EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

BERECZKY-ZÁMBÓ CSILLA GYÖNGYVÉR – MUZSNAY ANNA – SZEIBERT JANKA

MATEMATIKATANÁR-SZAKOS HALLGATÓK PROBLÉMA-ALKOTÁSI KÉPESSÉGEINEK FEJLESZTÉSE

MATEMATIKA - FIZIKA ÉS MATEMATIKA-KÉMIA OSZTATLAN TANÁRSZAK

TDK DOLGOZAT

Témavezetők:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

„A tanulók matematikai fejlődése és a tanulási folyamat során alapvető, hogy ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai stb.) és leírásokat. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő készségek kialakítása, valamint az ezeket megalapozó képességek fejlesztése." (NAT, 2012)

Dolgozatunk témája a matematikatanár szakos hallgatók probléma-felvetési, probléma-alkotási képességének vizsgálata. A problémafelvetés, ahogy láttuk, mint kompetencia megjelenik a Nemzeti Alaptanterv követelményei között, elsősorban, mint a valós életben megjelenő probléma egyszerűsítése egy megoldható formára, amihez hozzá tartozik még annak ellenőrzése, hogy az így kapott eredmény alkalmazható-e a valódi feladat/probléma megoldására. Ha ez egy diáktól elvárandó, akkor még inkább elvárandó egy matematika tanártól. Különösen igaz ez amiatt, hogy a magyarországi matematikaoktatás köztudottan problémaközpontú, az általános- és középiskolai matematikaoktatás egyik központi célja a probléma-megoldási képesség fejlesztése.

A 2018-ban az EU által elsődlegesen megjelölt (Niss, 2015) (és a NAT-ban is szereplő) 8 matematikai kompetencia közül kettőt emelnénk ki, melyek a mi kutatásunk szempontjából a leginkább lényegesek. Ezek a kompetenciák a következők:

(3.) A matematikai problémamegoldás: felismerni, megfogalmazni és osztályozni a problémákat; önállóan alkotni problémákat; ellenőrizni, értékelni a probléma-megoldási folyamatot; stratégiákat/sejtéseket alkotni; megoldani különböző fajta problémákat (változatos kontextusban, a matematikán kívülieket is, nyílt végűeket is)

(4.) A matematikai modellalkotás: lefordítani a matematika nyelvére a különböző területekről vett problémákat; a modellen belül dolgozni; az eredményeket visszafordítani az eredeti kontextusba; megmutatni a különbséget az adott problémaszituáció és a matematikai modellje között.

A modellezési feladatok mind szöveges feladatok és a legtöbb szöveges feladatnak is van modellezési jellege. Ebben a cikkben problémafelvetésen elsősorban szöveges probléma-felvetést és modellezéshez közel álló probléma felvetést értünk. A szöveges feladatoknak kiterjedt szakirodalma van (Blum & Niss 1991; Boaler 1993; Cooper & Dunne 2000, Palm 2006). Ezek a kutatások szöveges feladatokat többféle szempont alapján osztályozzák, pl. nyitottság, összetettség, szövegezés, beöltöztetettség, érdeklődés, valóságtartalom, sztereotípiák, iskolán kívüli tartalom, kognitív tevékenység, megoldhatóság, különböző nemek feladatban elért eredményessége, fejlesztett kompetenciaterületek. (Bereczky-Zámbó, Muzsnay, Szeibert 2017). Mi ebben a kutatásban az összes ilyen szempontnak megfelelő feladatot figyelembe vesszük.

Egy fontos szempontja a problémafelvetésnek az, hogy új problémák keletkezzenek. (Singer, 2011.) A régi problémák, bár akkoriban megfeleltek a követelményeknek, elavulhatnak. Elavulhatnak a témáik miatt, elavulhatnak a matematikai tartalmuk miatt, és az is lehet, hogy bizonyos feladatok eleve nem jó feladatok voltak. Gyakran emlegetik Palm pékséges feladatát (Palm, 2006), amiben piskótatekercs térfogatára illetve eladási gyakoriságára kérdez rá. Ha belegondolunk, mennyire senkit nem érdekel az első feladat és senkinek nincs kedve kiszámolni…vagy eszünkbe jut a vicc, hogy csak egy matekfeladatban fordulhat elő, hogy valaki vesz 89 db görögdinnyét… Napjainkban válik elavulttá az a feladat, hogy hányféleképpen lehet kilyukasztani egy BKV – vonaljegyet, hiszen alig van már néhány villamosvonal, ahol hagyományos 3x3-as lyukasztó működik. Problémákra tehát szükség van, és új probléma csak úgy születik, ha azt valaki felveti.

A problémafelvetés vizsgálata és gyakorlata új lendületet kapott, amikor 1994-ben Silver (Silver, 1994) összefoglalta a problémafelvetéssel foglalkozó addigi kutatásokat. Ezek alapján és segítségével többféleképpen osztályozza a problémafelvetés lehetséges módjait. Ezután a cikk után számtalan olyan munka jelent meg, amelyeknek fő célja különböző taxonómiák, szempontrendszerek felállítása a problémafelvetés leírására, illetve a sztenderdizálható elnevezések bevezetésére való törekvés.

Ilyen például Silvertől magától az a cikk (Silver, 1995), amelyben az alapján osztályozza a probléma-felvetést, hogy probléma-megoldás előtt, alatt, vagy azt követően megy e végbe. Stoyanova (1998) három kategóriát különbözet meg az alapján a szempont alapján, hogy mennyi és milyen jellegű megkötés van a kitűzendő problémát illetően. Az első kategória: új probléma felvetése egy már megoldott problémára alapozva, a második: kérdések feltevése megadott történet vagy feltételek alapján, a harmadik, legtágabb kategória: probléma kitűzése tartalmi megkötés nélkül, a célközönségre fókuszálva, azaz úgy, hogy problémamegoldók egy bizonyos köre számára legyen érdekes az adott feladat.

