Szakdolgozat

Csehné Szenderák Júlia
matematika – biológia osztatlan tanárszak
2023. Budapest

Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Természettudományi kar

MetamatemEtikai dilemmák a tehetséggondozás területén

Csehné Szenderák Júlia
matematika – biológia osztatlan tanárszak

témavezető:
Dr. Szabó Csaba
egyetemi tanár

2023. Budapest

Tartalom

1. Bevezetés

Matematikai feladatgyűjteményekben gyakran szerepelnek feladatoknak hiányos vagy nem teljes megoldásai. A feladatokat és megoldásaikat a szerzők sokszor tudatosan teszik be így, mert a teljes megoldás komolyabb matematikai hátteret igényelne. Mégis hasznos, ha megjelennek a feladatgyűjteményekben a nehezebb gondolatokat igénylő feladatok, mert később felhasználható tudáshoz vezethetnek. Manapság egyre többször merülnek fel tudományetikai kérdések. Mi azt a kérdést fogalmaztuk meg, hogy megtehető-e, hogy szemben a reguláris, tantermi órákon elfogadott, megengedhető esetleges pontatlansággal, adhatunk-e matematikailag hibás választ vagy megoldást egy kérdésre vagy egy feladatra a tehetséggondozásban?

Dolgozatomban a matematika tehetséggondozásban gyakran előforduló feladatok közül három feladattípust emeltem ki. A feladatok kapcsán felmerülő etikai és matematikai dilemmákkal és a feladatok matematikai hátterével foglalkozom. Az úgynevezett tevés, mérleges és állításos feladatok matematikai háttere, pontos megoldása túlmutat azon a tudáson, matematikai megértési szinten, amin a tehetséggondozásban résztvevő diákok állnak. A feladatok bemutatását követően írok a kitűzésük, csokorba gyűjtésük és megoldásuk kapcsán felmerülő tanári, feladatkitűzői, szerzői dilemmákról és a diákok dilemmáiról is. A dolgozatban bemutatott tevés, mérleges és állításos feladatok Róka Sándor széleskörben ismert és alkalmazott feladatgyűjteményeiben is szerepelnek, így a felmerülő dilemmák feloldása érdekében interjút készítettem Róka Sándorral. Róka Sándor Magyarország egyik legismertebb tehetséggondozója, számos könyv és szakköri füzet szerzője. A feladatmegoldó szemszögéből is vizsgálom a bemutatott feladatokat. Ehhez interjút készítettünk doktorandusz hallgatókkal. Ebben az interjúban arra voltam kíváncsi, hogyan nyúlnak a tehetséggondozásban gyakran szereplő feladatokhoz a doktorandusz hallgatók, milyen és mennyi segítségre van szükségük a feladatok pontos megoldásához, alapos tárgyalásához. Mind a doktoranduszokkal készített interjú, mind a Róka Sándor tanár úrral készített interjú a dolgozatom részét képezi.

A dolgozatom első fele a 2020-ban írt MetamatemEtikai dilemmák a tehetséggondozás területén című TDK dolgozatom bővített változata (Szenderák 2020). Az ebből készült angol nyelvű cikk On a metamatemEthical question in talent care címmel jelent meg (Bereczky-Zámbó, Szabó, Szeibert, Szenderák 2021).

A dolgozatom matematikai részében az első felében bemutatott három feladat közül a mérleges feladat megoldásait elemzem. Kiderül, hogy az alapfeladatok kész megoldását egy tehetségesebb középiskolás diák is megértheti, ám az alapgondolat egyáltalán nem kézenfekvő. Az általánosítások és a kiterjesztések már kis elemszámnál is bonyolult kérdésekhez vezetnek. A teljes általánosítás mindmáig megoldatlan matematikai probléma. Például azt a feladatot, amikor 11 érméből 2 hamisat szeretnénk kiválasztani egy kétkarú mérleg segítségével és nem tudjuk, hogy a hamis érmék nehezebbek vagy könnyebbek-e a valódiaknál, csak 2015-ben oldották meg (Chudnov 2015).

2. Etikai kérdések a tudományban

„A matematika egy hasznos eszköz. Ezzel az eszközhasználattal etikai kérdések is felmerülnek, amelyek azzal kapcsolatosak, hogy milyen a matematika hatása a világra. A matematika az emberi tudás legabsztraktabb része, és nem más, mint az abszolút tudás keresése. A matematika tételei önmagukban megkérdőjelezhetetlenek, ez is az oka annak, hogy a matematika az ember egyik leghasznosabb és legjobban kidolgozott eszköze." (Chiodo és Clifton 2019)

A matematikai gondolkodás rendszere zárt, mégis a való életben számos helyen alkalmazzák a matematika eredményeit. Általában egy matematikus nem lehet felelős az eredményeinek alkalmazásáért, mert tételei tisztán elméleti jellegűek és jól meghatározott feltételrendszerrel rendelkeznek. A való életben mégis sokszor alkalmazzák ezeket a formulákat úgy, hogy a feltételek nem pontosan teljesülnek, de a következtetések általában igazak. De ennek az ellenkezője is előfordulhat. Gondoljunk például a modellezési feladatokra, ahol sosem lehet hajszál pontosan matematikai modellt állítani a feladatra, és nagyon gyakran még a gyakorlati modellt sem lehet teljesen pontosan matematikai modellre átváltani.

Amikor nem megfelelően használják fel a matematikai tételeket, kimaradnak feltételek, akkor komoly problémák merülhetnek fel. Például a 2007-2008-as globális pénzügyi válságot vizsgálva láthatjuk, hogy a válság kialakulásának okai nagyon összetettek. Abban azonban mindenki egyetért, hogy a matematikai modellezés vitathatatlanul nagy szerepet játszott benne. Az ingatlanhitelezési piac egyik legfontosabb paraméterének a kiszámításánál a matematikai modell néhány faktort nem vett figyelembe. Ez egy 700 milliárd dolláros hiányhoz vezetett. A többi pedig már történelem (Chiodo és Clifton 2019).

Megfontolandó, hogy amikor a matematikust megbízzák egy matematikai feladattal, kell-e azzal törődnie, hogy az eredményeit mire használják fel? Tudnia kell-e amikor megbízzák, hogy milyen célra fordítják az eredményeit? Megoldhat-e olyan problémát, amiről tudja, hogy ha elárulja a megoldást, akkor azzal kárt tudnak tenni? Nemcsak a matematikában, hanem más tudományterületeken belül is merülnek fel etikai kérdések. Klasszikus tudományetikai példa erre a Manhattan tervben résztvevő fizikusok példája. Ők a tudomány terén korszakalkotó újításokkal, fejlesztésekkel álltak elő, mégis olyan pusztító fegyver kialakulásához, kialakításához vezetett a munkájuk, amivel az emberiség képes önmaga és a bolygója elpusztítására is (1). Hasonló etikai dilemmák merültek fel Teller Ede munkásságával kapcsolatban is. A tudós maga adott hangot dilemmájának: „A tudós feladata az, hogy a tudománnyal foglalkozzék. Használnia kell tudását, felelőssége abban rejlik, hogy el kell magyaráznia mindazt, amit létrehozott, a következményekkel egyetemben. Ezen a ponton ér véget a tudós felelőssége”. (Teller, 1990)

Napjainkban is foglalkoztatja az előbb bemutatott etikai dilemma a tudományos világot. Egy kutatás során megkérdeztek matematikusokat, hogy ha találnának egy gyors algoritmust a prímfaktorizációra, és ezzel fel tudnák törni az RSA titkosírást, akkor publikálnák-e. A megkérdezettek közül sokan azt mondták, hogy igen, hiszen ez egy tiszta matematikai eredmény, így publikálnák. Amennyiben ez az eredmény napvilágra kerülne, komoly problémákkal állnánk szemben a mindennapjaink során. Legegyszerűbb és leglátványosabb példa, hogy a bankok online rendszere is legtöbbször RSA-val van titkosítva, így a titkosítás feltörése többek közt komoly pénzügyi, pénzkezelési gondokat okozna. A prímfaktorizációra adott gyors algoritmussal egy matematikai, informatikai csodát alkotnánk, amit bűnözésre használnának majd fel (Chiodo és Clifton 2019).

Felmerül a kérdés, hogy vannak-e a matematikatanításban is etikai dilemmák? Amikor matematikát tanítunk, csak egy kis részét mutatjuk meg a hatalmas matematikai ismeretanyagnak. Sokszor a diákok matematikai eszközkészlete még nem elég a definíciók pontos tárgyalásához, vagy ahhoz, hogy teljes bizonyításokat adjunk. Bizonyítások helyett gyakran csak gondolatmeneteket mutatunk. Amikor a prímszám definícióját tanítjuk középiskolában, akkor egy matematikailag hibás definíciót adunk a diákoknak. Fontos etikai kérdés, hogy amikor számos alkalommal hiányos vagy hibás definíciókat adunk a diákoknak, vagy gondolatmeneteket mondunk bizonyítások helyett, akkor nem csapjuk-e be ezzel őket. Károsítjuk-e őket azzal, hogy hamis képet festünk a matematikáról és a matematikai gondolkodásról? Szerencsére ezt a kérdést a matematika módszertan oktatása kellően jól kezeli, és már lassan klasszikussá válik az a szólás, ami Vásárhelyi Éva tanárnőtől ered, hogy „engedményeket kell tennünk a matematikai szabatosság rovására a tanulók fejlettségi szintjétől függően az érthetőség javára” (Csányi, Fábián, Szabó 2016). Az általános és középiskolai matematika oktatásban erre számos példa van, elsősorban fogalomépítésnél. Ahogy idővel fejlődik a fogalom, egyre jobban tisztázott lesz. Például, amikor az exponenciális függvényt bevezetjük, honnan tudjuk, hogy értelmes-e a $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$? Az eleinte elkent fogalmak jelentős része az érettségire kitisztul. Ezek a kegyes hazugságok, csúsztatások szigorú matematikai értelemben komoly hibák, de az oktatási kultúránkra jellemző spirális tananyagszervezés szempontjából elkerülhetetlen eszközök. Spirális elrendezés esetén egy témakör többször, de más szemszögből, más módszerekkel, egyre mélyebben kerül feldolgozásra (Fűzi 2015). Ennek alkalmazhatóságát alátámasztja az a fejlődéspszichológiai tény, hogy annál hatékonyabb a felidézés, minél mélyebb szintű feldolgozással történik az adott anyag elsajátítása (N. Kollár és Szabó 2004).

A közoktatás legkézenfekvőbb matematikai etikai kérdései, hogy melyek azok az anyagrészek, amelyek bekerüljenek a NAT-ba. Azt törvény szabályozza, hogy mi van benne a tananyagban. Ezért az etikai kérdésnek abban kell felmerülni, aki a tananyagot készíti. Az első kérdés, hogy mi kerüljön NAT-ba, melyek azok a kompetenciák, amik elsajátítása a legfontosabb? Kérdés az is, hogy ez valóban tükrözi-e azt a matematikára való nevelést, amit mi szeretnénk, hogy a matematikára nevelés legyen. Sorolhatnánk az etikai kérdéseket, ahogy a NAT átmegy a kerettantervbe, az a helyi tantervbe, az a tanmenetbe, majd mindez lecsapódik a tanárok kezébe. A legvégén lévő etikai kérdés az az a sokat vitatott felvetés, hogy a tanárok a NAT-beli célok megvalósítása helyett az érettségin elért lehető legnagyobb pontszámra "tenyésztik ki" a diákokat, arra gyakorolnak a középiskola végéig (Kovács és Palotay 2012).

3. Etikai kérdések a tehetséggondozásban

A dolgozatomban a tehetséggondozásban felmerülő etikai kérdésekkel szeretnék foglalkozni. Magyarországon a tehetséggondozásnak számos komoly hagyománya van. Mi adtuk ki az első matematikai lapokat 1894-ben. Arany Dániel hozta létre 1983-ban a Középiskolai Matematikai Lapokat, ami 1984-ben került először kiadásra, és azóta is szinte megszakítás nélkül megjelenik. Kívülről nézve Magyarország matematikai nagyhatalom, ebben az értelemben a világ vezető országai között szerepel. Ebben nagyon nagy szerepe van a tehetséggondozásnak. A tehetséggondozásban lévő gyerekek sokkal hamarabb találkoznak az érvelés és a bizonyítás fogalmával, mint társaik. Koruk előrehaladtával egyre pontosabb és pontosabb bizonyításokat kell készíteniük akár szakkörökön, akár matematikaversenyeken. Mélyebb megismerési szintre jutnak, mint a társaik.

A diákok matematikai fejlődésében komoly szerepe van a szakköri feladatoknak, szakköri feladatgyűjteményeknek. Ilyenek például a következők: Szakköri feladatok matematikából 7-8. osztály (Róka 2002a), Szakköri füzetek - Számelmélet (Róka 2007), tematikusan összegyűjtött és megalkotott versenyfeladatok, mint például Prímszámok (Róka 2002b), Négyzetszámok (Róka 2001a), Kombinatorika (Róka 2001b). Ezeket a könyvecskéket akár online, akár papíralapon sok-sok tehetséges diák forgatja.

Milyen etikai kérdések merülhetnek fel a tehetséggondozásban? Lehet-e a tehetséggondozásban is engedni a precízségből a jobb érthetőség kedvéért? Tisztázhatók-e a tanórán megjelenő elhallgatások, csúsztatások? Hogyan lehet jól kommunikálni a kialakuló ellentmondásos helyzetekben, hogy sem tudás, sem tekintély ne sérüljön?

Kutatási kérdésem a következő. Szemben a reguláris, tantermi órákon elfogadott, megengedhető esetleges pontatlansággal, adhatunk-e matematikailag hibás választ vagy megoldást egy kérdésre vagy egy feladatra a tehetséggondozásban?

A tehetséggondozásban is találkozhatunk gyakran előkerülő, tipikusnak mondható feladatokkal. Ezek közül mi most három típussal foglalkozunk, amiket mérleges, tevés és állításos feladatoknak neveztünk el. Utána elemezzük, milyen etikai kérdések merülnek fel ezeknek a problémáknak a megoldásával.

4. Feladatok a tehetséggondozásban

Ebben a fejezetben három feladattípust fogunk leírni, amelyeknek elemezzük a megoldását. Mindhárom feladattípus megjelenik a tehetséggondozásban. Olyan feladatokat mutatunk be, amik a matematikusokat is aktuálisan foglalkoztatják.

4.1 Mérleges feladatok

Tekintsük az alábbi feladatokat:

„9 érme közül egy hamis

9 érme közül egy hamis, s ez könnyebb, mint a többi (a többi egyenlő súlyú). Egy kétkarú mérlegen súlyok felhasználása nélkül két mérlegeléssel keressük ki közülük a hamis érmét. Hogyan lehet ezt megtenni?" (Róka 2013: 74)

A könyvben szereplő hivatalos megoldás a következő:

„Tegyünk a serpenyőkbe 3-3 érmét, s a maradék 3 érmét az asztalon hagyjuk. A mérlegelés után tudjuk, hogy mely 3 érme között van a hamis. Ha a mérleg egyensúlyt mutat, akkor a kimaradt 3 érme között kell keresni a hamis érmét, ha pedig nincs egyensúly, akkor a könnyebbnek bizonyuló 3 érme között. A második mérésnél ebből a 3 érméből egyet-egyet tegyünk a serpenyőkbe, s most már kiderül, hogy melyik a hamis.” (Róka 2013: 187-8)

„8 érme közül melyik a hamis érme?

Előttünk van 8 egyforma pénzérme, amelyek közül az egyik hamis, ennek a súlya különbözik a többiétől – amelyek azonos súlyúak. Azt nem tudjuk, hogy a hamis érme könnyebb vagy nehezebb, mint a többi.

Egy kétkarú mérleggel mérősúlyok nélkül kell megtalálnunk a hamis érmét minél kevesebb méréssel.

