
Facebook/3	H/185
Facebook/4	V/68, S/45/7, H/186
Facebook/5	S/61/1, V/53, 55, 56, 57, 71, 74, H/182, 183
Facebook/6	V/53, 54, 58, 72, 73, H/182, 183
Facebook/7	Cz/13, S/61/2
Facebook/8	Cz/13, 416, S/61/2
Facebook/10	Cz/12, H/184
Metró/4	S/61/1, H/182, 183, V/53
Metró/6	Cz/11
Metró/7	H/190
Metró/10	S/55/1, 2, 3, 4, H/192, Cz/4

8. táblázat. Átfedések a feladatokban

Hivatkozások

[1] Balázsi I., Ostorics L., Szalay B., Szepesi I. *PISA 2009. Összefoglaló jelentés. Szövegértés tíz év távlatában.* Budapest, Oktatási Hivatal, 2010.

[2] http://www.math.klte.hu/kovacsa/Kompetencia.pdf

[3] http://www.ntk.hu/kozepiskola/oktatastamogatas/kerettanterv

[4] http://www.cs.elte.hu/ frank/jegyzet/opkut/ulin.2011.pdf