Leendő tanárok és tanítók probléma-felvetési képességét is többen vizsgálták Például Patákova (2013) a matematikatanárokat, mint problémakitűzőket három típusba sorolja: újonc, szakértő és specialista. A mi szemszögünkből a szakértő a legfontosabb kategória. Azokat sorolja ide, akik gyakorlott problémafelvetők, de nem rendszeresen gyakorolják ezt a tevékenységet. A cikkből kiderül, hogy ilyet keveset találunk, pedig optimális esetben a tanárok többségének (legalább) ebbe a kategóriába kellene tartoznia. A szakértők legfőbb jellemzője ugyanis, hogy tevékenységük minden szempontból tudatos. Általában tudják előre, hogy kell kinéznie egy problémának, nagyon széles az eszköztáruk, magas mércéket állítanak maguk elé és azokat el is érik. Ezért kézenfekvő, hogy szakértő szintű feladatkészítők képzése lenne a cél a matematika tanárképzés során. A tanárok és leendő tanárok körében a probléma-felvetés képességét elsősorban tanítók és általános iskolai tanárok körében vizsgálták. Olsana & Pelczer (2015) az 1990 és 2012 között, tanító szakosok matematika módszertan óráin történő probléma-felvetésével kapcsolatos kutatásokról nyújt áttekintést. Ők például három kategóriába sorolták az általuk vizsgált cikkeket: problémafelvetés, mint a tanítási tevékenység szerves része, mint attól független tevékenység és mint kutatási eszköz a tanító szakosok tudásának és elképzeléseinek vizsgálatához. Az általános iskolai tanárnak készülő hallgatók probléma-felvetési képességeit tárgyalja Leung (1994). Úgynevezett probléma-láncok segítségével arra a megállapításra jutottak, hogy azok, akik magasabb pontszámot értek el a kísérlet során kitöltött matematika tudásmérő teszten, sokkal strukturáltabb, rendszerezettebb folyamat során alkottak feladatokat, mint matematikából gyengén teljesítő társaik. Olvashatunk elemzéseket arról is, hogy különböző, feladatmegoldásban és –kitűzésben rutinos matematikusok és tanárok feladatkészítési technológiái mennyire különböznek, illetve hogy milyen mértékű és jellegű kreativitást kíván meg a versenyfeladatok megalkotása. Kontorovich és Koichu (2012) több esettanulmánya azt vizsgálja, hogy ezekben a feladatkitűzőkben milyen, egymással összefonódó kognitív és érzelmi folyamatok játszanak irányító szerepet a feladatkitűzés során, például min múlik, hogy egy feladatkitűzőben egy feladat kitűzésekor megjelenik-e a felfedezés vagy az újdonság érzése. Egyik esettanulmányukban az interjú során azt mondja a tanulmány alanya, hogy ha kérnek tőle egy kitűzött feladatot, akkor az egyik kedvenc tételét felidézi és annak alkalmazására ír egy feladatot. Jó lenne, ha minden matematikatanár és feladatkitűző ezt ilyen könnyedséggel tudná csinálni, amihez elengedhetetlen a biztos szakmai tudás. A szaktárgyi tudás ugyanis erősen összefügg a tanári hatékonysággal. A számos lehetséges szempont közül Poulos (2017) a feladatkészítők pedagógiai célkitűzéseit vizsgálja kutatásai során. Eredménye szerint négy, szorosan összefüggő pontban fogalmazhatók meg ezek a célok: Az első: lehetőséget adni a diákoknak igazi, mély matematika tanulására. A második: megerősíteni a diákok pozitív hozzáállását a matematikához. A harmadik: szellemi kihívást állítani a tanulók elé. A negyedik: meglepni a hallgatókat.

Christou et al (2005) a korábbi szakirodalmi szempontok összefésülésével, a problémamegoldás és problémafelvetés közben végzett tevékenységek osztályozása és vizsgálata alapján dolgozta ki empirikus taxonómiáját. A taxonómia magába foglalta a következőket: mennyiségekre vonatkozó információk kiválasztása és kezelése, mennyiségekre vonatkozó információk megértése jelentés társításával, mennyiségre vonatkozó információk más formára való „fordítása".

Kognitív szempontból is többféleképpen osztályozták a problémafelvetést, például a felhasználandó matematikai számolások mélysége szerint (Cai,1995), illetve a tanár által megadandó reprezentációk szerint. (Cai, 2005). Ide tartozik még a problémafelvetés országonként különböző kulturális háttere, amelyet vizsgáltak Kínában és Amerikában (Cai & Lester, 2005), Japánban (Hashimototo & Sawada, 1984) és Finnországban (Pehkonen, 1995). (Singer et al, 2011) Törökországi kutatások például azt mutatják, hogy a leendő tanárok általában szokványos problémákat tűznek ki. Újítani nem mernek és attól is tartanak, hogy nem tudják megoldani a saját maguk által kitűzött problémákat. (Lavy & Shriki, 2007)

Látható, hogy sokan foglalkoztak a problémafelvetéssel, és ahányan voltak, annyiféleképpen tették ezt. Más-más szempontokat vettek figyelembe, amik nehezen fűzhetők össze egy nagy, összefoglaló képpé és rendszerré. Egy egységes nyelvezet megfogalmazását tűzi ki célul (Kontorovich & Koichu, 2012) ahol arra dolgoznak ki egy szempontrendszert, hogy milyen alapon lehetne kidolgozni a problémafelvetés módszertanát. Mi ehhez a kutatáshoz szeretnénk hozzájárulni egy új megközelítéssel.