Hány méréssel tudod megtalálni a hamis érmét?” (Róka 2013: 75)

A könyvben szereplő hivatalos megoldás a következő:

„Három méréssel megtaláljuk a hamis érmét. Az első mérés után tudjuk, hogy melyik 4 érme között van a hamis érme (ezek a „gyanús” érmék), a második mérés után 2 gyanús érme marad, a harmadik mérés után pedig egyetlen gyanús érme, azaz megtaláljuk a hamis érmét.

1. mérés: Tegyünk a serpenyőkbe 2-2 érmét. Ha nincs egyensúly, akkor tudjuk, hogy a mérlegen vannak a gyanús érmék, a többi 4 érme valódi.

2. mérés: A 4 gyanús érméből 2 érmét az egyik serpenyőbe teszünk, a másikba pedig 2 valódi

érmét. Ekkor kiderül, hogy a hamis érme a mérlegen levő 2 gyanús érme között van-e (ha nincs egyensúly), vagy pedig a másik 2 gyanús érme között. A második mérésnél már azt is fogjuk tudni, hogy a hamis érme könnyebb vagy nehezebb a többinél.

3. mérés: A 2 gyanús érme egyikét és egy valódi érmét teszünk a mérlegre, ha elbillen a mérleg, akkor a feltett gyanús érme a hamis, különben a másik gyanús érme hamis.” (Róka 2013: 188)

A mérleges feladatokról azt gondolnánk, hogy hagyományos, régi feladatok. A feladattípus mégis meglehetősen újszerű. A probléma 1945 környékéről származik és Grossman írta le először (Grossman 1945: 360-1). A feladattal legtöbbször két változatban találkozhatunk. Az egyik változatban tudjuk, hogy a hamis érme könnyebb vagy nehezebb, mint a valódi érmék. A másik változatban csak azt tudjuk, hogy eltérő súlyú, azt nem tudjuk, hogy könnyebb vagy nehezebb-e a többitől. Az első változat teljes megoldása olvasható D. O. Skljarszkij, N. N. Csencov és I. M. Jaglom által írt Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből című könyv első kötetében (Skljarszkij, Csencov, Jaglom 1979). Mostantól a dolgozatban ezt a kötetet Jaglomnak fogom nevezni.

A mérleges feladatok kevésbé ismert változata, amikor több hamis érme is van a valódi érmék között. Tekintsük most azt az esetet, amikor több hamis érme van, de nem tudjuk, hogy pontosan mennyi. Azt tudjuk, hogy könnyebbek vagy nehezebbek-e, mint a valódi érmék. Ekkor az információelméleti alsó határ $n \cdot log_3 2$. Erről a határról tudjuk, hogy éles amikor egy hamis érme van. Amikor tudjuk, hogy ez az egy hamis érme könnyebb vagy nehezebb a többinél, akkor a Jaglombeli bizonyítás teljes megoldást ad. Ismeretlen számú hamis érme esetén tudjuk, hogy az információelméleti határ nem éles. Az eddig létező legnagyobb alsó becslés n érme esetén $log_3(2^n + 2^{n-5} + 2^{n-6} + 2^{n-7} + 2^{n-9} + 2^{n-10} + 2^{n-12} + 2^{n-13})$ (An-Ping és von Eitzen 2009). Láthatjuk, hogy ennek a feladatnak az általános megoldása nem könnyű. Ám még mindig gondolhatnánk, hogy kis, rögzített számú érmék esetén fel lehet adni a feladatot a diákoknak. A diákok próbálkozhatnak, kísérletezhetnek. Utána már könnyebben tudjuk nekik megmutatni, hogy a megadott alsó és felső határ megegyezik. Sajnos ez az út sem járható. A 11 és a 2 kis számok. Így az előző feltételezés alapján a 11 érméből a 2 hamis megtalálása egy középiskolásoknak is feladható feladat lehetne. Ebben a feladatban a szükséges mérések száma 5, amit 2015-ben állapítottak meg és a bizonyításban a háromelemű test feletti Golay-kódokat használták (Chudnov 2015).

4.2 Tevés feladatok

A tevés feladatoknak két fő típusa ismert. Mindkettőben vannak tevéink és van vizünk. Mindkettőben szeretnénk átjutni a sivatagon. A tevék tudnak magukkal vinni meghatározott mennyiségű vizet, és tudnak egymásnak vizet átadni. A tevék folyamatosan vizet fogyasztanak. Az egyik feladattípusban meghatározott számú tevével indulunk el. Minden tevének vissza kell érni a kiindulási pontra egy tevét kivéve. Az a kérdés, hogy milyen messzire tudjuk így eljuttatni ezt a tevét. A másik típusban a sivatag egy meghatározott távolságra lévő pontjába szeretnénk eljutni. Itt az a kérdés, hogy hány tevére van szükségünk ehhez?

A Logika-land című könyvben szerepel a következő két feladat:

„**Sivatagi vándorlás**

Ali ben Juszuf szülőfalujától távol dolgozik. Munkahelye és szüleinek lakhelye között egy 100 km széles sivatag terül el. Ali meg akarja látogatni a szüleit. Kérdezősködik, számolgat; kiderül, hogy a sivatagban naponta 20 km-t tud megtenni, és egyszerre csak háromnapi élelem- és víztartalékot tud magával vinni. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy csak egész napi út után lehet a magával vitt élelmiszerből és vízből tartalékot létesíteni.

Hány nap alatt jut át a sivatagon?” (Róka 2013: 54)

„**Átkelés a szavannán**

Egy kutató két teherhordó segítségével át akar jutni a szavannán. Mind a kutató, mind a teherhordók legfeljebb nyolc napra elegendő élelmet és vizet tudnak magukkal vinni. A kutatónak biztosítania kell, hogy a teherhordók visszatérhessenek oda, ahonnan elindultak. A szavannában élelmiszert nem tárolhatnak, nem hozhatnak létre lerakatokat. Az átkeléshez és a teherhordók visszatéréséhez csak ez a $3 \cdot 8 = 24$ napi élelmiszerkészlet használható. A kutató ilyen segítséggel hány napos túrát tehet meg?" (Róka 2013: 55)

A tevés feladatok pontos megoldása nem ismert. A sivatagon való átkelésről szóló feladatok 1947-ben kerültek a köztudatba (Fine 1947). Az alapfeladatban nem tevék, hanem terepjárók szerepeltek. A tevés és a terepjárós feladatok között az a különbség, hogy a terepjáró közben üzemanyagraktárakat hozhat létre tetszőleges pontokon. Ezeket a raktárakat a saját tankjában lévő benzinből feltöltheti, és fordítva, a raktárból tölthet a saját tankjába. A kérdés az, hogy meghatározott tanknyi benzinnel meddig tud eljutni a sivatagban? Feltesszük, hogy egy egységnyi út megtételéhez egy tank benzin szükséges. Ez a feladat sok mindenben hasonlít és sok mindenben eltér a tevés feladatoktól. A két feladat közt matematikailag a fő különbség az, hogy míg a tevés feladatokra csak becslést tudunk adni, addig a terepjárós feladatoknak ismert a pontos megoldása. Egy alaposabb és talán egyszerűbb elemzést találhatunk a Gale's Round-Trip Jeep Problem című cikkben (Hausrath, Jackson, Mitchem, Schmiechel 1995). A cikk azokkal az esetekkel is foglalkozik, amikor a terepjárónak vissza kell térni a kiindulási pontra, és amikor a cél felől is kaphat segítséget, azaz a sivatag túloldalán is van üzemanyag. A cikkben két fontos tételnek a bizonyítását olvashatjuk. A tételek a következők. Tegyük fel, hogy van n napra elegendő üzemanyagunk. Ekkor a maximum távolság, ahová egy terepjáróval el tudunk jutni, az $D_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ (Hausrath, Jackson, Mitchem, Schmiechel 1995: 300). Legyenek m és k egész számok, ahol $m > k$. Ekkor a legnagyobb távolság, ahová egy terepjáró el tud raktározni k tanknyi benzint, az $D_2 = \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m-2} + \cdots + \frac{1}{2k+4}$ (Hausrath, Jackson, Mitchem, Schmiechel 1995: 301).

A terepjárós feladatnak számtalan variánsát megoldották, Alway több terepjáró együttes továbbjutását is vizsgálta (Alway 1957). A terepjárók problémájáról David Gale is ír Tracking the automatic ANT című könyvében (Gale 1998). Mindegyik munkában egységes az, hogy a végén nemcsak az olvasónak, hanem a szerzőknek is bevallottan hiányérzete marad. Mindegyik cikk megold egy-egy feladatot, de egyik sem éri el a saját maga által kitűzött célt. Gale cikke egy teljes oldalt szán arra, hogy elemezze, melyek azok a változatok, amiket nem tudott megoldani (Gale 1998). A számtalan megoldás között sehol sem szerepel a feladatgyűjteményben megfogalmazott tevés feladat megoldása.

4.3 Állításos feladatok

„Egy papírlap egyik oldalán a következő szöveg olvasható:

1. Ezen a papíron legalább egy állítás igaz.
2. Ezen a papíron legalább két állítás igaz.
3. Ezen a papíron legalább három állítás igaz.

…

99. Ezen a papíron legalább kilencvenkilenc állítás igaz.
100. Ezen a papíron legalább száz állítás igaz.

Ha megfordítjuk a lapot, a másik oldalán ezt olvassuk:

1. Ezen a papíron legalább egy állítás hamis.
2. Ezen a papíron legalább két állítás hamis.
3. Ezen a papíron legalább három állítás hamis.

…

99. Ezen a papíron legalább kilencvenkilenc állítás hamis.
100. Ezen a papíron legalább száz állítás hamis.

A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le mind a 200 állítást. Hány igaz állítás van a lapon?” (Róka 2013: 88-9)

Könnyű megállapítani, hogy az első oldal száz állítása igaz. Tekintsük most a második oldal állításait. Vizsgáljuk meg az első állítást. Tegyük fel, hogy az első állítás hamis. Ez azt jelenti, hogy a papíron nincs hamis állítás. De már az első állításról feltettük, hogy hamis. Ezért ellentmondásra jutottunk. Az első állítás csak igaz lehet. Mivel az első állítás igaz, a papíron már csak legfeljebb 99 állítás lehet hamis. Ezért a századik állítás hamis, mert nem lehet legalább száz hamis állítás a papíron. Ezt a gondolatmenetet folytatva eljuthatunk addig, hogy az ötvenedik állítás igaz, az ötvenegyedik állítás pedig hamis. Tehát a feltett kérdésre az a válasz, hogy százötven igaz állítás van a lapon.

„Egy papíron az alábbi állítások olvashatók:

1. Ezen a papíron legalább egy állítás hamis.
2. Ezen a papíron legalább két állítás hamis.
3. Ezen a papíron legalább három állítás hamis.
4. Ezen a papíron legalább négy állítás hamis.

5. Ezen a papíron legalább öt állítás hamis.

6. Ezen a papíron legalább hat állítás hamis.

7. Ezen a papíron legalább hét állítás hamis.

8. …

Sajnos a 8. állítás olvashatatlan.

A 8. állítás igaz vagy hamis?” (Róka 2013: 88)

A száz állításos feladathoz hasonló gondolatmenetet olvashatunk a feladat mintamegoldásaként. A mintamegoldás eljut addig, hogy három állításról tudja, hogy hamis, négy állításról tudja, hogy igaz. Azt is megmutatja, hogy lennie kell négy hamis állításnak. Ebből arra következtet, hogy az ismeretlen nyolcadik állítás hamis (Róka 2013: 200-1). De mi történik akkor, ha például a nyolcadik állítás az, hogy „Süt a nap.”? Ennek az állításnak az igazságtartalmát nem határozhatja meg az előtte leírt hét állítás, hiszen csak akkor tudjuk eldönteni, hogy süt-e a nap, ha kinézünk az ablakon. Az is szerepelhetne nyolcadik állításként, hogy 2+2=4 a pozitív egészek körében. Erről az állításról biztosan tudjuk, hogy igaz. Most már kezdhetjük érezni, hogy valami nincs rendben ezzel a feladattal.

Nézzük meg az első feladatot most három állítással. Az állításaink ekkor a következők:

1. Ezen a papíron legalább egy állítás hamis.

2. Ezen a papíron legalább két állítás hamis.

3. Ezen a papíron legalább három állítás hamis.

Az előző gondolatmenetünk az első és az utolsó állítással most is működik. Az első állítás igaz lesz, az utolsó hamis. De a második állítással problémába ütközünk. Ha feltesszünk, hogy a második állítás hamis, akkor a papíron legfeljebb egy hamis állítás lehet. De ekkor a második és a harmadik állítás is hamis, vagyis két hamis állításunk van. Ellentmondásra jutottunk. Most tegyük fel, hogy a második állítás igaz, vagyis van legalább két hamis állítás a papíron. De az első állítás már igaz, ezért a második állításnak szükségszerűen hamisnak kell lenni. Így a második állításnak egyszerre igaznak és hamisnak is kéne lenni. Ez lehetetlen, mert egy állítás vagy igaz, vagy hamis. Ha megnézzük általánosan a feladatot, azt láthatjuk, hogy páros számú állításra mindig meg lehet oldani, páratlan számú állításra sosem.

A látszólagos ellentmondást az oldja fel, hogy a matematika nyelve különbözik a mindennapi nyelvünktől. Az állítás fogalma a matematikában pontosan definiált, és attól, hogy valamit leírunk vagy mondunk, az nem lesz állítás. Ugyanígy a matematikában pontos definíciója van egy állítás igaz vagy hamis voltának. A nyolc és a három állításos feladatoknál arra juthatunk, hogy az ott lévő állításnak nevezett mondatoknak nem lehet mindegyike állítás. Ezt a fajta ellentmondást nem lehet azzal feloldani, hogy ennek a feladatnak nincs megoldása. Itt már maga a feladat sem feladat, mert már a feladat kitűzésének sincs pontos matematikai értelme.

5. Diákok dilemmái a feladatokkal kapcsolatban

A problémamegoldás módszertanának alapművének Pólya György munkásságát tartják (Pólya 1971). A feladatmegoldás módszertana azóta didaktikailag önálló ággá nőtte ki magát (Schoenfeld 1985). A problémamegoldási módszerek egyre finomabb, sűrűsödő hálójából mi most egyetlen momentumot szeretnénk kiemelni, a kiterjesztést. Abban mindenki egyetért, hogy a problémamegoldás, mint gondolkodási tevékenység, többek között magában foglalja a probléma újrafogalmazását, elemzését, kiterjesztését, általánosítását (Ceglédi 2011).

Így kerülhetünk abba a helyzetbe, hogy a száz állításról szóló feladatot megpróbáljuk három állítással is megoldani. A feladaton gondolkozó diákok is eljuthatnak addig, hogy páratlan számú állítással nem találják a megoldást. Ekkor kétségbe eshetnek. Gondolhatják azt, hogy ők hibáztak, elnéztek valamit, nem értették meg jól a feladatot. Hiába foglalkoznak sokat a feladattal, akkor sem tudnak vele megküzdeni. Ez feszültséget okozhat bennük, matematikai szorongást válthat ki belőlük. Gondolhatják azt, hogy nem értenek a matematikához, mert nem tudnak megoldani egy olyan feladatot, amihez nagyon hasonlót már megoldottak. Felmerülhet bennük az is, hogy egyáltalán jól oldották-e meg az eredeti feladatot. A nyolc állításról szóló feladatban már a feladat megértésekor észrevehetik a diákok, hogy ott valami probléma van. Megpróbálják megérteni a feladatot, megnézik a feltételeket. Amikor megvizsgálják, hogy pontosan mit keresünk, kipróbálhatják, hogy hogyan viselkedhet a nyolcadik állítás. Segédfeladatként megnézhetik, hogy mi a feladat megoldása, ha egy konkrét állítást írunk a nyolcadik állítás helyére. Különböző állításokat írva nyolcadik állításnak, különböző következtetéseket tudnak levonni. Ez zavart okozhat, mert nem tudják eldönteni, hogy mi az eredeti feladatnak a megoldása, ha a segédfeladatok megoldása eltérő. Ha azt írjuk nyolcadik állításnak, hogy 2+2=5 az egész számok körében, akkor mindegyik állításról el tudjuk dönteni, hogy igaz vagy hamis. De ha igaz állítást írunk nyolcadiknak, például azt, hogy 2+2=4 az egész számok körében, akkor már ellentmondásra jutunk, mert az első hét állítás azt sugallja, hogy a nyolcadiknak hamisnak kell lenni. Amikor a nyolcadik állítás helyére például azt írják, hogy „Peti levest eszik.”, akkor már tényleg nagy lesz a káosz a feladattal kapcsolatban. Miért is lenne attól igaz, hogy Peti levest eszik, hogy hét állítást felírtam egy papírra?