A magyarországi feladatkultúra magas és szerteágazó, a matematikatanítás problémaközpontú. A magyarországi feladatkultúra erősségét jelzi a számtalan matematika-verseny, amelyeken évente több ezer diák vesz részt. Nem csoda tehát, hogy a magyarországi problémafelvetésre a fenti osztályozások egyike sem megfelelő, mert vagy túl egyoldalú, vagy túl általános. Mi azt próbáltuk megvizsgálni, hogy (Kontorovich & Koichu, 2009)-hoz hasonló erős szakmai háttérrel (Patákova, 2013) szerinti kategóriák alapján legalább szakértő kategóriában (Poulos, 2017) szempontjait tekintetbe véve képesek-e a magyarországi tanárszakos hallgatók problémát felvetni, figyelembe véve a magyarországi viszonyokat. A követelményrendszer elég erős.

Kísérletünkben az egyik fő vizsgált szempont az egyetemi tudás alkalmazása volt: tudnak-e az egyetemi tudás felhasználásával feladatot készíteni. (Kontorovich & Koichu, 2012)-vel összhangban a problémafelvetést, mint a probléma-megoldás egy speciális fajtáját is vizsgálhatjuk, így az a kérdés, hogy a korábban megszerzett tudást erre a speciális típusú feladatra tudják-e alkalmazni. A második vizsgált szempont az volt, hogy tudnak-e feladatot készíteni rögzített témakörben, amelyet a kurzuson elhangzott feladatok és elméleti anyag adott meg és alapozott meg. A vizsgálat harmadik szempontja az volt, hogy tudnak-e különböző szintű feladatokat készíteni, ahol a szint mind korosztálybeli eltérést, mind a korosztályon belüli tudás- és képesség szerinti differenciálást jelenthetett. Röviden összegezve tehát kísérletünkben azt vizsgáltuk, hogy a magyarországi tanárszakos hallgatók és doktoranduszok képesek-e rögzített háttérrel, rögzített témakörben különböző szintű feladatokat készíteni.

A feladat a következő volt: készítsünk egy feladatsort az alábbiak alapján:

- rögzített elméleti tudás: az egyetemi kurzusok algebra és számelmélet anyaga
- rögzített témakör: lehetőleg kombinatorikai jellegű feladatok
- öt-hat választható különböző szint 5. osztályos gyakorló feladattól a 12. osztályos versenyfeladatig.

2. Kísérlet

A kutatás megvalósításának eszköze egy új kurzus meghirdetése volt a 2016/2017-es tanév tavaszi félévében „Az algebra alkalmazásai középiskolai feladatokban” címmel. A résztvevők közé elsősorban elit harmad- és negyedéves hallgatókat vártunk, illetve a Matematika Doktori Iskola Didaktikai Programjának doktoranduszait.

A kurzusnak, mint tanegységnek két fő célja volt. Az egyik a feladatmegoldásról, a másik a feladatkészítésről szólt.

Cél volt, hogy a résztvevők képessé váljanak annak eldöntésére, hogy egy adott középiskolai feladat – különös tekintettel az országos és nemzetközi versenyek nehéz feladataira – megoldható-e magasabb szintű algebrai eszközökkel. Amennyiben ilyen megoldás létezik, akkor azt meg is találják és a benne szereplő absztrakt algebrai gondolatokat le tudják fordítani „középiskolai nyelvre”. A kurzus második fő célja az volt, hogy a hallgatók maguk is tudjanak absztrakt algebrai eszközök segítségével olyan általános- és középiskolai problémákat felvetni, amelyek megoldásának hátterében absztrakt algebra áll, de megfelelően „lefordítva” anélkül is megoldható a feladat. Ez utóbbi volt a kísérletünk fő célja.

Irányított tematikájú feladatok készítését szerettük volna látni a résztvevőktől. Így magának a kurzusnak a kutatás szempontjából további fontos szerepe volt, hogy a tematikát megadja, és a diákok találkozzanak inspirációként és etalonként szolgáló feladatokkal. Emellett (főként versenyfeladatokból) helyben megoldandó feladatok és beadandó leckék is szerepeltek a kurzus anyagában.

A kurzus óráit három típusba sorolhatjuk.

1) tisztán szakmai órák, ahol a hátteret és tematikát megadó egyetemi tananyag leadása történt meg.
2) szakmai alapokkal megoldható feladatok megoldásával töltött órák. Itt általában irányított feladatmegoldás történt, azaz adott volt a diákok számára, hogy milyen eszköztárat kell használniuk.
3) Versenyfeladatok megoldása

A kurzus az Algebra és Számelmélet 1-4. kurzusok anyagára épült. (Ld.: Függelék.). A kurzus szempontjából az Algebra és Számelmélet 1 és 3 kurzusok témakörei, illetve az Algebra és

Számelmélet 4 utolsó néhány témaköre voltak a legfontosabbak. A főbb témák, fogalmak, amelyek ismeretére a kurzus épített: dimenzió fogalma, generátor és független vektorrendszer, bázis, főként véges (prím) elemszámú test felett, többváltozós polinomok, számelméleti függvények, rend; és természetesen a lineáris egyenletrendszerek megoldása, a megoldások száma és az egyenletrendszer mátrixának rangja közötti kapcsolat, a megoldáshalmaz jellemzői. Fontos megjegyezni, hogy a bilineáris és kvadratikus alakok és a skalárszorzat nem szerepelnek a matematikatanár szak tematikájában.

A kurzust végül két PhD hallgató, öt negyedéves és négy harmadéves tanárszakos vette fel és egy Erasmus hallgató Újvidékről, Vajdaságból. Ez azért fontos, mert a PhD hallgatók már régebben végezték az egyetemet, a szakmai anyagot fel kellett frissíteniük. A szakmai anyag első- és harmadév elején szerepel, azaz a harmadéves hallgatóknak az algebrai rész a frissen szerzett tananyag, a negyedévesek pedig egy éve tanulták. A számelmélet és klasszikus algebra tananyagot a harmadévesek egy éve tanulták, a negyedévesek régebben. A tanulás óta eltelt idő jelenthet akár felejtést, akár ülepedést. A kurzus elsősorban a kísérlet céljait szolgálta, ezért a kurzus tematikájára a nagymértékű rugalmasság volt jellemző. A kurzus előadója kérésre bármilyen elméleti vagy gyakorlati kérdés, szakmai anyagot vagy feladatot újra elmagyarázott.

Kiindulásul a sor-és oszloptündéres feladat (Palotay & Pozsonyi, 2013), illetve a brazil matematikai olimpiai csapat egyik számelméleti feladatsora szolgált.

Mivel a kurzus célja eléggé összetett volt és új feladatok megalkotása is szerepelt a feladatok között, az osztályzási rendszert alaposan át kellett gondolni. Általában a magyar egyetemeken vagy két zárthelyi dolgozat, vagy egy vizsgajegy alapján kapnak jegyet a hallgatók. Egyik sem volt igazán jól alkalmazható a mi kurzusunk esetében: Nem lehet elvárni, hogy megadott idő alatt legyenek képesek a diákok feladatot alkotni, problémát felvetni. Az adott idő alatt lezajló vizsgák, dolgozatok magas szintre fejlesztett módszereket és begyakorlást követelnek. Egy otthon megírandó „zárthelyi" tűnt a legjobb megoldásnak, a következő: ahhoz, hogy jegyet szerezzen, a hallgatónak be kell adnia egy 4-7 feladatból álló feladatsort, amelyre az alábbiak közül az egyik igaz:

- minden feladat megoldása ugyanazon az ötleten alapul és minden feladat különböző szintű. Pl. általános iskola, gimnázium 9-10. o., gimnázium 11-12. o., gyakorlófeladat, versenyfeladat iskolai válogatóra, versenyfeladat országos verseny döntőjére.
- egy nehéz célfeladat (tetszőleges, de a feladatsort beadó hallgató által megadott korosztálynak), egy rávezető feladatsorral. Itt megengedtük egy létező nehéz

versenyfeladat használatát, rávezetőként pedig könnyebb vagy a probléma egy részét lefedő feladatokat kellett készíteni, amelyek megoldásai vagy a bennük szereplő ötletek segítenek a célfeladat megoldásában.

Mindkét típusú feladatsoron legalább három olyan feladatnak kellett szerepelnie, amit a szerző talált ki, nem más forrásból válogatta. Az utolsó opcióra azért volt szükség, mert a kísérlet előtt nem tudhattuk, hogy a kurzus résztvevői képesek-e egy megfelelő nehézségű feladat elkészítésére.

Mi most a fenti két típusba tartozó, nagyobb lélegzetvételű beadott feladatsorokkal foglalkozunk részletesebben.

„Nehéz lenne formalizálni, hogy mitől jó egy feladat. De ha már elkészült egy feladat, akkor az beszél magáért. Vagy maga ellen." (Konstantinov, 1977).

Igaz ez a feladatsorokra is. amelyek között kiemelkedő a Függelék 2. feladatsora. Most mi mégis megmagyarázzuk, mitől jók ezek a feladatok. Nem csak azért jók, mert hasonló ötletet igényelnek, mint az órán elhangzott vezéranyag, hanem emellett fokozatosan nehezednek és lépésről lépésre vezetnek rá a célfeladatra. A kurzus tematikájába beilleszkedik a feladatsor, abból a szempontból is, hogy invariánsokat kell használni a megoldáshoz. Sőt, nem csak a megoldáshoz, hanem a feladat elkészítéséhez is – a kurzus célkitűzéseinek megfelelően. Ezek az invariánsok hasonlóak a kurzuson elhangzott invariánsokhoz, de készítésük túlmutat a kurzuson bemutatott technikákon. A finom történelmi-irodalmi utalás valószínűleg azért van jelen a célfeladatban, mert a szerzője matematika-történelem szakos hallgató.

Most megmutatunk két olyan feladatsort, amik nem feleltek meg a követelményeknek. A harmadévesek által beadott első beadott feladatsorok mind ilyenek voltak, de a kurzus hangulata és légköre annyira baráti és kreatív volt, hogy mindenki pozitív segítségnek fogta fel, ha csak annyit mondtunk, hogy ez a feladatsor „vidd haza és csináld újra" kategóriájú. A Függelékben található 3. feladatsor például egy ilyen feladatsor, amely egy jól ismert feladatra épül, a „szultán és börtönőr, meg a 100 rab" problémára. Ez valóban középiskolás számelméleti feladat, megoldható egyetemi tudás nélkül is. Sőt, a legelegánsabb a legegyszerűbb általános- vagy középiskolai eszközökkel (osztók párosítása) adható megoldás. Sokkal elegánsabb, mint a számelméleti függvényeket használó módszer, a feladatsor viszont az utóbbira vezet rá, ami felesleges és erőltetett. A hallgató által másodikként beadott feladatsor más témáról szólt és már minden követelménynek megfelelt.

A Függelék 1. feladatsora egy nehéz versenyfeladat megoldására vezet rá. Ezt a feladatsort egy doktorandusz adta be. A feladatsornak az a hiányossága, hogy az 1-2. feladatoknak csak szövegezésében van köze a célfeladathoz, a mögöttes matematikai tartalomban nem, míg az utolsó előtti feladatok olyan mértékben vezetnek rá a célfeladatra, hogy már nem jelent plusz lépést annak megoldása – azaz nem segítenek a megoldásban annak, aki nem tudja megoldani a célfeladatot magát. Aki pedig meg tudja oldani, annak nem lennének szükségesek.