Az előző fejezetben leírt két mérleges feladatnak a mintamegoldása nem teljes megoldás. Mindkét esetben kapunk egy konstrukciót arra, hogyan tudjuk megtalálni meghatározott számú méréssel a hamis érmét. A második feladat mintamegoldása megmutatja, hogyan lehet ezt három méréssel megoldani. De miért nem öt méréssel oldottuk meg? Erre könnyű a válasz, hiszen a feladat azt kérte, hogy minél kevesebb méréssel találjuk meg a hamis érmét. Ezért az jobb, ha három méréssel találjuk meg, mintha öt mérésre lenne ehhez szükségünk. De azt honnan tudjuk, hogy három mérésnél kevesebből nem lehet? Meg lehet oldani két méréssel is a feladatot? Ahhoz, hogy pontos megoldást adjunk a feladatra, két dolgot kell megmutatnunk. Be kell látnunk, hogy három mérésnél kevesebbel nem találjuk meg a hamis érmét, és meg kell mutatnunk, hogy három méréssel meg lehet. A mintamegoldás megmutatja, hogy három méréssel meg lehet oldani a feladatot, de azt nem mutatja meg, hogy kevesebb mérésből nem lehet. Tehát a mintamegoldás nem válaszolja meg a kérdést. Ám azt a benyomást kelti a diákokban, mintha ez lenne a válasz. E dolgozat szerzője egészen addig meg volt győződve ezeknek a válaszoknak a helyességéről, amíg nem került át a katedra másik oldalára, és alaposabb elemzés után nem vette észre, hogy itt egy nemhogy matematikai, hanem metamatematikai hiba van. Képzeljük el egy pillanatra a diákok gondolkodását. Ezek a feladatok 12-18 éves diákoknak vannak írva. A diákok próbálkoznak, próbálkoznak, aztán vagy megtalálják a megoldást, vagy nem. Valószínűleg rosszabb eredményre jutnak, mint a mintamegoldás. Odalapoznak, hogy megnézzék a megoldást, és látják, hogy úgy kezdődik, hogy „3 mérésből meg lehet csinálni”. Utána ahogy elolvassák a mintamegoldást, látják, hogy ez egy bonyolult, átgondolt konstrukció, ami azt sugallja, hogy ennél jobb konstrukció nincs. Ekkor a tehetséges diákok még nem rendelkeznek akkora mértékű matematikai kultúrával, hogy jogosultságot érezzenek arra, hogy felülbírálják a megoldás helyességét. A legtöbb diák elfogadja, hogy ez a helyes megoldás, és ha van olyan diák, akiben esetleg valamilyen hiányérzet marad, ő is inkább magában keresi a hibát. Hiszen a könyv nyomtatott, okos emberek által írt, megdönthetetlen és jó. Erre a hamis benyomásra ráerősít az is, hogy a felépítettség és a hatásosság kedvéért ezek a feladatgyűjtemények több hasonló típusú feladatot tartalmaznak egymás után. Ezzel általában nincsen semmi probléma, hiszen a legközelebbi fejlődési zóna értelmében is célszerű, ha a gondolatmenet részekre van bontva, konkréttól megy az általánosig, kisebbtől a nagyobbig (Vigotszkij 1967). A gondolkodás élvezete és hatékonysága is nő azáltal, ha

egy korábban tárgyalt feladat megoldása után még mindig van kihívás a következő feladatban, de már megoldható számára az előzőben kapott gondolattól.
A mintamegoldások nem adnak bizonyítást az eredeti probléma megoldására, de mégis valamit bizonyítanak. Ezzel hitelesnek, jónak tüntetik fel a megoldást.

Ugyanezek és ezekhez hasonló dilemmák merülhetnek fel a tevés feladatoknál is.

6. Etikai dilemmák a tehetséggondozásban

A mérleges, tevés és állításos feladatok többféle etikai dilemmát vetnek fel. Ezek lehetnek matematikai, tanári, szerzői és feladatkitűzői dilemmák.

Matematikai dilemmát jelent, hogy miről szól pontosan a feladat. Mi a feladatoknak a pontos megoldása? Megoldhatóak-e egyáltalán ezek a feladatok? Egyértelműek-e a feladat feltételei? Pontosan használja-e a matematikai fogalmakat? Nem látunk-e bele olyan információt a feladat szövegébe, ami valójában nincs is benne?

Tanári dilemmát jelent, hogy egyáltalán meg tudjuk-e oldani a feladatot. Meg tudjuk-e oldani a feladatot középiskolás módszerekkel? Amikor elolvassuk a feladat mintamegoldását, mi is gondolhatjuk, hogy az helyes. De el tudjuk-e dönteni a leírt mintamegoldásokról, hogy azok valóban megoldásai-e a feladatnak? Óvatosnak kell lennünk a feladatok kitűzésével, hogy ne hagyjunk megválaszolatlan kérdéseket, feloldatlan feszültséget a diákokban. A tevés és a mérleges feladatoknál már maga a konstrukció megtalálása is egy izgalmas kihívást jelentő feladat. Akkor feladhatunk-e egy feladatot csak azért, hogy megmutassunk egy szép konstrukciót úgy, hogy közben a feladat teljes megoldását nem mutatjuk meg? Ha a mérleges feladatoknál csak azt kérjük, hogy oldják meg valahány mérésből, akkor a feladatot etikusan adtuk fel, ám a megfogalmazása sokkal kevésbé elegáns és nyitva hagyja azt a kérdést, hogy elég-e kevesebb mérés. Itt továbbra is fennál az, hogy a kiterjesztés általános igénye miatt a diákok megpróbálják a legkevesebb méréssel megoldani a feladatot. Láttuk, hogy ez komoly matematikai hátteret igényel. Ilyenkor tanárként fontos feladatunk van. Tisztáznunk kell a diákokkal, hogy van olyan mérésszám, aminél kevesebbel biztosan nem oldható meg a feladat. Elmondjuk nekik, hogy ez a tisztázás sok esetben komolyabb matematikai eszköztárat igényelne, mint amivel ők rendelkeznek. Ez újabb kérdéseket vet fel. Megmutassuk-e a diákoknak a megoldást akkor is, ha előre tudjuk, hogy nem fogják teljesen érteni? Ekkor láttatjuk velük, hogy meg lehet oldani a feladatot. Azt is megtehetjük, hogy elmeséljük, hogy sokan gondolkoznak hasonló problémákon. A problémák közül vannak, amiket már megoldottak a matematikusok, de olyanok is vannak, amiket még nem. Megemlíthetjük azt is, hogy kik oldották meg azt a feladatot, amivel éppen foglalkozunk.

A *feladatkitűzők* első dilemmája, hogy hogyan lehet feladni ezeket a feladatokat. Milyen korosztálynak lehet megmutatni a feladatokat? Milyen korosztályban lehet feladni úgy a feladatokat, hogy a megoldást is el lehessen mondani hozzá? A feladatkitűzők szempontjából fontos kérdés, hogy a diákok mennyire jártasak a bizonyításban, felmerül-e bennük a bizonyítás igénye. Ha a feladatokat a szokásos módon fogalmazzuk meg, akkor azokban a diákokban, akikben nem merül fel a bizonyítás igénye, nem feltétlenül okozunk pillanatnyi feszültséget. Számukra később jelenhet problémát, hogy bizonyításnak gondolnak olyan gondolatmeneteket, amik nem bizonyítások. Azokban a diákokban, akikben a feladat megoldásakor már felmerül a bizonyítás igénye, pillanatnyi feszültséget is okozhatunk a feladattal. A diákok sokszor nem rendelkeznek kellő szintű matematikai ismeretekkel a feladatok pontos megoldásához. Másik dilemma az, hogy a feladatot csak úgy fogalmazzuk-e meg, hogy a könnyen megoldható részre kérdezzünk rá. Itt hasonló dilemmáink keletkeznek, mint a tanárok esetében.

Könyvek, feladatgyűjtemények készítésekor *szerzői* dilemmák is felmerülnek. A feladatkitűzői dilemmák mellé társul néhány újabb. Az első dilemma az az, hogy betehetek-e a feladatgyűjteménybe egy olyan feladatot, amelyre utána hibás vagy hiányos megoldást adok. Ilyen feladattal sok helyen találkozhatunk. A pontos megoldással ezek a feladatok már nem kerülhetnének bele olyan kötetekbe, amik általános- vagy középiskolások számára készültek, mert magasabb matematikai ismeretek szükségesek a megoldásokhoz. Egy másik lehetőség az, hogy a feladatnak csak egy részét adjuk fel. Ettől azonban kevésbé lesz vonzó a megfogalmazása, esetleg már nem is illik bele a kötetbe. Ha nem teszem bele a kötetbe, akkor esetleg megfosztom az olvasótábort egy mélyebb gondolattól.

7. Interjúk

Minél több dilemmának szerettük volna megtalálni a feloldását. Interjút készítettünk doktorandusz hallgatókkal, hogy lássuk, hogyan oldják meg ezeket a feladatokat. Tárgyalható-e a feladatok megoldása egyáltalán PhD hallgatói szinten? Van-e szükségük irányított kérdésekre a felmerülő kérdéseik pontos megválaszolásához?

A matematikai dilemma vizsgálatakor a témavezetőmnek eszébe jutott, hogy a feladatok megoldása szerepelhet a Jaglomban. Megpróbáltuk megkeresni az irodájában, de nem találtuk sehol. Ez egy sokat használt, fontos könyv, ezért megnéztem, hátha megtalálom otthon a könyvespolcon a többi matematikakönyv között. Amikor Édesanyám meglátta a kezemben a könyvet, elmesélte, hogy Róka Sándor tanár úrtól kapta főiskolás korában, amikor a tehetséggondozó szakkörére járt. A témavezetőmben és Édesanyámban szinte egyszerre fogalmazódott meg a gondolat, hogy készítsünk interjút Róka Sándorral. Megkerestük a Tanár urat, aki örömmel válaszolt a kérdéseinkre. Néhány gondolatát levélben is leírta. Az egyik levele megtalálható a függelékben.

Róka Sándor a magyarországi tehetséggondozás kiemelkedő alakja. Évtizedek óta vezet matematika szakköröket a legkülönbözőbb korosztályoknak, alsó tagozattól egészen a főiskoláig. Nevét sokan ismerik, könyveit sokan forgatják. Legismertebb könyve a 2000 feladat az elemi matematika köréből, ami ajánlott irodalom a matematika tanárszakos hallgatóknak is (Róka 2010). Hosszú évekig tanított a Nyíregyházi Főiskolán, a 2000-es évektől fő profilja a tehetséggondozás, hétvégenként az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozóban tanít.

7.1 Interjú doktorandusz hallgatókkal

Ebben a fejezetben azt írjuk le, ahogy interjút készítettünk három doktorandusz hallgatóval a száz állításos feladatról. Az interjúban a kérdezőt *K*-val rövidítem, a doktorandusz hallgatók *A, B, C* jelölést kaptak.

Kilencvenkilenc állítás

Egy papíron az alábbi állítások olvashatók:

1. Ezen a papíron pontosan egy állítás igaz.
2. Ezen a papíron pontosan két állítás igaz.
3. Ezen a papíron pontosan három állítás igaz.

…

99. Ezen a papíron pontosan kilencvenkilenc állítás igaz.

A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le min a 99 állítást.

Határozd meg, hogy mely állítások igazak a papíron! (Róka 2013: 87)

C: Próbálkozzunk! Lehet-e az 1. igaz? Ekkor a többi hamis. Ez működhet.

Lehet-e a többi igaz? Pontosan 2, pontosan 3… nem lehet.

K: Bármely két állítás kizárja egymást. Akkor legfeljebb egy lehet csak igaz.

Száz állítás

Egy papíron az alábbi állítások olvashatók:

1. Ezen a papíron pontosan egy állítás hamis.
2. Ezen a papíron pontosan két állítás hamis.
3. Ezen a papíron pontosan három állítás hamis.

…

99. Ezen a papíron pontosan kilencvenkilenc állítás hamis.
100. Ezen a papíron pontosan száz állítás hamis.

A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le mind a 100 állítást.
Határozd meg, mely állítások igazak a papíron! (Róka 2013: 87-8)

A: Mi a kérdés?

K: Melyikek igazak?

A: (átfordította a másikra)

B: Ezek is kizárják egymást. A 99. igaz, akkor a többi hamis.

K: Ezek az állítások ellentmondanak egymásnak. Akkor legfeljebb egy lehet igaz. A 99. lehet igaz, ekkor a többi hamis.

A: Lehetne-e, hogy egyik sem igaz? Akkor 100 hamis van, de akkor a 100. igaz.

Kétszáz állítás

Egy papírlap egyik oldalán a következő szöveg olvasható:

1. Ezen a lapon legalább egy állítás igaz.
2. Ezen a lapon legalább két állítás igaz.
3. Ezen a lapon legalább három állítás igaz.

…

99. Ezen a lapon legalább kilencvenkilenc állítás igaz.
100. Ezen a lapon legalább száz állítás igaz.

Ha megfordítjuk a lapot, a másik oldalán ezt olvassuk:

1. Ezen a lapon legalább egy állítás hamis.
2. Ezen a lapon legalább két állítás hamis.
3. Ezen a lapon legalább három állítás hamis.

…

99. Ezen a lapon legalább kilencvenkilenc állítás hamis.
100. Ezen a lapon legalább száz állítás hamis.

A szöveg a pontok helyén is folyamatos, csupán a rövidség kedvéért nem írtuk le mind a 200 állítást. Hány igaz állítás van a lapon? (Róka 2013: 88-9)

K: Most pontosan helyett legalább van. Pech: egyszerre rajta van az igaz és a hamis is.

B: Miért nem a 3. feladattal folytatjuk?

K: A 3-as hibásan lett oda berakva, így nem didaktikus.

C: Nézzük A gondolatát: Meg tudjuk feleltetni egymásnak?

A: A legalább x-ből következik a legalább x-1.

K: Tehát megadható egy lineáris rendezés.

B: Lehet, hogy ez egy nyitott feladat, vagyis nem egy válasz van rá.

Az állítás definíciója: egy állítás akkor állítás, ha eldönthető róla, hogy igaz vagy hamis.

(csak az első oldalt nézte)

A: Úgy se jó.

C: Ha mind a 100 igaz, akkor igaz mind a 100.

Egymást kell hogy meghatározzák.

B: A feladat szövege megmondta, hogy állítások, akkor nem mondhatjuk azt, hogy nem.

K: *B* azt mondja: *C* szereti a mogyorót. *A* szereti az almát. … Ezektől külön-külön eldönthető, hogy igaz vagy hamis.

C: Legalább 50 igaz és legalább 50 hamis egyszerre tud teljesülni. De 200 állításunk van. Máshol lesz a bűvös határ. Ha valamelyik igaz, visszafelé igaz lesz az összes többi.

K: [Rajzol egy függőleges vonalat, ami az állítások sorát jelképezi, majd rámutat egy pontra.] Alatta minden igaz, felette minden hamis. Ez maximum 100^2 próbálkozás.

C: Ha legalább 100 igaz, akkor a lapnak az a fele teljesen igaz.

K: Lehet-e az összes maradék igaz?

A: Nem, mert akkor kéne, hogy legyen hamis is.

K: Hány hamisnak kell lenni ahhoz, hogy kellő számú igaz állítás legyen?

A: Legalább 50-nek.

C: Az már 150 igaz állítás. Nem jó.

A: De jó, mert az legalább 100.

K: *B* ötletét nézzük meg. Lehet-e, hogy nem igaz, hogy legalább 100 állítás igaz? Akkor kéne legalább 100 hamis állítás.

C: Akkor az mind a 100 igaz. Hamisakat határozzuk meg.

K: Az első 100 mind igaz biztosan.

A rejtélyes kő

Valamikor régen két hatalmas király háborúzott egymással. Végül az egyik győzött és elkergette a másikat. Az utóbbi palotájának kertjében különös kősziklára bukkantak, amelyre ezt a mondatot vésték, pontosan hetvenhétszer:

> „Erre a kőre legalább hetvenhét hazug mondatot véstek."

Mellett kis kőtáblácska állott, amin a következő magyarázat volt olvasható:

> „A nagy kő alsó részén ugyanannyi mondat van, mint a felsőn, de ezt emberi szem nem láthatja."

Hány igaz állítás van a kőre vésve? (Róka 2013: 89-90)

B: (értelmezi a feladatot)

C: **Mi az állítás?**

B: „Erre a kőre legalább hetvenhét mondatot véstek."

C: Ugyanebből a mondatból van 77? Vagy 77 igaz? Nincs-e valami csavar a történetben?

A: Hetvenhét, amit ír, azok igazak és felette van hetvenhét hamis.

B: Kell alatta 77 hamis. De honnan tudjuk, hogy amit nem látunk, azok között nincs-e igaz?

C: A kő aljára írták ugyanazt? Mert ha igen, az úgy nem lehet.

K: Mi jutott eszembe, amikor ezt olvastam?

C: Mátrix.

Nyolc állítás

Egy papíron az alábbi állítások olvashatók:

1. Ezen a papíron legalább egy állítás hamis.
2. Ezen a papíron legalább két állítás hamis.
3. Ezen a papíron legalább három állítás hamis.
4. Ezen a papíron legalább négy állítás hamis.
5. Ezen a papíron legalább öt állítás hamis.
6. Ezen a papíron legalább hat állítás hamis.
7. Ezen a papíron legalább hét állítás hamis.
8. …

Sajnos a 8. állítás olvashatatlan.

A 8. állítás igaz vagy hamis? (Róka 2013: 88)

K: Ha nem is mátrix, egy predikátumos logikai formula lesz. Mi jut eszünkbe?

B: Nekem a 100+100. De Csabának a köves, mert le van törölve és nem látszik az állítás. Kis világos út, amin megyek, a többi sötét erdő…

A: Ha legalább 4 igaz, akkor 3, 2, 1 is igaz. Akkor a maradék hamis, akkor az utolsó is hamis.

C: Nem vághatunk el máshol, például 5-nél. Ha legalább 5 igaz, akkor legalább 5 hamis is, ami nem lehet. A 4-nél többet ezzel kizártuk, úgy érzem.
Ha legalább 3 hamis, akkor a 4. is hamis, de akkor igaz, hogy legalább 4 hamis.

K: Itt van n db állítás. Mi az n-edik?

Ha pontosan n igaz, akkor 1 lehet igaz.

n=99-re sejtés?
Vagy a_1-szer leírva, hogy legalább a_1, a_2-szer legalább a_2, stb.
Kis számból lehet sejtéseket megállapítani.
Mi történik, ha azt mondom, hogy a 8. állítás az, hogy „Süt a nap.”, ami igaz.

B: Most.

C: A többi állítás miatt szükséges, hogy a 8. hamis legyen, akkor nem lesz a rendszerben ellentmondás.

B: Oda kéne írni, hogy a feladatnak van megoldása.

C: Hamis lesz-e attól a „Süt a nap.”, hogy a többi állítás miatt hamisnak kéne lennie?
Hát nem.

C: Nem kell, hogy önmagában tudjuk eldönteni?

K: **Mi az az állítás?**

C: **Mondat.**

K: **Mi az, hogy mondat?**

A: **Van egy axiómarendszer és abból le lehet vezetni.**

K: Mi a probléma a 8 állításos feladattal? A fő probléma didaktikailag meg matematikailag.

B: Didaktikailag olyan, mint az, hogy folytasd a sorozatot: 5, 10, 15, 20, 25.

K: **Mi a matematikai hiba?**

C: **Mi az, hogy állítás?**

B: Vannak dolgok, amiket tudunk. Megegyezünk például egy axiómarendszerben. A definiált műveleteinkkel lépésről lépésre tudunk haladni.

K: Lehet „Süt a nap.” helyett „2+2=4 az egész számok között”.
Jól megmondtátok, ezek nem állítások.
Mi az, hogy állítás?
„Süt a nap.” nem lehet egyszerre igaz is meg hamis is.
Olyan, mintha az egyik kikényszeríthetné a másikról, hogy milyen legyen.
Beszélhetnek egymásról állítások.

Állítás az a valami, amiről el lehet dönteni, hogy igaz vagy hamis.

Nincs ennek a feladatnak megoldása.

B: Miért nem feloldás, hogy ezek állítások?

Oda olyan állítás van írva, amiről a szerző tudja, hogy az.

K: Ezen a papíron legalább egy állítás hamis.

Ezen a papíron legalább két állítás hamis.

Ezen a papíron legalább három állítás hamis.

Ezen a papíron legalább egy állítás igaz.

Ezen a papíron legalább két állítás igaz.

Ezen a papíron legalább három állítás igaz.

Én, mint szerző azt mondom, hogy ezek állítások. Hány igaz és hány hamis?

B: Nem találok jó arányt.

K: Pedig én megmondtam. Akkor ez hazugság.

C: **Didaktikailag az a baj, hogy félrevezetőek. Állításnak mond valamit, ami valójában nem az.** Hamis képet alakít ki.

K: Ha azt mondjuk, hogy egy állítás igaz vagy hamis, akkor ezek nem állítások, mert nem lehet mindegyik igaz vagy hamis. Mondhat-e egy állítás másik állításról valamit? Ezt csináljuk, „ez nem állítás" is az. El kell szakadni a középiskolai definíciótól.

B: Kell egy axiómarendszer, amiből le lehet vezetni.

K: *C* mondj egy mondatot!

C: Hódmezővásárhely Magyarország második legnagyobb alapterületű városa…

K: …volt.

Debrecen *C* második legpirosabb alkonyatú pohara zuhogott.

Ez nem egy értelmes mondat.

B: Magyar nyelvben ezek is értelmes mondatok.

C: Ez így már tényleg butaság.

B: Értelmesnek kell lennie.

K: Felismerjük-e az értelmes mondatokat?

B: Fel.

K: A rendszerben beszélek vagy nem? Formulába minden megfelelő kategóriaelemet be tudok helyezni. Előre meg van szabva, mit hová tehetek.
Axiómarendszer: változók, függvényjelek, relációk, aritás (hány változó van benne).
Mondjuk, hogy megmondtam mi a mondat. Akkor mi az állítás?
Vektortérben gondolkodva: skalárral való szorzás, összeadás, ellentettjel.

B: Akkor ez a második mondat is mondat.

K: Viszont nem értelmes. Logikával a második mondat is értelmes.

B: **Mikor válik állítássá egy mondat?**

K: Ezt többféleképpen meg lehet oldani. Például vannak levezetési lépések. Megmondok szabályokat, bevezetek axiómákat. Le tudjuk vezetni, hogy néhány mondatból következik-e a másik. Axiómákból következnek. Használhatók a formális logika lépései.
Ha igazságtartalmat akarok eldönteni, akkor meg vagyok lőve. Eddig még nincs igaz vagy hamis, csak ebből az állításból levezetve a másik. Ha azt mondjuk, hogy az axiómák igazak, akkor a levezetés is. Vannak teljesülő állítások, ezeket nevezzük mostantól igaznak.
A probléma az, hogy minden axiómarendszerben van olyan állítás, ami eldönthetetlen. Van levezethető, meg nem levezethető állítás. Kimondható olyan mondat, ami nem vezethető le, de nem bizonyítható be, hogy nem vezethető le. Szeretnénk, hogy az igaz állítások legyenek a levezethetők.
Visszatérve: a fejezet első feladata hibás. Mert a harmadik biztosan hibás, hiszen nem mondhatom valamiről kívülről, hogy állítások. Ilyen típusú állításra nem mondhatom, hogy állítás, mert nem mondtam meg, mi a rendszer. Meg kell adni a rendszert: Ezek az állítások, ezek vagy igazak vagy hamisak. Vagy van benne ellentmondás vagy nincs.

B: Mi lett volna ebben az alaprendszer?

K: Lovagok és lőkötők.

B: És ha ezt mondom.

Ezen a papíron … darab 0 számjegy van.

Ezen a papíron … darab 1 számjegy van.

…

K: Itt már van axiómarendszerem.
Van megoldható és nem megoldható feladat. 77-tel már nem lehetett ugyanazt feladni, ezért ugyanazt írta 77-szer. Meg kellett volna mondani, hogy mi az állítás.
Feloldás lehet ilyenkor, hogy a feladatkitűző hazudott, tehát ő lókötő.
Igazságtartalmat csak kívülről tudok adni. Például a Peano-féle axiómarendszerben nem tudom bebizonyítani a számelmélet alaptételét.
Ennek a feladatnak nincs megoldása. De miért nincs?
Szeretnénk bebizonyítani, hogy létezik ilyen rendszerünk és nincs benne ellentmondás.
Tétel: egy axiómarendszer saját magáról nem tudja bebizonyítani, hogy ellentmondásmentes. Átverés, hogy nem közlik a diákkal, hogy itt vannak paradoxonok.

7.2 Doktorandusz hallgatókkal készült interjú elemzése

Látható, hogy a doktoranduszok is először meg akarják oldani a feladatot ahelyett, hogy értelmeznék. Hármuk közül *B* már az elején felveti az állítás fogalmának vizsgálatát, de ő is visszaterelődik a megoldás medrébe. Az interjú több mint egy óráig tartott, és csak a vége felé kezdett a doktoranduszoknak derengeni a feladat értelmezhetősége vagy inkább értelmezhetetlensége. A matematikai állítás pontos fogalmát egyikük sem ismerte. Ez a fogalom matematika tanárszakon 2000 óta nem szerepel. Előtte a matematika alapjai nevű tárgy tárgyalta, ami az új tantervekben két félév helyett csak egy félévet kapott. Az is látszik, hogy komoly matematikai háttér és matematikai intelligencia kell ahhoz, hogy valaki magában a feladatkitűzésben kételkedjen. Doktoranduszi szinten ez elérhető. Az interjú rávilágított arra, hogy ennek a témának a letisztázása középiskolás szinten nagyon nehéz lenne.

Szép feloldása az ellentmondásos feladatoknak a következő lovagokról és lókötőkről szóló példa. „Tegyük fel, hogy A ezt mondja: ’Lókötő vagyok, vagy kettő meg kettő az öt.’ Mire következtethetünk ebből?” (Smullyan 2016: 18) A könyvben szereplő hivatalos megoldás a következő. „Az egyetlen levonható következtetés az, hogy a feladat szerzője nem lovag. Az igazság az, hogy sem lovag, sem lókötő nem tehet ilyen kijelentést. Ha A lovag lenne, akkor az az állítás, hogy ’A lókötő, vagy kettő meg kettő az öt’, hamis lenne, hiszen A nem lókötő, és kettő meg kettő sem öt. Így A lovag létére hamisat állítana, ami lehetetlen. Másrészt, ha A lókötő lenne, akkor az az állítás, hogy ’A lókötő, vagy kettő meg kettő az öt', igaz lenne, mivel az első fele, miszerint A lókötő, igaz. Így A, aki lókötő, igazat állítana, ami ugyanúgy lehetetlen. Tehát a feladat feltételei ellentmondásosak (…). Vagyis én, a feladat szerzője vagy tévedtem, vagy hazudtam. Arról biztosíthatom önöket, hogy nem tévedtem, ebből következik, hogy nem vagyok lovag. A teljesség kedvéért szeretném megjegyezni, hogy életem során legalább egyszer igazat is mondtam már, így lókötő sem vagyok." (Smullyan 2016: 24-5) Vagyis feloldást jelenthet az ellentmondásos feladatoknál, ha belátjuk, hogy a feladat kitűzője vagy tévedett, vagy hazudott.

7.3 Interjú Róka Sándorral

Róka Sándor tanár urat elsősorban feladatgyűjteményeiről és feladatkitűző szellemiségéről szerettük volna kérdezni. A Tanár úr már az interjú előtt is megnyílt felénk, és szinte kérdések nélkül mesélt feladatkitűzői és tehetséggondozói szemléletéről.

J: Nagyon sok könyve ismert, én is rengeteg könyvével találkoztam, meg nagyon sok feladatgyűjteményével is, amiket azért főleg a tehetséggondozásban használunk, használnak a tanárok. De azért az egyetemen is többször előkerülnek a kötetei, főleg a 2000 feladat az elemi matematika köréből. Hogyan kezdődött ezeknek a feladatgyűjteményeknek az írása? Miért kezdte el? Miért írta őket? Mi volt velük a célja?

RS: Nekem mindig voltak szakköröseim. Városi szakkör, válogatott diákok, akiket érdekelt a matek. Amikor milyen korúak. Volt vagy két olyan csoport is, akikkel negyedikben elkezdtem alsósként, és érettségiig együtt voltunk. A szakköri munkához válogattam amúgy is szép feladatokat, hogy ne unatkozzanak. Ezek a feladatok szépek, jó őket megoldani, gyönyörködni bennük. Diákkorom óta érdekeltek. Akkor gyűjtögettem a feladatokat, például orosz feladatgyűjteményekhez hozzá lehetett jutni, azokban voltak nagyon szépek, a KöMaL-ban, versenyeken. Tehát lehetett ilyeneket találni, ha az ember keresett, kellett a szakkörre. Csináltam levelező pontversenyt több éven át, aztán lett az Opus, ahhoz is kellettek szép feladatok. Tehát sok-sok feladat ott volt kéznél. Meg igen, a főiskoláshoz is kellett jegyzet. Meg írtam cikkeket ilyen feladatsorokról. Szóval ott voltak körülöttem a feladatok., és hogy sok könyv lett belőle, az egy szerencsének is köszönhető. Volt Debrecenben egy könyvkiadó, a Tóth Könyvkereskedés és én Tóth Csabát ismeretem, itt tanult, itt végzett tanárként a főiskolán, tanítottam. Neki is jó piaci körülményei voltak, nagyon sok könyvet, sokféle könyvet eladott, ezt ő ügyesen csinálta. Nála sok könyvem megjelent. Persze máshol is, de valahogy így történt.

J: Azt említette, hogy nagyon sok feladat állt rendelkezésére. A feladatgyűjteményekben szereplő feladatok főleg ezek közül kerültek ki, vagy van köztük rengeteg olyan is, amiket Ön gyártott? Ezekben van valamilyen tematika?

RS: Vannak saját feladataim. Például a KöMaL-ban egészen sok feladatom megjelent, például a 90-es évek környékén, meg mostanában is vannak. Ezek egy része olyan volt, hogy láttam valahol, és voltak közte saját készítésűek. Valamin gondolkozik az ember, valamit úgy megtalál, kitalál, és ha sikerül belátni, lesz belőle egy feladat. Túráztatni kell azért a memóriámat, hogy ilyenek előkerüljenek, de mondjuk eszembe jut az, hogy például tanulják analízisből a Dirichlet függvényt. Van-e olyan folytonos függvény, amelyik racionális helyen irracionális, irracionális helyen racionális? Ez egy elég érdekes kérdés, nekem tetszett. Gondolkoztam rajta, de nem fejtettem meg. Egészen rövid megoldása van. Például Papp Júlia debreceni diák volt akkoriban, középiskolás. Olimpikon is volt a bátyjával együtt. Együtt utaztunk valahova és akkor elmondtam neki, ő percek alatt megoldotta. Ezt olyan jó volt látni. Most is van olyan érdekes feladat, ami most is foglalkoztat.

J: Van esetleg kedvenc kötete a saját kiadványai közül? Vagy kedvenc sorozata?