Mind az órai tevékenységgel, mind az otthoni feladatsor-készítéssel kapcsolatban azt tapasztaltuk, hogy összefüggés van a hallgatók évfolyama és a teljesítményük között. Az ötödéves hallgatók, akik mind az 5 félév Algebra és Számelmélet kurzust teljesítették, az Algebra és Számelmélet 3-at már egy évvel korábban befejezték. Így az ő tudásuk sokat kophatott – másrészt viszont ülepedhetett is. A negyedévesek, akik frissen fejezték be az Algebra és Számelmélet 3-at, még friss tudással érkeztek – de nem is volt idő arra, hogy elmélyüljön, igazán összeálljon a fejükben a tanultak rendszere.

A tapasztalat az, hogy ha felejtettek is az ötödévesek, készüléssel ezt könnyen tudták ellensúlyozni, így az eltelt egy év inkább előnyösen hatott. Ugyanis akik frissen tanulták az Algebra és Számelmélet 3 tárgy anyagát, azok nem tudtak ahhoz kapcsolódó feladatot feladni, sőt megoldani sem. Ezek szerint az eltelt idő rövidségének negatív hatása volt erősebb, nem érkeztek még el a Gestalt állapotba, így nem tudták alkalmazni a tanultakat.

A doktoranduszok nem teljesítettek sem jobban, sem rosszabbul, mint a többi hallgató. Erősségük volt a forráskutatás, jó érzékkel találtak nehéz feladatokat, de például a fentebb említett 3. feladatsor is egy doktorandusz első (gyenge) próbálkozása, amit többszöri javítás követett.

3. Összefoglalás

Kutatásunkban a matematikatanár szakos hallgatók és doktoranduszok feladatkészítési, probléma-felvetési képességeit vizsgáltuk. A szakirodalom szellemének megfelelően kidolgoztunk egy szempontrendszert, ami a felsőbb szakmai háttérre, a különböző szintű feladatokra, a témaközpontúságra és a magyar feladatkultúrára alapul. A kísérlethez meghirdettünk egy kurzust az ELTE TTK felsőbbéves és doktorandusz hallgatói részére, amelynek végső célja a problémafelvetés ezen szempontok szerinti vizsgálata volt. A kísérletben 11 elit hallgató vett részt. Megállapítható, hogy a szakmai háttérnek le kell ülepednie, mielőtt valaki annak a segítségével feladatot tud kitűzni. Az elkészített feladatok minden esetben az egy-másfél évvel azelőtt tanult tananyagra alapultak. Megállapítható, hogy a harmadévesek által benyújtott feladatsorok első próbálkozásra nem feleltek meg a kurzus követelményeinek, a második alkalommal azonban már igen. A felsőbbéves hallgatók feladatsorai minden szempont szerint jobban helyt álltak. A doktoranduszok inkább létező feladatokhoz készítettek rávezető feladatsort, amelyek több szempontból teljesítették, néhány szempontból nem teljesítették a feltételeket.

Azt gondoljuk, hogy a frissen szerzett tudás még nem elég alapos ahhoz, hogy egyből alkalmazzuk más környezetben, míg a leülepedett tudás használhatónak bizonyult. A doktoranduszok teljesítményére is próbáltunk magyarázatot keresni. Az egyik lehetőség az, hogy a tanári munkájuk alatt annyira kiestek az egyetemi matematikából, hogy a felsőbb tananyag segítségével nem tudtak új, nehéz feladatot kitalálni. Egy másik lehetséges eset az, hogy munkájuk során találkoztak olyan nehéz versenyfeladatokkal, amik megfeleltek a kurzus követelményeinek, így kényelmesen adódott nekik, hogy a kurzus követelményeihez gyártsanak egy rávezető feladatsort. A bevezetőben felsorolt eredmények alapján azonban az a legvalószínűbb, hogy eddigi tanári munkájuk során nem készítettek elég sok feladatot, nem váltak szakértővé a Patákova-féle értelemben.

A negyedévesek által beadott feladatok azt jelzik, hogy a probléma-felvetési képesség valamikor megvan a leendő tanárokban. Ahhoz, hogy ezt a képességet megtartsuk, szinten tartsuk, ahhoz az eddigi kutatások alapján az szükséges, hogy a gyakorló tanárok, ha nem is gyakran, de rendszeresen készítsenek önállóan feladatot. Mind a harmad-, mind a negyedévesek által beadott feladatsor azt mutatja, hogy az egy éves távlatban felfrissített szakmai anyaggal már tudnak mit kezdeni a hallgatók. Az órai munka alapján megállapítottuk, hogy a doktoranduszok hétről hétre képesek felfrissíteni az elhalványult tudásukat. Minden alkalommal, amikor valami hiányosság kiderült egy órán, a következő alkalomra ők már fel tudták idézni a régen tanultakat. Az, hogy mégsem ilyen feladatsort küldtek be, annak praktikus okai vannak, ilyen módon könnyebben tudták a kurzust teljesíteni.

Összegzésül elmondhatjuk, hogy a kurzus keretében tapasztaltak alapján a hallgatók feladat-kitűzési képességeinek fejlesztése lehetséges, de nehéz feladat, emellett mindenképpen szükséges. Emellett fontos tanulság, hogy nem reális elvárás, hogy a hallgató feladatot tudjon frissen tanult egyetemi tudás alkalmazásával, annak ülepednie kell.