RS: Nyilván mindegyik amikor megszületett kedves volt számomra és azért ez nem változott meg, csak eltompult legfeljebb. A legtöbb munka azt gondolom a 2000 feladatban volt. Az nagyon sok időbe telt. Hiszen meg sem született akkor, 1992-ben volt az első változat, akkor még 1000 feladatként. Aztán lett belőle pár év múlva 1500, aztán lett 2000, és itt abbahagytuk. De sok könyv elég gyorsan született, a 2000 feladathoz képest mindenképpen. Szóval abban rengeteg munka volt, abba sok mindent beletettem.

J: Említette ezeket a városi szakköröket. Amikor ezeket a feladatgyűjteményeket állítja össze, vagy állította össze, akkor főleg egy adott diákcsoportra, vagy adott gyereknek állította össze, vagy elképzelt egy korosztályt, egy társaságot, akik számára készítette ezeket a feladatgyűjteményeket?

RS: A téma volt meg. Mondjuk skatulyaelves feladatok általános iskolásoknak, vagy területes feladatok.

J: Akkor ezek a kis füzetek a legtöbbször inkább téma szerint készültek, adott korosztálynak, mondjuk általános iskolások számára?

RS: Igen. Megvolt, hogy ez a téma engem érdekel, ehhez amúgy is sok feladatom van, ilyet jó lenne írni. És ha lehetett, akkor megszületett. Sokféle tervem, kéziratom is van, ami senki másnak nem kell, de elkészítettem. Például volt ilyen, hogy A matematika humora. Az jó volt, az egy használható dolog volt, ilyen sztorikat összegyűjteni. Meg nyilván érdekelt engem is. Abból a gyűjtésből lett egy könyv. Én azt nem gondoltam, hogy abból több is lesz. Aztán lett belőle nagyjából öt. Vagy a logisztorik is egy izgalmas feladattípus. Abból akkor egy kötet lett. Én akkor nem gondoltam arra, hogy abból több lesz, és lett négy-öt abból is.

J: A logisztorik több helyen is megjelennek azért más könyvekben is.

RS: Így van.

J: Mondjuk a Logika-landban is vannak olyan történetek, amik a logisztorikhoz kapcsolódnak. Ön szerint mi a szerepe a gondolkodásban ezeknek az egyébként nem matematikai rejtvényeknek? Merthogy fontos megoldásuk van, de mégsem precíz matematika. Mi lehet a szerepük?

RS: A rejtvényeken meg a feladatokon is jó gondolkodni. És hogy most matekfeladaton gondolkodom, vagy egy másfajta logikai rejtvényen, aközött inkább csak a technikai eszközökben van különbség. A matekos rejtvényeknél, ott tudni kell mindenféle dolgokat, például a logaritmust. Ahhoz kellenek alapismeretek. Gondolkodni jó, rájönni valamire az nagy élmény. Diákkoromban részt vettem levelező pontversenyben. Jó volt a feladatokon napokig gondolkozni, és este is még ott jár az ember fejében. Ez egy hosszú út, míg rájön az ember és az nagy élmény.

Eszembe jutott valami, mostanában gondoltam is rá valamiért, és a kérdésével kapcsolatos. Kaptam egyszer egy levelet egy volt olimpikontól. Miskolci diák volt valamikor régen. Most, amit kérdezett, vagyis hogy mi a rejtvények szerepe, mi a feladatok szerepe, ahhoz kapcsolódik. Ebben tetszettek, amiket írt. Úgy nem ismertük egymást Lacival, legalábbis személyes tantermi kapcsolat nem volt köztünk. De aki három alkalommal is diákolimpikon volt, arról azért tud az ember. Szóval, hogy a feladatoknak mi a szerepe. Matematikus diplomát szerezett, majd elment doktorizni, de azt nem fejezte be, és az egyik internetes nagyvállalatnál dolgozik külföldön fejlesztőként, mert szeret programozni. És hogy miért nem lett matematikus egy háromszoros matematika diákolimpikonból? „Bármilyen jól mennek is a matekversenyek a profi matematikát csak olvasni szeretem, a műveléséhez nincs türelmem, kitartásom. Egy versenyfeladaton szeretek gondolkozni, tudom, hogy van esélyem megoldanom. A valódi matek mindig rizikós, unalmas. Mai napig nagyon szeretek viszont matematikát olvasni minden szinten. Végtelenül élvezem, ha a bizonyítást átugorhatom, mert hihető, hiszen csak hobbiból olvasom." Most már sok évvel a diákkor után a KöMaL-t mindig olvasgatja, minden hónapban, és gondolkozik a feladatokon pár órát. Tehát ez egy jó időtöltés, gondolkodni élmény, rájönni valamire jó dolog. Elégedetten hátra dőlök, amikor úgy érzem, hogy megvan, ezt meg lehet fejteni. És akkor emiatt írt ő nekem levelet, hogy volt egy KöMaL feladat, napokig gondolkozott rajta. B feladat volt, ami nem is a nehéz feladatok között van. Egy nagyon rutinos feladatmegoldóról van szó. Ez nekem is egyfajta vigasz, amikor gondolkozok feladatokon, és nem jövök rá. De nem esek kétségbe. Szóval egy szokásos KöMaL feladaton napokig gondolkozik és nem tudta elképzelni, hogy hogy lehet ilyet állítani, amit a feladat mond, meg hogy lehet rájönni a megoldásra. A geometria példát meg tudja csinálni koordináta-geometriával, de az meg nem érdekes, mert nem jön rá, hogy mitől működik az. Végül megoldotta, és ez egy katartikus élmény volt számára, és meg akarta osztani velem. Tehát a feladatmegoldás az egy küzdelmes dolog, és jó hogyha sikerrel jár. Függőséget is okozhat, ha az ember rászokik erre.

Volt egy feladat és azt sokszor elmeséltem, már csak emiatt is emlékszem rá. Komáromban minden ősszel van Nagy Károly Diáknapok középiskolásoknak. Hétvégén ott matematikus foglalkozások mennek, összegyűlnek mindenhonnan az országból meg Felvidékről. A szervező, Oláh Gyuri bácsi egy ilyen komáromi rendezvényen mondott nekem egy példát. Két hármasból, két nyolcasból a négy alapművelettel, zárójelekkel állítsd elő a 24-et. Az ilyet szeretem, nekem is érdekes ez a feladat. Kijönnek ilyenek, hogy $8+8+3\times 3=25$, a 25 megvan. Vagy $(8+3)\times 3-8=25$, a 25-öt másképp is meg tudom csinálni. Szóval Gyuri bácsi adta nekem ezt a példát, hogy oldjam meg. Ezen gondolkoztam, és nem jöttem rá. Komárom messze van Nyíregyházától, a vonaton volt időm. Gyuri bácsi nem felejtette el, egy év múlva megint megkérdezte, hogy megcsináltam-e. Nem az volt, hogy mindig ezen gondolkoztam, de évek teltek el, hogy ezt próbáltam megfejteni. Ez egyszerű ráadásul, mert csak néhány opció van, néhány lehetőség. Olyan sok variáció nincs, hogy hogy csinálok műveletsort belőle. Már ez is egyfajta vonzerőt tud jelenteni. Pár év eltelt. Egy januárban havat lapátoltam. Nagyon nagy hó volt. Órákig lapátolja olyankor az ember, megpihen, aztán újra lapátol. És akkor rájöttem. Ez egy csoda volt. Olyan örömöt tud okozni, hogy ezt megoldja az ember. Szóval jó feladatokon gondolkozni. Az, hogy könnyű vagy nehéz egy feladat, az egy bizonytalan dolog. Van, akinek könnyű, van, akinek nehéz. Nyilván, amihez nagyon sok technikai ismeret kell, az azért nehéz. De találunk néhány nagyon egyszerű feladatot. Szeretem az ilyeneket, gyűjtöm. Volt, hogy itt a főiskolán tanítottunk tanítóképzősöket is. Jöttek a gyakorlóból, hoztak egy példát, ami az elsős könyvben volt, és kérdeztek tőlem. Nem tudták megoldani és én sem jöttem rá. De egy normális elsős feladat volt, egy számtáblázat. Van benne néhány szám, kettő hiányzik, milyen szám kell oda? Nem jöttem rá. Gyűjtöm ezeket, van néhány feladatom, amit nem oldottam meg, ami alsós feladat, vagy akár ovis feladat és az ember nem jön rá, mert nem elég rugalmas a gondolkodása.

J: A 24 előállítására szeretnék még egy pillanatra visszatérni. Azért ez is egy olyan feladat, amikor nagyon sokféle konstrukcióval próbálkozik az ember, hogy hogyan tud eljutni ehhez a megoldáshoz. Többször is találkoztam olyan feladattal a könyveiben, amikor hasonló megoldásmeneteket adott a Tanár úr. Például voltak ezek a mérleges feladatok, amikor a hamis érmét kellett megtalálni a pénzérmék közül. Ott is sokszor előfordul, hogy konstrukciókat adunk megoldásként, viszont ezekkel a konstrukciókkal csak azt tudjuk megmutatni, hogy valahogyan meg tudjuk találni azt a pénzérmét. De igazából azért itt valamennyire engedünk a matematikai precízségből, amikor konstrukciót adunk egy ilyen feladat megoldásaként. Ön szerint ez mennyire megengedhető a tehetséggondozásban, a matematikai precízségből való visszavétel vagy engedés annak érdekében, hogy könnyebben érthető legyen az, hogy miről van szó az adott feladatban?

RS: Matematikát általában nem úgy nézünk, hogy definíció, tétel, bizonyítás és akkor minden teljes. Meg a megismerés sem így történt, amikor legelőször megfejtették a feladatokat. Ezek akár túlzások is lehetnek. A precíz axiomatikus felépítés az nagyon kevesek számára fontos. Nem biztos, hogy ilyesmit a gyereknek át kell adni, mert őt nem érdekli, nehéz is megérteni akár, hogy ez most miért fontos. Szóval ez egy nehéz terep tud lenni. De konstrukciós feladatokban vannak ilyenek versenyeken, sok helyen. Azért a felbukkanó feladatok nagyobb részében mind a kettő szerepel. Mutassuk meg, hogy ennyiből megoldható a feladat, és akkor ennyivel megoldom. A mérlegelőseknél is azért vannak olyan példák, ahol belátható, hogy ennél kevesebből nem lehet megcsinálni, és akkor megcsinálom ennyivel. De ez néha tényleg nehéz, azt tudom persze. Mondjuk nyolc különböző tömegű golyóból a két legnehezebbet megtalálni, hogy ehhez annyi mérés kell, amennyi kell, az nehéz. De az, hogy a legnehezebb megtalálásához hét mérés kell, az világos, és hogy héttel meg lehet csinálni, azt pedig megmutatjuk.

J: Ön szerint van olyan szint a tehetséggondozás során, amikortól már tisztába lehet tenni ezeket a dolgokat? Van elképzelése esetleg arról, hogy kinek lenne a szerepe az, hogy azokat a tehetséggondozásban résztvevő diákokat, akikben esetleg igény ébred erre a precízségre később, támogassa ebben? Kinek lehet a feladata vagy a szerepe, hogy azokat a feladatokat, amikkel korábban találkozott, úgy tegye tisztába, hogy a precízség is megmaradhasson?

RS: Szerintem ez csak a specialistákat érdekli, meg néhány ínyencet. Mint akár ez az e-mail, amit Laci írt, hogy a bizonyításokat átugorja. Ha úgy érzi, hogy az hihető, hogy ennyi, akkor ő nem nézi meg a bizonyítást, mert neki nem kell vizsgáznia, meg ilyesmi.

J: Ezek szerint olyan célközönségnek szólnak ezek a feladatok, akik inkább az élményszerűséget keresik benne úgy, hogy ne kelljen tökéletesen precíz levezetéseket elvégezniük? Igazából azért kérdezem ezt, mert közben kiderült, hogy Édesanyám is tehetséggondozás kapcsán járt Önhöz még a főiskolán. Találtam otthon egy könyvet, amit Öntől kapott. [Megmutattam a könyvet.]

RS: Nagyon szép, egy csoda az a könyv.

J: Ebben is szerepel egy mérlegelős feladat, amikor n pénzérme közül szeretnénk megtalálni azt az egy hamisat, ami könnyebb a többitől. Ebben a könyvben már szerepel nagyon szépen és precízen a levezetése, bizonyítása ennek a feladatnak. Miközben nagyon hasonló feladatok szerepelnek az Ön köteteiben is, ahol meg inkább az élményszerűség jelenik meg. Olyan, minthogyha tényleg valamikor eljöhetne az a lépés a tehetséggondozásban, amikor már eljuthat a diák egy olyan szintre, hogy ezekről a feladatokról mélyebb matematikai gondolatokkal beszéljen.

RS: Közben kerestem egy könyvet a mérlegeléshez. Nekem sok fontosat mondott Pósa Lajos egyik előadása. A jó kérdés az, ami a gyereket érdekli. Az évek során változik a tanítás, hogy az ember mikor hogyan csinálja. Régebben én is úgy voltam, hogy ó, de szép példák, ezeket beviszem, és akkor lenyomom a torkukon. De nem az kell, hogy nekem szép legyen. Persze kell, hogy én szépnek találjam, de ahogy Pósa Lajos elmondja, olyan kérdés kell, ami a gyereket érdekli. Mert az őt lázba hozza, izgalomban tartja, kíváncsi, kutatni fogja és megnézi. Ha a gyereket nem érdekli, hogy miért kell annyi, akkor én ezt nem fogom neki elmondani mert elalszik közben, vagy mindenféle más dolgot fog csinálni. Ha érdekessé tudom tenni, érdekli, és tudom a választ, akkor ezt megnézzük. De ezek kellenek hozzá, és a legfontosabb az, hogy a gyereket érdekelje. A precízség a szakembereknek kell, hogy tudjam azt, hogy ennyi a határ, ennél kevesebbel vagy többel nem lehet. Amit mutatott könyvet, abban benne van az, hogy 12 golyóból a legnehezebbet meg kell találni 3 méréssel. Keleti Tamás ott tanít az egyetemen. Vannak ilyen visszaemlékezések, hogy hogyan vált valaki matematikussá. Keleti Tamás is ír a gyerekkoráról. Erről a feladatról mesél benne. Ezt sokszor láttam már, talán le is írtam. Szerintem meg tudnám oldani, de idő kell hozzá. Régebben a szakkörön az lehetett, hogy egy feladatot körbejártunk, abban gyönyörködtünk.

Utóbbi években inkább az volt szakkörön (de azért vannak kivételek), hogy nézzük meg, megoldottuk, akkor menjünk tovább. Felgyorsult a tempó, mintha nem akarnánk annyira körbejárni. Vannak azért ellenpéldák. A mérlegelős feladatnak egyrészt fontos az élmény része, tehát az, hogy rájöttem. De azon, hogy háromból meg lehet oldani, de kettőből miért nem, ezen nem feltétlenül gondolkoznak.

Van most egy gyerek, Zsombor, ő most már hatodikos, de negyedikes korától kezdve ismerem. Valami csoda, olyan ötletei vannak. Akár hetekig egy-egy feladat él közöttünk, hogy arra rá kellene jönnünk. Például volt egy zrínyis feladat megyei fordulóban a vége felé, ahol 3 perc jut egy feladatra. Azon mi hetekig gondolkoztunk, és ilyen konstrukciókat gyártottunk, mint amiket kérdez. Egy 4×4-es táblázatba +1-et, -1-et és 0-t írok úgy, hogy bármely 3×3-as részben a kilenc szám összege 0. Tehát négy darab ilyen 3×3-as van. Ebben a táblázatban mennyi lehet legfeljebb a számok összege? Ott megvan az öt válaszlehetőség. Arra azért rájöttünk, hogy 8 nem lehet. Több nap után eljutottunk oda, hogy vagy négy, vagy hat. Néggyel megcsinálta Zsombor. És akkor a bizonytalanság megvolt, hogy a tizenhat szám összege lehetne esetleg több is, lehetne hat. Arra rájöttünk, hogy több nem lehet. Eltettük, hogy majd jövő héten folytatjuk. Én megcsináltam, azt hittem, hogy megvan hattal. Megírtam Zsombornak, aztán kiderült, hogy ha összeadjuk a számokat, az nem hat, hanem csak öt. De legalábbis mindenképpen jobb volt a korábbi négytől, amitől nem tudtunk elmozdulni. Egy pár napja írt, hogy megcsinálta a konstrukciót, megcsinálta hattal, és elmesélte hogyan. Néha egy-egy feladattal, amiről sokat beszélünk az van, hogy el tudnám mondani a megoldást pár perc alatt. Régen, szakkörön ez így is ment. De nagyon meg kell gondolni, hogy hatásosabb, ha nem úgy csináljuk. Sok időt el tudunk tölteni, és Zsombor feltesz kérdéseket. Egy feladatot nagyon körbejár, megnéz más változatban, amire én is hajlamos vagyok, de ő talán még inkább, alapból jön neki. Szóval van, akit ez érdekel, valakit meg csak az, hogy oldjuk meg és akkor megvan, kipipáltuk, rohanunk tovább.