3.1. A szerzők részvétele a kutatásban.

A szerzők a kutatás teljes egészében részt vettek, többek közt maguk is résztvevői voltak a kurzusnak. A témából előadást tartottak a MIDK 2018 konferencián.

4. Irodalomjegyzék

- Nemzeti Alaptanterv (NAT), 2012 http://ofi.hu/nemzeti-alaptanterv (utoljára letöltve: 2019.01.01.)
- Niss, Mogens: Mathematical competencies and PISA, 2015, https://www.springer.com/cda/content/document/cda_downloaddocument/9783319101200-c2.pdf?SGWID=0-0-45-1491757-p176885643 (utoljára letöltve: 2019.01.01.)
- Blum, Werner and Niss, Mogens: Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects. State, trends, and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, (1991), 37-68.
- Boaler, Jo. : The role of contexts in the mathematics classroom: do they make mathematics more"real"?. For the Learning of Mathematics, 13(2), (1993) 12-17.
- Christou, Conastantinos, Mousoulides, Nicholas., Pittalis, Marios., Pitta-Pantazi, Demetra, Sriraman, Bharath Sriraman. An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM*, 37(3), 149-158. , 2005.
- Cooper, Barry and Dunne, Máinéad: Assessing children's mathematical knowledge: social class, sex, and problem-solving. Open University Press, Buckingham, Philadelphia, 2000.
- Kontorovich, Igor, Koichu, Boris, Towards a comprehensive framework of mathematical problem posing, *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 401-408).
- Kontorovich, Igor, Koichu, Boris Feeling of innovation in expert problem posing *Nordic Studies in Mathematics Education* (NOMAD) 17 (3-4), 199-212 2012.
- Lavy, I. and Shriki, A.: Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers *Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Eds: Woo, J.; Lew, H.; Park, K.; Seo, D.) 129-136 2007.
- Leung, Shuk-kwan S., On analyzing problem-posing processes: A study of prospective elementary teachers differing in mathematics knowledge. In J. P. Ponte, J. F. Matos.

(Eds.), *Proceedings of the 18th International Conferrence of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 168-175.Lisbon, 1994

- Olsana, H., Pelczer I., Review on Problem Posing in Teacher Education in: *A Collection of Problem Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference* Edz: S. Crespo) 469-492
- Palm, Torulf : Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), (2006) 42-47.
- Patákova, Eva: Teacher's problem posing in mathematics. Procedia-Socialand *Behavioral Sciences* 93 (2013) 836-841
- Poulos, Andreas: A research on the creation of problems for mathematical competitions *The teaching of mathematics* 2017, Vol. XX, 1, pp. 26-36
- Pozsonyi Enikő, Palotay Dorka: Ha tudom, hogy miről van szó - Iskolai feladatok absztrakt algebrai háttérrel. TDK dolgozat, 2013. http://web.cs.elte.hu/~csaba/tdk/algebra.pdf (utoljára megnyitva: 2019.01.08.)
- Silver, Edward A. : On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics* 14, 1 (February, 1994)
- Singer, Michaela; Ellerton, Nerida; Cai, Jinfa; Leung, Eddie C.K.. 2011. In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 137-166. Ankara, Turkey: PME.
- Stoyanova, Elena: Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh, N. Ellerton (Eds.), *Research in mathematics education: a contemporary perspective*, (pp. 164-185). 1998

5. Függelék

5.1. Algebra kurzusok tematikája

forrás: www.cs.elte.hu/~csaba/bboard

- Algebra és Számelmélet 1. , 1. félév: Oszthatóság az egészek körében, irreducibilis és prímszámok, összetett számok, páros számok számelmélete. Maradékos osztás, Euklideszi algoritmus, kitüntetett közös osztó és legkisebb közös osztó, prímek és felbonthatatlanok közötti összefüggés. A Számelmélet Alaptétele, kanonikus alak. Kongruenciák, maradékosztályok, teljes és redukált maradékrendszerek. Számelméleti függvények: osztók száma, osztók összege, Euler-fv. Multiplikativitás, formulák.

Lineáris kongruenciák és –kongruencia-rendszerek.Lineáris diofantikus egyenletek, oszthatósági szabályok (2,4,8,3,9,5,25,11). Euler-Fermat-tétel, Wilson-tétel. Nevezetes azonosságok (összegek és különbségek hatványai). Mersenne- és Fermat-számok. Tökéletes számok, Dirichlet-tétel (bizonyítás nélkül), végtelen sok 4k-1 alakú prím van. Fermat-sejtés. Rend, tulajdonságai, osztók, hatvány rendje. Mersenne- és Fermat-számok osztói. A számelmélet híres problémái. Oszlopvektorok, mátrixok, összegük, szorzásuk, transzpozíció. Előjeles aldetermináns, kifejtés sor és oszlop szerint, inverz mátrix, bal- és jobb inverz.