Az élmény miatt van, hogy a feladat meg kell, hogy ragadja az embert, valami kedvem legyen hozzá, hogy megoldjam. Később már ha nagyon jártas benne az ember, akkor érdeklik az részletek is, és próbálja tisztázni a környezetét a feladatnak. Szeretem, szerintem is jó könyv a 2000 feladat, mert rengeteg feladat van benne, meg elég jók a feladatsorok. Az úgy megmaradt, hogy amikor még 1000 feladat volt, tehát első megjelenés előtt, a Typotex Kiadó elküldte lektorálásra piaci szándékból a tanárképzőre. Nyilván, ha megismeri, meg lektorálja, akkor használni is fogja. Ettől függetlenül fontos a lektorálás, ilyen köröket meg kell tenni. Szegedről Pintér Lajos visszaküldte, ő nem lektorálta. Neki nem tetszett a könyv, az 1000 feladat. Értem, és igaza volt. Nagyon tisztelem őt. Mert, hogy ez nem Pólya szellemében van, amiről beszélgettünk. Ott nincsenek leírva a megoldások, nagyon ritka, hogy részletesen van leírva a megoldás. Ez nem Pólya szellemében van, ahogy Pólya leírta a könyvében, hogy látszódjon a felfedezés. Miért így csináltam? Miért így csináljuk? Hogy jövök rá? Ez a rész abban a könyvben nincs benne. Egyfajta felhasználás szempontjából praktikus és jó, egy másfajta ízlés számára ez nem egy hasznos könyv, és igaza van.

Azt máig érdekes kérdésnek gondolom, és néha gondolkozok ezen, hogy ha nézem a racionális számokat, azok mindenütt sűrűek a számegyenesen, ugye az egész számokból képezett hányadosok. De nyilván nem fontos minden egész számot felhasználni. Ha szűkebb számhalmazt veszek, az azokból képzett hányadosok is mindenütt sűrűek lehetnek. Ezen gondolkoztam, hogy mi lenne, ha csak a négyzetszámokat venném. Igaz-e, hogy a négyzetszámokból képzett hányadosok a számegyenesen sűrűn helyezkednek el. Ezen azért gondolkoztam. Matektáborban voltunk, ott volt Zsolt, ő idősebb tőlem pár évvel, matematikus. Erdős Pállal több közös cikke van, diákolimpikon volt, tehát ő a csúcsokon van. Örülök, hogy ismerhetem. Zsoltnak elmondtam a feladatot, ő vagy egy napig gondolkozott rajta, és másnap elmondta nekem a megoldását, amire rájött. Én lassú vagyok, lassan értem meg. Nagyjából megértettem én ezt a megoldást, de igyekeznem kellett, hogy értsem. Ez tetszett. Akkoriban benne voltam a III. kategóriás OKTV bizottságban. Ott az egyik feladatunk az, hogy viszünk példákat, aztán majd valamelyik kikerül a versenyre. Javasoltam ezt a feladatot versenyre. A bizottság elnökével találkoztam, elmondtam neki a feladatot. Úgy adtuk volna fel, hogy igaz-e, hogy ha x, y pozitív számok, $x < y$, akkor van két olyan négyzetszám a^2 és b^2, hogy $\frac{a^2}{b^2}$ az x és y közé esik. Ez nem is egy bonyolult szövegezésű, könnyen érthető feladat. Ezt így feladhattuk volna. Másnap jött az elnök és fél sorban megcsinálta a megoldást. Megdöbbentő volt. Pár hónappal később megint valahol találkoztam Zsolttal, elmondtam neki az elnök megoldását. Perceken át kacagott, hogy ez mennyire egyszerű, és hogy nem látta rajta. Ez is egy szépsége a feladatoknak. A bizottságnak különben tetszett az ötlet. Azt tűzték ki, hogy négyzetszámok helyett olyan számokat veszek, aminek a tízes számredszerbeli felírásában 0 számjegy nem szerepel. Ezt is speciálisabban kérdezték, hogy az egy és kettő közötti intervallum egy szűkebb részében bármely két szám közé be lehet tenni két ilyen szám hányadosát. Csináltak rá megoldást, mert nyilván akkor tűzzük csak ki, ha meg tudjuk oldani. Nagyon küzdelmes bizonyítás lett. Abban bíztunk, amiben joggal lehet bízni egy döntős feladatnál, hogy majd a diákok megoldják, és akkor látjuk, hogyan lehet ezt szépen megoldani. Három vagy négy olyan döntős dolgozat volt, akik megfejtették, de azok sem voltak szépek. Amire számított a bizottság másodlagos haszonként, hogy hátha kiderül valami a feladatról, hogy miért vannak így a dolgok, és ha már mi nem tudtuk, akkor a versenyzők rájönnek, és lehet tovább valamit kezdeni ezzel, az ott akkor egy zsákutca volt. De ez a kérdés ez érdekes, és lehetne négyzetszámok helyett, hogy prímszámokkal veszem, azaz, hogy prímek hányadosai mindenütt sűrűek. Mondjuk azt meg tudtam csinálni, és elégedett voltam, hogy ha olyan számokat veszek, amelynek nincs háromnál nagyobb prímosztója, ilyen egészeket veszek, ezeknek a hányadosai mindenütt sűrűek a számegyenesen. Az én megoldásom nem fél soros. Ezt is ki lehetne tűzni, belefér a tananyagba.

A feladatok izgalmasak, szép kérdések vannak. Ki kell deríteni sok mindent, minél többet megtudni róla. De már annak is örülünk egy konstrukciónál, ha van egy konstrukcióm. Pósa Lajos is beszél mérlegelős feladatokról az említett előadásban. Már én is változtattam azóta magamon. Nem azt mondom, hogy ezt öt mérésből csináld meg, hanem hogy minél kevesebb méréssel csináld meg. Mert akkor az egyik gyerek azt mondja, én megoldottam a példát, nekem megvolt héttel. Igaz, hogy Ödönke ügyesebb, ő megcsinálta hattal, de én is megcsináltam, van sikerélményem. Régen azt mondtam, hogy ennyivel kell megcsinálni, ennyivel csináld meg. Most már inkább úgy adnám föl és úgy adom föl (nyilván vannak kivételek), hogy minél kevesebbel vagy minél többel oldd meg. Amikor egy feladaton gondolkozom, akkor is ez van, hogy fokozatosan jutok el valahová. Vannak ilyen állomások. Megcsinálja ennyivel, ő már többel, meg nem kudarc élmény, hanem siker van.

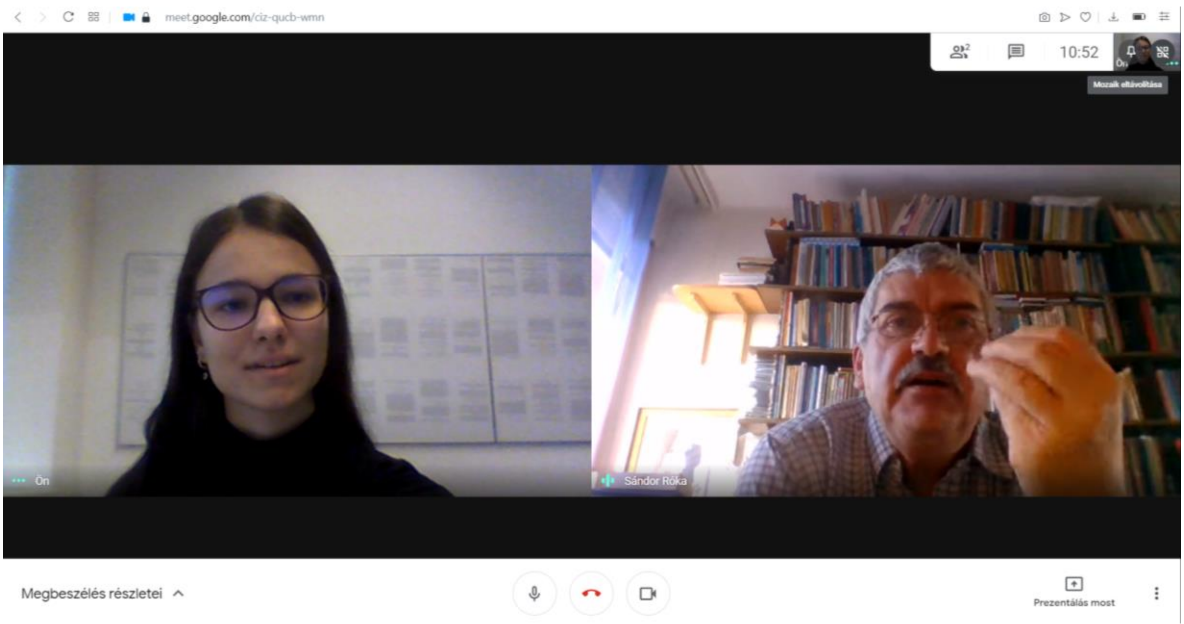
J: Ezek szerint hozzátartozik az élményszerűség is ezekhez a feladatokhoz, hogy minél szívesebben nyúljanak hozzá a diákok, minél szívesebben foglalkozzanak vele.

RS: Az a legfontosabb szerintem. Kötelességből nem sokra lehet eljutni. Lehet valamennyit csinálni, de nem sokat.

1. ábra: Róka Sándor tanár úrról az interjú alatt készült saját képkivágás a Google Meet beszélgetésből

J: Azt említette is, hogy vannak olyan feladatok, amiket többféle irányból meg lehet közelíteni, nagyon sokféle újabb feladat merül fel ezek kapcsán az emberben. Mennyire fontos itt a megfogalmazás? Nagy szerepe van annak, hogyan tűzünk ki egy feladatot, ahogy azt említette is. Például szerepeltek olyan feladatok, amikor át kellett kelni a sivatagon. Ott van mikor azt kérdezzük meg, hogy meddig tud eljutni, van mikor azt kérdezzük meg, hogy hogyan tud addig a pontig eljutni. Ön szerint mi lehet a szerepe itt a megfogalmazásnak?

RS: Azt kérdezem, hogy meddig, vagy azt, hogy hogyan, az részemről véletlenszerű. Mikor így kérdezem, mikor úgy kérdezem. Ha azt kérdezem, hogy meddig, ha megmondja, hogy mondjuk 100 kilométerre tud eljutni, azért azt meg kell magyarázni, hogy hogyan. Valahogy ez a kettő mintha együtt járna. De az, hogy a kérdéseket hogyan teszem fel, az fontos. Vannak a Pósa táborok. Egyszer egy ilyen hétvégi táborba elmehettem megfigyelőként, de volt még egy másik tanárkolléga hasonló szerepben érdeklődésből. Pósa másképp teszi fel a kérdéseket, mint ahogy mi matektanárok szoktuk. Tetszik ahogy ő teszi fel. Mondok egy példát. Ez egy jó feladat, én ezt használtam főiskolán amikor informatikusokat tanítottam. Ott ez egy jó példa volt, mert átvettük a permutációt, variációt, tehát a képletek megvoltak. Ott lottós, totós feladatok is szoktak szerepelni. Ez a feladat a következő: legkevesebb hány háromesélyes totószelvényt töltsek ki a tizenhárom tippes totószelvényen, hogy biztosan legyen legalább 5 találatom. Itt a feladatnál jöhetnek a képletek, ott van a feladatban az 5, a 13, a három esély miatt a hármas szám. Ott látok három darab számot, jön, hogy melyik képletet használjam. Nem tudom miért használom, de használom. Átesik egy ilyen kudarcon, hogy nem úgy kell feladatot megoldani, hogy itt van ez a képlet, kisorsoltuk őt. Mert ezt a feladatot nem így kell megoldani. Szerintem Pósa úgy is szokta, hogy a résztvevőket állásfoglalásra bíztatja, milyen várakozásokkal indulnak. Ki gondolja, hogy száznál több szelvény kell? Ki gondolja, hogy tíznél több? Volt régen ilyen vetélkedő, hogy Ki miben tudós?, a fél ország ismerte, könyv is van belőle. Ezen a versenyen szerepelt ez a feladat. Ezt a feladatot egy matektanár így kérdezi meg: egy tizenhárom tippes totószelvényből hány szelvényt kell kitölteni, hogy biztosan legyen egy legalább öt találatos. Pósánál is hallottam már ezt a feladatot. Ő így kérdezi: Jancsi szereti Juliskát, de Juliska kéreti magát. Azt mondja: rendben Jancsi, hozzád megyek feleségül, ha felmutatsz nekem egy olyan totószelvényt, amelyiken van legalább öt találat. Igen ám, de Jancsi spórolós. Hány szelvényt töltsön ki Jancsi, hogy elnyerje Juliska kezét. Akik versenyfeladatokat oldanak meg, őket ez a körítés vagy érdekli, vagy nem. De egy szélesebb körben ez sokkal jobban leköti őket, mintha elmondtam volna azt a példát. Át se gondolja. Ezen elgondolkozik, azon meg nem. Szóval a feladatoknak a szövegezése kapcsán a kérdés nemcsak az, hogy meddig vagy hogyan, bár az tartalmilag nagyon fontos. De hogy milyen köntösben mondom el, hogy érdekessé tegyem számára, az persze fontos. Pósánál a feladatok többnyire ilyenek, hogy nem egy lecsupaszított feladatot mond el, hogy oldd meg ezt az egyenletet, hanem van egy sztori, ami izgalomba hozza az embert.



2. ábra: Róka Sándor tanár úrral az interjú alatt készült saját képkivágás a Google Meet beszélgetésből

J: Mit gondol arról, hogy ezek a sztorik, amikbe beleágyazzák ezeket a feladatokat, meddig maradhatnak meg? Úgy értem, hogy egészen nagyon magas szintig megtarthatjuk ezt a történetet és játékosságot a feladat körül?

RS: Amikor ilyen mese van hozzá, az később is egy vonzerőt tud adni. Ha én is elmondom ezt a két nyolcas két hármasból huszonnégyet, ha csak így mondom el, akkor az más hatást vált ki, mintha elmondom, hogy én mennyit küzdöttem vele. Akkor kíváncsivá teszi őt is, na hogy ha neki ennyi volt, akkor nekem esetleg jobban sikerül. Ha a feladatoknak van háttere, az különféle lehet, nem feltétlenül Jancsi és Juliska van benne. Bármilyen háttere lehet, mondjuk ők már megcsinálták, ők mennyit küzdöttek vele és nem tudták. Ha jobban ismerem, többet tudok a feladatról, akkor jobban kötődök hozzá. De a mese az nyilván idősebb korban általában nem szükségszerű. De az, hogy milyen hatást váltok ki, az fontos.

Én nem készültem tanárnak. Matematikus szakon végeztem Debrecenben, csak akkoriban mindig rábeszéltek néhány hallgatót, hogy vegye fel a tanárszakot. Így nekem is van tanári diplomám, de alapból én nem gondoltam, hogy tanítani fogok. A tanár tényleg ahogy Pólya is írja, olyan, mint egy színész. Nem úgy, hogy színészkedünk, hanem át kell élnem, hatást kell kiváltanom belőle, fel kell csigáznom, fel kell piszkálnom. A feladatot valahogy érdekessé kell tennem. Vagy így, vagy úgy, de valahogy, hogy ne a szomszédját piszkálja, hanem ezzel foglalkozzon.