- Algebra és Számelmélet 2., 2. félév: Komplex számok, polinomok. (A témák nem játszanak kiemelt szerepet a kísérletben, így nem fejtjük ki őket részletesen.)
- Algebra és Számelmélet 3, 5. félév: Permutációk. Szorzás, Inverz, paritás, előjel, felbontás ciklusokra. A rend és a paritás megállapítható a ciklusszerkezetből. Előjelek szorozhatósága. Determináns: definíció, tulajdonságok (linaritás, oszlopcsere, transzpozíció). Kiszámítás eliminálással. Vandermonde-determináns, determinánsok szorzástétele. Vektortér, altér, lineáris függetlenség, bázis, dimenzió. Alterek összegének dimenziója, direkt szorzat. Vektorok koordinátái adott bázis felett. Lineáris leképezések, transzformációk és műveletek leképezésekkel, lineáris leképezés mátrixa. Bázistranszformáció. Kép, mag, ezek dimneziója, rang, determináns. Térfogat és determináns kapcsolata. Lineáris transzformációk invertálhatósága, ekvivalens leírások. Nullosztók. Sor- és oszloprang egyenlősége. Szorzat rangja. Lineáris egyenlőségrendszerek és a rang. Cramer-szabály.
  Polinomosztás, euklideszi algoritmus és számelmélet alaptétele, irreduclulis polinomok . test felett. Kapcsolat a gyökök és a polinomok irreducibilitása között másod- harmad és magasabb fokú polinomokra. Irreducibilis polinomok leírása valós és komplex számtest felett. Sajátérték, sajátvektor, karakterisztikus polinom, diagonalizálhatóság, transzformáció minimálpolinomja, Cayley-Hamilton-tétel. Jordan- féle normálalak (bizonyítás nélkül).
  Csoport fogalma, példák: mátrixok, szimmetriacsoport,kvaterniók. Hatványozás és tulajdonságai. Rend, ciklikus csoport, izomorfizmus. Részcsoport, mellékosztály, Lagrange-tétel. Permutációcsoportok. Orbit, stabilizátor, számolások. Cayley-tétel.
- Algebra és Számelmélet 4. , 6. félév: Testbővítés, hányadostest. Szerkeszthetőség. A fontosabb témaköröket a dolgozat szövegtörzsében felsoroltuk.
- Algebra és Számelmélet 5. , 7. félév: Gyűrűelmélet, véges testek.
  A 2. félévi kurzushoz hasonlóan most nem részletezzük.

5.2. : 1. feladatsor

1.1. Aladár és Boglárka kavicsokkal játszanak. 2017 kavicsot tesznek egy kupacba, ezután ebből felváltva elvesznek 1-3 kavicsot. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Kinek van nyerő stratégiája, ha Aladár kezd? Mi a nyerő stratégia?

1.2. Aladár és Boglárka változtatnak a szabályokon. Ezúttal a kezdo˝ játékos (Aladár) mondhatja meg a kezdőlépés előtt, hogy hány kavicsot vehetnek el az adott játék-ban maximum. (A minimum továbbra is 1 kavics, nem mondhat 2016-nál nagyobb számot.) Milyen számokra lehet Aladárnak nyerő stratégiája?

1.3. Van-e 3 olyan négyzetszám, amelyek összege 8-cal osztható, ha közülük a) legfeljebb 2, b) legfeljebb 1, c) egyik sem osztható 8-cal.

1.4. Bizonyítsd be, hogy $6|(n^2 + 5)\,n$, ha n pozitív egész.

1.5. Adottak a számok 1-től n-ig, ahol n osztható 8-cal. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan párosítás, amelyben minden pár összege négyzetszám!

1.6. Az 1; 2;…; 2014^{2014} számok közül Aladár és Boglárka felváltva törölnek le egy számot (Aladár kezd), amíg csak két szám marad. Ha a megmaradó két szám összege négyzetszám,akkor Boglárka nyer, egyébként Aladár. Kinek van nyerő stratégiája?

(OKTV III. kategória /"spec. mat."/ döntő 2014.)

5.3. : 2. feladatsor

1. Egy négyzet négy sarkára számokat írok. Ezeket úgy változtathatom, hogy két szomszédos csúcshoz ugyanannyit adhatok hozzá (vagy vonhatok ki). Elérhető-e, hogy a négy csúcsban ugyanaz a szám legyen, ha kiindulásként rendre

a, 1, 0, 0, 0,

b, 1, 0, 1, 0 szerepeltek?

2. a, (*Állapotfüggvény feladatsor, összeállította Surányi László*) Egy asztal körül hatan ülnek, közülük kettő előtt egy-egy tányér van. A többiek előtt nincs tányér. A két „tányéros” ember között egy ember ül. Egy lépésben két szomszédos személy elé egy-egy újabb tányért helyezünk. Elérhető-e néhány lépéssel, hogy mindenki előtt ugyanannyi tányér legyen?

b, Mi a helyzet hét ember esetén? (A kiosztás és a szabályok nem változnak)

3. (*Elemi matematika 1 feladatgyűjtemény*) Most egy háromszög csúcsaihoz írok számokat. Megengedett lépés, hogy az egyikből elveszek néhányat és a másik kettőhöz hozzáadok kétszer ennyit. Elérhető-e, hogy a három szám egyenlő legyen, ha kiindulásként az
a, 5, 11, 14,
b, 11, 9, 5 szerepeltek?

4. Ödön, Richárd és Jenő zsetonokért kártyáznak. Minden kör vesztese ad 2 zsetont a tőle balra, 1 zsetont a tőle jobbra ülőnek. A játék kezdetén (hogy az esélyek nagyjából egyenlőek legyenek), a legfiatalabb Jenőnek 7, a középső Richárdnak 5, míg Ödönnek 3 zsetonja volt. Lehetséges-e, hogy a játék végén rendre 7, 4 és 4 zsetonnal álltak?

5. Ödön, Richárd és Jenő megváltoztatják a szabályokat. Minden kör végén a győztes kap 2 zsetont a tőle jobbra ülőtől, a tőle balra ülő pedig a bankból kap egyet. Ha kezdetben mindenkinek 20 zsetonja volt, elérhető-e, hogy néhány kör után 25, 29 és 33 zsetonjuk legyen?

Megoldás ötletek:

1. a, Paritás miatt nem lehetséges
   b, Átlók összege
2. a, Valójában ez az 1/a feladat (a merőleges vektor a (1, -1, 1, -1, 1, -1)
   b, megoldható
3. a, megoldható
   b, mod 3, merőleges az (1, 1, 1), középiskolásan: az összeg hárommal való oszthatósága nem változik
4. Nem, mert bár az összeg 7-tel vett maradéka nem változott, de a 4A+2B+C maradéka igen (és a (4, 2, 1) is merőleges vektor)
5. Az A-4B+3C 13-mal vett maradéka nem változik, ezért nem érhető el.