J: Tudna esetleg egy kicsit mesélni még a tehetséggondozásról? Már nagyon régóta foglalkozik tehetséges diákokkal. Mik a tapasztalatai? Hogyan változott az érdeklődésük az évek alatt? Mit gondol arról, hogyan változik a felépítése a tehetséggondozásnak? Mit csinál másképp, mint korábban? Azt említette már, hogy egészen más ritmusban állnak hozzá ezekhez a feladatokhoz mostanában a diákok, mint korábban.

RS: Nyilván változik mindig az élet. Eszembe jutott még egy húsz évvel ezelőtti változás. A diákolimpiai csapat vezetőjét nagyon szerettük, tiszteltük. Ő mondta azt, hogy meglepődve, vagy szomorúan tapasztalja azt, hogy a diákolimpikonok többsége már nem matematikus szakra megy. Egyfajta változás biztos, hogy van. Negyven évvel ezelőtt a diákolimpikonok, tehát a versenyzők legjobbjai elmentek az ELTE-re TTK-ra matematikus szakra. Külföldre akkor még nem. Már a 90-es években matematikus szakra csak egy-kettő ment közülük. A többi elment informatikusnak, mérnöknek, ilyesmiknek. Amúgy ez rendben van. Én is a szakköröseimnél nem arra számítok, nyilván a gyerekek döntenek, meg az ő sorsuk. De én sem úgy gondolok a szakkörre, hogy na majd ti érettségi után mentek matekos pályára, matematikusnak vagy matektanárnak. Az, hogy valaki matekból versenyez, vagy versenyekre készül, abban nagyon sok jó dolog van. Ez nem azt jelenti, hogy ő a matekos életpályát fogja választani.

Köszönöm, hogy engem kérdez ezekről. Nyilván bármelyik tanár sok mindent megélt az évek alatt, és tudnának mesélni. Nem az, hogy nagy bánat volt, de mégiscsak ilyen frusztráló érzésként, hiányérzetként van, hogy itt Szabolcsból, a szakköröseim közül egy sem lett diákolimpikon, egy sem lett Kürschák győztes. Voltak nagyon jó versenyeredményeink OKTV-n, Arany Dániel Matematikaversenyen, az országos versenyeken dobogós helyeink azért voltak. De a király kategóriában, tehát Kürschák és diákolimpia, ott nem. Szabolcsból nem az, hogy nem az én diákjaim, hanem amúgy sem voltak az elmúlt ötven-száz évben. Csak úgy voltak diákolimpikonok, hogy nyolcadikig itt jártak iskolába, aztán nyolcadik után elmentek a Fazekasba leginkább. Ezt nem sikerült összehozni nekem sem, Kiss Sándornak sem. Nyíregyháza egy nagyobb város, ha úgy vesszük. Ennél kisebb városokban, például Hajdúszoboszlón, ami negyedakkora, vagy Bonyhádon diákolimpikonokat, Kürschák díjazottakat neveltek fel többet Katz Sándor és Deli Lajos tanár urak. A tehetséggondozásban biztosan vannak olyan titkok, amik ezt magyarázhatják. Miért van az, hogy ők ezt meg tudták, mi meg nem tudjuk? Ez nyilván lehet az is, hogy ha helyet cserélnénk, ő megcsinálná itt, én meg nem csinálnám meg ott. Nemcsak az eredmények vannak meg, hanem valóban meg is érdemlik ezt az eredményt.

Változik az iskola is. A mostani fiatalok lényegesen másak, más a környezet. Régen azért lassabb volt az élet, nem voltak kihívások. Amíg nem volt például számítógép, addig nem volt versenytárs. Ha valakit ilyesfajta dolgok érdekeltek, az elment matematikusnak. Aztán már az informatika csúcsokon jár és nagyon izgalmas. Ahhoz is matek kell, tehát aki jó matekból, az persze, hogy érdekesebbnek találja. Régen más volt a versenyzés is, meg az iskolai terhek is sokkal lazábbak voltak. Volt ideje matekozni, volt a KöMaL példákon gondolkozni. Most hiába volna kedve mondjuk hozzá, azért kapja rendesen az iskolából, hogy ezt is azt is meg kell csinálni, és nem jut ideje rá. A körülmények nagyon megváltoztak. Kevesebb idő jut a matekra.

J: Amikor előkerül egy-egy ilyen különleges gyerek, mint Zsombor, akit említett, akkor ezeket a kérdéseit akkor körüljárják? Erről a 4×4-es táblázatról is, amikor beszéltek, azt említette, hogy akkor rengeteg kérdés merült fel benne ezzel kapcsolatban. Olyankor van, hogy rengeteg időt töltenek azzal, hogy a feladat kapcsán felmerülő kérdéseit megválaszolják?

RS: Így van. Zsombor egy élmény számomra. Így történik, tehát nem az, hogy megoldottuk, akkor menjünk a következőre. Ha valamit még el akarok mesélni róla, azt nyugodtan elmesélem, mert érdekli is, de ő jön a kérdésekkel, és akkor megnézzük ezt azt amazt. Nagyon jó. Nyilván mindig vannak ilyen fiatalok, ez jó. Én is másképp tanítok, mint régebben. Régebben az volt, hogy én ezt tudom, én ezt elmondom, és akkor érdekeljen benneteket. Most meg azt nézem, vajon érdekli-e őket. Nem az, hogy én elmondom, hanem ti jöjjetek rá lehetőleg minél jobban, hagyok arra időt.

7.4 Róka Sándorral készült interjú elemzése

Az interjú során Róka Sándor tanár úr rávilágított arra, hogy a könyveiben, feladatgyűjteményeiben szereplő feladatok fontos célja, hogy felkeltsék a diákok érdeklődését. Fontos, hogy megragadja a diákokat a szövegezés, így a feladat izgalmassága és érdekessége miatt kezdjenek bele a példa megoldásába. A szakkörökön a feladatkitűző szerepe, hogy egy-egy feladatot a diákokkal minél jobban körüljárjanak, a lehető legpontosabb megoldást adják rá. Korábban a mérlegelős feladatoknál a pontosság kedvéért Róka Sándor tanár úr is azt kérdezte, hogy meg tudják-e oldani 5 mérésből a feladatot. Most már inkább úgy teszi fel a kérdést, hogy próbáljuk meg megoldani minél kevesebb mérésből. Ezzel az a célja, hogy amikor egy csoporttal dolgozik, azoknak a diákoknak is legyen sikerélménye, akik nem a legkevesebb méréssel tudták megoldani a feladatot. Így a diákok láthatják, hogy sokféleképpen lehet akár kevesebb mérésből is eljutni a megoldásig. Érdeklődőbb diákokkal a Tanár úr is körbe szokott járni sok oldalról, sokféle kérdéssel egy-egy problémát. Ekkor tisztázásra kerülnek azok a részletek, amik korábban a pontatlanságot okozták. A felmerülő kérdések tisztázása, a pontatlanságok javítása a tanár feladata. Könyveiben ezt a szellemiséget követi.

8. Feloldás

Dolgozatom első felében a matematikaoktatás egyik etikai kérdésével foglalkoztam. Azt vizsgáltuk, hogy szemben a reguláris, tantermi órákon elfogadott, megengedhető esetleges pontatlansággal, adhatunk-e matematikailag hibás választ vagy megoldást egy kérdésre vagy egy feladatra a tehetséggondozásban. Míg a reguláris matematika oktatásban a spirális fogalomalkotás természetes velejárói a kegyes matematikai pontatlanságok, megengedhető-e ez a tehetséggondozásban is.

Három, tehetséggondozásban megjelenő feladat kapcsán kétféle kérdés is felmerült. Az állításos feladatokban azt vizsgáltuk, hogy szabad-e olyan fogalmakkal játszani, amelyeket nem ismernek pontosan a diákok. Az állítás köznapi és matematikai szétválasztása nem egyszerű, ezt láthattuk a doktoranduszokkal készült interjúkban is. A másik két feladattípus nehézsége az az, hogy bár a konstrukciók trükkösek, akár ügyesebb kisiskolás diákok is megérhetik azokat. Ezzel szemben annak bizonyítása, hogy a konstrukció optimális, már mélyebb matematikai gondolatokat igényel, amik túlmutatnak a legtöbb középiskolás képességein.

A feladatok kitűzhetősége és feladhatósága kapcsán számos dilemma, metamatemEtikai kérdés merül fel. Ezek ismertetése után két interjút mutattunk be. Az egyik tanárszakos doktorandusz hallgatókkal készült, és a megoldások matematikai hátterét feszegeti. A másik Róka Sándorral készült, Magyarország egyik legismertebb feladatszerzőjével, aki számos népszerű feladatgyűjtemény szerkesztője.

Az első interjúból kiderült, hogy az állításos feladatok megoldása és feloldása még doktorandusz hallgatóknak is nehézséget okoz. Komoly matematikai háttér kell ahhoz, hogy valaki magában a feladatkitűzésben kételkedjen. A doktorandusz hallgatókkal készített interjú rávilágított arra, hogy ennek a témának a letisztázása középiskolás szinten nagyon nehéz lenne.

A másik interjú tanulsága, hogy feladatkitűzőként sok szempontot kell figyelembe venni. Róka Sándor tanár úr ars poeticája az, hogy a legfontosabb szempont az érdeklődés felkeltése. A diákok matematikai elköteleződése nélkül a többi kérdés föl sem vetődhet. Később, amikor ezekhez a feladatokhoz eljut a diák és a tanár, együtt kell feloldaniuk a határok átlépésekor keletkező szakadásokat.

A tehetséggondozás komoly feladat. Alapos átgondolást, sok előkészítést és folyamatos odafigyelést igényel. Amikor II. Ptolemaiosz király megkérdezte Eukleidésztől, hogy vajon a geometria megtanulásának nincs-e rövidebb és könnyebb módja, mint az, amelyet az Elemek mutatnak, akkor a nagy geométer így válaszolt: „A geometriához nem vezet királyi út.” (Sain 1986) **A tehetéggondozáshoz nem vezet királyi út.**

9. Mérleges feladatok matematikája

Láttuk, hogy a mérleges feladatoknál a szükséges mérésszám általában nem ismert. Mérleges feladaton a következőt értjük. Adott egy kétkarú mérleg, adott n darab pénzérménk és van információnk arról, hogy vannak köztük hamisak. A legáltalánosabb kérdés, az az, hogy a hamisak mind egyforma súlyúak, de eltérnek a valódi érme súlyától, nem tudjuk, hogy könnyebbek-e vagy nehezebbek, és találjuk meg a hamisakat. Az információelméleti határ az $n \cdot log_3 2$. De láttuk azt is, hogy ez nagyon gyakran nem éles. Az eddig létező legnagyobb alsó becslés n érme esetén $log_3(2^n + 2^{n-5} + 2^{n-6} + 2^{n-7} + 2^{n-9} + 2^{n-10} + 2^{n-12} + 2^{n-13})$ (An-Ping és von Eitzen 2009). Mi most azzal az esettel fogunk foglalkozni, ahol 2 hamis érménk van és tudjuk, hogy nehezebbek a valódiaknál. Megmutatjuk, hogy 11 érméig érvényes az információelméleti határ. Azért választottuk a 11-et, mert a 11 kritikus szám. Akkor ugyanis, ha 11 érméből 2 hamis lenne és nem tudnánk hogy könnyű vagy nehéz, akkor az információelméleti határ 5 mérés. Azt hogy ezt valóban meg lehet 5 mérésből csinálni, csak 2015-ben igazolta Chudnov, amihez a háromelemű test feletti Golay-kódokat használta (Chudnov 2015).

Két hamis érmét két érme közül nyilvánvalóan 0 méréssel tudunk megtalálni. Ha növeljük az érmék számát, és 3 érme közül keressük a 2 hamisat, ezek megtalálásához egyetlen mérés elegendő. Tegyünk a kétkarú mérleg mindkét serpenyőjébe 1-1 érmét. Ha egyenlőség van, akkor a mérlegen lévő két érme a hamis. Ha valamelyik kar lesüllyed, akkor a nehezebb érme és az asztalon maradó harmadik érme a hamis. Így 3 érme közül 1 méréssel megtaláltuk a két hamis érmét.

Négy érménél már nem elég egyetlen mérés, mert 4-ből 2 hamis érmét $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen lehet kiválasztani, így az információelméleti alsó határ $1 < log_3 6 \approx 1{,}63 < 2$. Ez alapján 2 mérésből kéne megtalálnunk négy érme közül a két hamisat. Ehhez tegyünk fel 1-1 érmét a serpenyőkbe, kettőt hagyjunk az asztalon. Ha elbillen a mérleg, akkor a nehezebb érme a hamis és a másik hamis érme az asztalon maradt. Az asztalon maradt 2 érmét feltéve a mérlegre a nehezebb lesz a második hamis érme. Ha a mérlegen egyenlőség van, akkor vagy mindkét érme hamis, vagy mindkettő valódi. Az egyik mérlegen lévő érmét cseréljük ki az egyik asztalon lévőre. Ekkor az egyik serpenyőben hamis, a másikban valódi érme van. Ha az újonnan feltett érme a nehezebb, akkor az eredetileg az asztalon maradó két érme a hamis, ellenkező esetben az eredetileg a mérlegen lévő két érme a hamis.

Öt érménél ismét növelnünk kell a mérésszámot, hiszen $\binom{5}{2} = 10$-féle lehetőség van a két hamis érme kiválasztására, és $2 < log_3 10 \approx 2{,}1 < 3$, így legalább három mérésre lesz szükségünk a két hamis érme megtalálásához. Ezt a méréssorozatot sokféleképpen el lehet végezni, nézzünk hozzá ezek közül egy konstrukciót. Tegyünk 2-2 érmét a serpenyőkbe, egyet hagyjunk az asztalon. Ha egyenlőség van a serpenyők között, akkor biztosan 1-1 hamis érme van mindkét oldalon, így mindkét hamis érme a mérlegen van, egy valódi pedig az asztalon. A 4 érmés konstrukciót a mérlegen lévő érmékkel végrehajtva a maradék 2 méréssel megtalálhatjuk a hamis érméket. Ha a mérleg elbillen, akkor vagy mindkét hamis érme a nehezebb csoportban van, vagy csak az egyik, de akkor a másik hamis érme az asztalon van. Vegyük most a nehezebb kétérmés csoportot és az asztalon lévő érmét. Ebben a 3 érmében van a 2 hamis érme. Ekkor a háromérmés konstrukció segítségével már egyetlen méréssel megtalálhatjuk a keresett 2 hamisat.

Hat érme esetén is 3 mérés elegendő kellene, hogy legyen 2 hamis érme megtalálásához. Az eddigiekhez hasonlóan $\binom{6}{2} = 15$ és $2 < log_3 15 \approx 2{,}46 < 3$. Ebben a feladatban tegyünk először 3-3 érmét a serpenyőkbe, így az asztalon nem marad semmi. Ha valamelyik érmecsoport nehezebb, akkor mindkét hamis érme abban van. Innentől a háromérmés konstrukcióval már egy mérés segítségével megtaláljuk a két hamis érmét. Ha egyenlőség van a két érmecsoport között, akkor 1-1 hamis érme van mindkét csoportban. Mindkét csoportból 1-1 méréssel könnyen kiválasztjuk a hamisat. Ezzel legfeljebb 3 méréssel megtaláltuk 6 érme közül a 2 nehezebb hamis érmét.

Hét érme esetén $\binom{7}{2} = 21$ lehetőségünk van a két hamis érme kiválasztására, így még mindig három mérésnek elegendőnek kellene lenni a két hamis érme megtalálásához, mert $2 < log_3 21 \approx 2{,}77 < 3$. Ismét tegyünk fel 3-3 érmét a serpenyőkbe, egyet hagyjunk az asztalon. Ha egyenlőség van, akkor mindkét hamis érme a serpenyőkben van, két külön oldalon, így az előző esetben ismertetett módon ki tudjuk választani az 1-1 hamis érmét a két hármas érmekupacból. Ekkor 3 mérést használtunk. Ha a mérleg valamelyik karja lesüllyed, akkor a másik serpenyőben biztosan nincs hamis érme, így a lesüllyedő csoporthoz az asztalon lévőt hozzávéve 4 érméből 2 hamisat a maradék 2 méréssel ki tudunk választani.