5.4. : 3. feladatsor

Azért választottam ezt a feladatot, mert általános iskolában is megoldható általános iskolai módszerekkel viszont ott egy nehezebb feladatnak számít.

Feladat: A Héttoronyban 100 rab sínylődik, celláik szép rendben sorakoznak egymás után. A szultán egy éjszaka elküldi egyik börtönőrét, hogy minden egyes cellán fordítsa el a zárat.

Csakhamar meggondolja magát, és megparancsolja, hogy minden második cella ajtaján újfent fordítsák el a zárat. Rögtön ezután egy harmadik őrt is elküld, hogy most minden harmadik cella zárján fordítson. Ez megy egészen hajnalig. Miután a századik börtönőrnek is parancsba adta, hogy a századik cella ajtaján fordítsa el a zárat, a szultán végre álomba merül. Azok a rabok pedig, akik reggel cellájuk ajtaját nyitva találják, békében elmehetnek. Hányan is vannak ők?

Megoldás:

Mindegyik zár annyiszor fordul, ahány osztója van a cella sorszámának.

Azok fognak kiszabadulni, akik cellasorszámának páratlan számú osztója van.

Legyen n a cella sorszáma. n kanonikus alakja: $n = \prod p_i^{\alpha_i}$. n osztóinak száma: $\prod(\alpha_i + 1)$ Ez akkor lesz páratlan, ha a szorzat minden tényezője páratlan, azaz ha minden $\alpha_i$páros. Így pont a négyzetszámokat kapjuk.

Tehát azok fognak kiszabadulni, akiknek a cellasorszáma négyzetszám. 1 és 100 között a négyzetszámok: 1,4,9,16, 25,36,49,64,81, 100

Azaz **10** rab mehet el.

Rávezető feladatok

Írd fel a következő számok kanonikus alakját (Vagy prímtényezős felbontását, attól függ, hogy éppen hányadikosok és hogy tanulták.)! 8, 26, 58, 100, 150

Igazak-e a következő állítások? Válaszodat indokold!

a. 2 | 65 **b.** 3 | 129 **c.** 6 | 288 **d.** 15 | 95

Hány osztója van a következő számoknak? 7, 16, 28, 242 Sorold fel mindet!

Kati mamának van 20 db cukorkája, melyet szétosztott az unokái között. Sikerült úgy szétosztania az összes cukorkát, hogy minden unoka ugyanannyi cukrot kapott. Hány unokája lehet Kati mamának?

Mond meg 1 és 100 között a legkisebb olyan számot, aminek 3 db osztója van és a legkisebbet, aminek 10 db osztója van!

Van 10 db korongom, melyeket az asztalon egymás mellé letettem egy sorba és megszámoztam őket 1-től 10-ig. A korongok egyik oldala piros, a másik kék és most épp mindegyik piros oldalával felfele van az asztalon. Fogadtam a testvéremmel, hogyha mindegyiket annyiszor fordítom meg, ahány osztója van a sorszámának, akkor kevesebb, mint 3 db korong lesz kék oldalával felfele. Nyertem?

Megoldások

1. $8 = 2^3$, $26 = 2 \cdot 13$, $58 = 2 \cdot 29$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$, $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

2. Nem, mert 65 nem páros / prímtényezős felbontásában nem szerepel a kettő.

Igen, mert 1+2+9 = 12 és a 12 osztható 3-mal, azaz a 129 számjegyeinek összege osztható 3-mal / 129 prímtényezős felbontásában szerepel a 3.

Igen, mert 2-vel és 3-mal is osztható / prímtényezős felbontásában szerepel a 2 és a 3 is.

Nem, mert 3-mal nem osztható / prímtényezős felbontásában nem szerepel a 3.

3.

szám	7	16	28	242
osztók száma	2	5	6	6
osztók	1,7	1,2,4,8,16	1,2,4,7,14,28	1,2,11,22,121,242

Unokáinak száma lehet: 1,2,4,5,10,20. (Ezek pont a 20 osztói.)

A legkisebb, aminek 3 db osztója van: **4**, mert neki 3 osztója van és előtte mindenkinek kevesebb vagy mert ő az első négyzetszám az 1-t követően.

A legkisebb, aminek 10 db osztója van: 10 osztói: 1,2,5,10 ebből a 10 kétféleképpen bontható szorzattá: 2·5 vagy 1·10. Az első esetben a keresett szám kanonikus alakjában 2 prímszám szerepel nem nulla hatványon, amiből az egyik első a második pedig negyedik hatványon szerepel: $n = p_i^1 \cdot p_j^4$ Ez a szám akkor lesz a legkisebb, ha $p_j = 2$ és $p_i = 3$. Tehát a keresett szám: 48. A második esetben a keresett szám kanonikus alakjában egy prímszám szerepel nem nulla hatványon. Azaz a keresett szám:p^9. Ez a szám akkor lesz a legkisebb, ha $p = 2$. Azaz a keresett szám: 512. Viszont a keresett számnak 1 és 100 közé kell esnie és a legkisebb ilyen számot keressük, ezért a keresett szám: **48**.

Azok lesznek a végén kék oldalukkal felfele, amelyeket páratlan sokszor fordítottam meg. Ezek azok a korongok lesznek, ahol a korong sorszámának páratlan számú osztója van. Ezek a négyzetszámok. 1-től 10-ig a négyzetszámok: 1,4,9. Tehát 3 db korong lesz kék oldalával felfele. Vesztettem ☹ (Több számelméletet kellene tanulnom… ☺)