Nyolc érménél már legalább 4 mérés áll rendelkezésünkre, mert $\binom{8}{2} = 28$ és $3 < log_3 28 \approx 3{,}03 < 4$. Négy mérés elegendő is hozzá. Lehet rá konstrukciót mutatni, bár az eljárás kicsit bonyolultabb, mint a korábbi esetekben. Tegyünk a mérleg serpenyőibe 3-3 érmét, az asztalon hagyjuk a maradék kettőt. Elsőként nézzük azt az esetet, amikor elbillen a mérleg. Ekkor a lesüllyedő serpenyőben több hamis érme van, mint a másikban. Így vagy a lesüllyedő serpenyőben van mindkét hamis, vagy az egyik abban a serpenyőben, a másik pedig az asztalon van. A lesüllyedő 3 érméhez az asztalon lévő kettőt hozzá véve 5 érméből kell megtalálnunk 2 hamisat, amit a maradék 3 méréssel meg tudunk tenni az ötérmés konstrukció alapján. Másodikként vizsgáljuk azt az esetet, amikor egyenlőség van a hármas serpenyők között az első mérésnél. Ekkor vagy 1-1 hamis érme van a két serpenyőben vagy mindkét hamis érme az asztalon van. Cseréljük ki az asztalon maradó két érmét az egyik serpenyőben lévő 2 tetszőleges érmére, a többi érme pozícióján ne változtassunk. Ekkor a mérleg két irányba is elbillenhet. Ha a manipulált oldal süllyed le, akkor az eredetileg az asztalon lévő 2 érme volt a hamis, mert több hamis érme került ebbe a serpenyőbe, mint amennyi eredetileg ott volt. Ha az érintetlen serpenyő billen le, akkor a manipulált serpenyőből egy hamis és egy valódi érmét vettünk ki és két valódit tettünk a helyére. A leemelt 2 érméből és az érintetlen serpenyő 3 érméjéből is 1-1 méréssel ki tudjuk választani az 1-1 hamis érmét. Ha a második mérésnél is egyenlőség van, akkor két valódi érmét cseréltünk két valódira, így amelyikhez nem nyúltunk a manipulált serpenyőben, az az érme hamis és a másik serpenyőben is van egy hamis. A másik serpenyő 3 érméje közül már 1 méréssel ki tudjuk választani a hamisat. Így ebben az esetben is legfeljebb 4 méréssel megtaláltuk a 2 hamis érmét 8 érme közül.

Nézzünk egy másik lehetséges konstrukciót 8 érmére. Az első méréshez most is tegyünk 3-3 érmét a mérlegre, kettőt pedig hagyjunk az asztalon. Ha elbillen a mérleg, az előző konstrukcióhoz hasonlóan a 5 érméből kell 2 hamisat kiválasztanunk 3 méréssel, amit az ötérmés konstrukciót elvégezve meg is tudunk tenni. Ha egyenlőség van az első mérésnél, akkor az egyik serpenyőben otthagyok 2 érmét, a másikba pedig felteszem az eredetileg az asztalon lévő 2 érmét. Az asztalon lévő érmék vagy mindketten hamisak voltak, vagy mindketten valódiak, így, ha egyenlőség van a második mérésnél, akkor mind a 4 érme valódi. A maradék 4 érme közül 2 méréssel ki tudom választani a 2 hamis érmét a négyérmés konstrukció alapján. Ha a második mérésnél lesüllyed a két eredetileg az asztalon lévő érme, akkor mindketten hamisak, így megtaláltuk a keresett 2 hamis érmét. Ha a második mérésnél felemelkedik a 2 eredetileg az asztalon lévő érme, akkor a fent hagyott 2 érme egyike hamis, ezt egy méréssel meg tudjuk találni. És a másik serpenyőből levett 3 érme között is van 1 hamis, aminek a megtalálásához elegendő a maradék 1 mérésünk.

Kilenc érménél szintén legalább 4 mérésre van szükség a 2 hamis érme megtalálásához, mert $\binom{9}{2} = 36$ és $3 < log_3 36 \approx 3{,}26 < 4$ és ennyi elegendő is. Nézzünk egy legfeljebb 4 méréses konstrukciót. Tegyünk a mérleg serpenyőibe 3-3 érmét, így 3 marad az asztalon. Ha elbillen a mérleg, akkor vagy a lesüllyedő serpenyőben van mindkét hamis érme, vagy az egyik a lesüllyedő serpenyőben van, a másik pedig az asztalon. A lesüllyedő serpenyő érméihez az asztalon lévőket hozzá véve 6 érméből kell kiválasztanunk 2 hamisat, amit 3 méréssel megtehetünk a hatérmés konstrukció alapján. Ha az első mérésnél egyenlőség van a mérleg serpenyői között, akkor vagy 1-1 hamis érme van a serpenyőkben, vagy mindkét hamis az asztalon van. Cseréljük most ki az egyik serpenyő 2 érméjét 2 asztalon lévő érmére. Ha ekkor elbillen a mérleg, akkor két esetünk van. Vagy a manipulált serpenyő süllyed le és ekkor az újonnan a mérlegre tett 2 érmében volt hamis, így 2 hamis érmének kellett eredetileg az asztalon lenni. Az eredetileg az asztalon lévő 3 érme közül már 1 méréssel meg tudjuk találni a 2 hamis érmét. Abban az esetben, ha az érintetlen serpenyő süllyed le, ekkor két valódi érmét tettünk egy hamis és egy valódi helyére. A két leemelt érme közül 1 méréssel megtaláljuk az 1 hamisat. Az érintetlen serpenyő 3 érméje közül pedig szintén 1 méréssel ki tudjuk választani az 1 hamis érmét. Így ebben az esetben is 4 méréssel megtaláltuk a 2 hamis érmét. Nézzük meg az utolsó esetet is. Ha a második mérésnél is egyenlőség van, akkor a két valódi érmét cseréltünk 2 valódira, így a manipulált serpenyő 1 fennmaradó érméje biztosan hamis, a másik hamis pedig az érintetlen serpenyő 3 érméje között van. Ezt az 1 hamisat már 1 méréssel ki tudjuk választani a 3 érme közül.

Egy másik lehetséges konstrukció a 9 érméből 2 hamis érme megtalálására szintén 3-3-3 érmés csoportokkal kezdődik. Ha elbillen a mérleg, akkor az előző konstrukcióhoz hasonlóan itt is 6 érméből kell 2 hamisat 3 maradék méréssel kiválasztani, ami lehetséges. Ha egyenlőség van, akkor második mérésnek cseréljük meg az egyik serpenyő 3 érméjét és az asztalon lévő 3 érmét. Ekkor biztosan elbillen a mérleg. Ha az érintetlen serpenyő süllyed le, akkor az eredetileg a mérlegen lévő hármas érmecsoportokban volt 1-1 hamis érme. Ezeket 1-1 méréssel ki tudjuk választani, így megvan a 2 hamis érménk. Ha a megcserélt serpenyő süllyed le, akkor az eredetileg az asztalon lévő 3 érme között volt 2 hamis, amit már egyetlen méréssel meg tudunk találni.

Tíz érménél is legalább 4 mérésre van szükség, mert $\binom{10}{2} = 45$ és $3 < log_3 45 \approx 3{,}46 < 4$. Erre a 4 mérésre is lehet jó konstrukciót adni. Ehhez először tegyünk 3-3 érmét a mérlegre. Ha elbillen a mérleg, akkor a lesüllyedő serpenyőben van mindkét hamis érme, vagy egy ott van egy pedig az asztalon. Így a lesüllyedő 3 érméhez az asztalon lévő 4 érmét hozzá véve 7 érme közül 3 méréssel ki tudjuk választani a 2 hamis érmét. Ha az első mérésnél egyenlőség van, akkor a korábbiakhoz hasonlóan vagy 1-1 hamis érme van a két serpenyőben, vagy mindkét hamis érme az asztalon van. Cseréljük ki az egyik serpenyő 3 érméjét az asztalon lévő érmék közül 3-ra. Ekkor a mérleg biztosan nem marad egyensúlyban. Ha a mérlegen volt az 1-1 hamis érme, akkor a cserével 2 valódi és 1 hamis érme helyébe 3 valódit tettünk, így elbillen a mérleg. Ha pedig az asztalon volt a 2 hamis érme, akkor 3 valódi helyébe vagy 2 valódit és 1 hamisat, vagy pedig 2 hamisat és egy valódit tettünk, így ebben az esetben is felborul az egyensúly. Ha a második mérés során az érintetlen serpenyő süllyed le, akkor eredetileg 1-1 hamis érme volt a serpenyőkben, így a 3-3 érme közül 1-1méréssel ki tudjuk választani az 1-1 hamis érmét, így 4 méréssel megtaláltuk a 2 hamis érménket. Ha a második mérésnél a manipulált serpenyő süllyed le, akkor az eredetileg az asztalon lévő 4 érme között volt hamis, így mindkét hamis ott volt. E közül a 4 érme közül a maradék 2 méréssel ki tudjuk választani a 2 hamis érmét. Így 10 érme közül a 2 hamis, nehezebb érme megtalálásához is elegendő 4 mérés.

Az utolsó vizsgált eset az, amikor 11 érme közül szeretnénk megtalálni a 2 hamis érmét, amik nehezebbek a valódiaknál. Ekkor is legalább 4 mérésre van szükség, mert $\binom{10}{2} = 55$ és $3 < log_3 45 \approx 3{,}65 < 4$. Ez a konstrukció már bonyolultabb lesz az előzőeknél, ezért számozzuk meg az érméket 1-től 11-ig.

Az **első mérés**hez tegyük fel az 1, 2, 3, 4 számozású érméket a mérleg egyik serpenyőjébe, az 5, 6, 7, 8 számozásúakat a másikba, a 9, 10, 11-et pedig hagyjuk az asztalon.
1. eset: Ha elbillen a mérleg, akkor a felemelkedő serpenyő három érméje között biztosan nincs hamis, így a maradék hét érméből kell 3 méréssel kiválasztani a 2 hamis érmét. Ezt megtehetjük a hétérmés konstrukció alapján, így készen vagyunk.
2. eset: Ha egyenlőség van, akkor vagy mindkét hamis érme a 9, 10, 11 sorszámúak között van, vagy pedig egy hamis van az 1, 2, 3, 4 között és egy hamis van az 5, 6, 7, 8 között is.

Ekkor **második mérés**ként tegyük fel az 1, 2 sorszámú érméket a mérleg egyik serpenyőjébe, a 9, 10-et pedig a másikba.
1. eset: Ha a 9, 10 süllyed le, akkor ott biztosan van hamis, tehát a 9, 10, 11 között volt a két hamis, amiket egy méréssel ki tudunk választani a háromérmés konstrukció alapján, így készen vagyunk.
2. eset: Egyenlőség van a második mérés során. Ekkor az 1, 2, 9, 10 érmék biztosan valódiak, mert egyenlőség csak úgy lehet, ha nincs hamis érme a mérlegen, vagy ha 1-1 hamis érme van mindkét serpenyőben. De ha a 9, 10-ben lenne hamis, akkor mindkét hamis érmének a 9, 10, 11 között kéne lenni, így a 9, 10 lesüllyedne. Ezért a 9, 10 sorszámú érmék valódiak, így a 11-es is biztosan valódi, mert a 9, 10, 11 közül vagy mindhárom valódi, vagy pontosan két hamis van köztük. Tehát az 1, 2, 3, 4 és az 5, 6, 7, 8 érmék között van egy-egy hamis.

Mivel az 1, 2 érmék biztosan valódiak, így a 3, 4 között és az 5, 6, 7, 8 között van egy-egy hamis érme.

3. eset: Az 1, 2 süllyed le. Ekkor az előző esethez hasonlóan a 3, 4, 9, 10 érmék biztosan valódiak, és így a 11-es is az. Tehát az 1, 2 érmék között és az 5, 6, 7, 8 érmék között van 1-1 hamis. Ez az eset ugyanúgy folytatódik a továbbiakban, mint a 2. eset, csak az 1, 2 érmék lépnek a 3, 4 sorszámú érmék helyébe.

A második mérés 2. esetét folytatva **harmadik mérés**nek tegyük fel az egyik serpenyőbe a 3, 5, 6 sorszámú érméket, a másik serpenyőbe pedig a 4, 7, 10 sorszámú érméket.

1. eset: Ha a 4, 7, 10 a nehezebb, akkor a 3, 5, 6-ban nincs hamis, így a 4-es sorszámú érme biztosan hamis és az 5, 6 sorszámúak valódiak, különben egyenlőség lett volna a harmadik mérésnél. A másik hamis érme a 7, 8 között van. Ezt a maradék egy méréssel megtalálhatjuk, így készen vagyunk.

2. eset: Ha a harmadik mérésnél a 3, 5, 6 sorszámúak süllyednek le, akkor a 3-as sorszámú biztosan hamis, különben egyenlőség lenne vagy a másik serpenyő süllyedne le, így a 4-es valódi. Mivel a 4, 7, 10 felemelkedett, ezért a 7-es sorszámú érme is biztosan valódi, különben egyenlőség lett volna. Az 5, 6, 8 sorszámú érmék között van még egy hamis, amit a maradék 1 méréssel ki tudunk választani, így készen vagyunk.

3. eset: Ha a harmadik mérésnél is egyenlőség van.

Ekkor **negyedik mérés**nek tegyük a mérleg egyik serpenyőjébe az 5-ös, a másik serpenyőjébe a 6-os sorszámú érmét.

1. eset: Ha egyenlőség van, akkor a 3-as hamis, így a 4-es valódi. Mivel a 10-es érme is valódi volt, ezért a 4-es sorszámú a másik hamis érme, így készen vagyunk.

2. eset: Ha a negyedik mérésnél az 5-ös sorszámú érme lesüllyed, akkor ő hamis, a 6-os pedig valódi. Így a 3-as is valódi, tehát a másik hamis érme a 4-es.

3. eset: Ha a negyedik mérésnél a 6-os sorszámú érme süllyed le, akkor ő a hamis, az 5-ös pedig valódi. Így szintén valódi a 3-as érme és a másik hamis érme a 4-es.

Ezzel a konstrukcióval 11 érme közül meg tudjuk találni legfeljebb 4 méréssel a 2 hamis érmét, amik nehezebbek a valódiaknál.

10. Irodalomjegyzék

An-Ping, Li – von Eitzen, Hagen 2009. An improved lower-bound on the counterfeit coins problem. *arXiv*. arXiv:0906.0693.

Alway, G. G. 1957. Crossing the desert. *The Mathematical Gazette Vol. 41*.

Bereczky-Zámbó Csilla, Szabó Csaba, Szeibert Janka, Szenderák Júlia 2021. On a metamatemEthical question in talent care. *Annales mathematicae et informaticae Vol. 54*. 215-230.

Dr. Ceglédi István 2011. *A matematika tanításának pedagógiai – pszichológiai vonatkozásai*. EKF ttk.

Chiodo, Maurice – Clifton, Toby 2019. The importance of Ethics in Mathematics. *EMS Newsletter December 2019*. 34-37.

Chudnov, Alexander M. 2015. Weighing algorithms of classification and identification of situations. *Discrete Mathematics and Applications Volume 25: Issue 2*. 69-81.

Csányi Petra – Fábián Kata – Szabó Zsanett 2016. *Hogyan építsünk számelméletet?* TDK dolgozat. Budapest.

Csencov, N. N. – Jaglom, I. M. - Skljarszkij, D. O. 1979. *Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből* (ford.: Varga Dénes). Tankönyvkiadó. Budapest.

Dr. Fűzi Beatrix 2015. *Didaktika és oktatásszervezés.* Óbudai Egyetem.

Fine, N. J. 1947. The jeep problem. *The American Mathematical Monthly Vol. 54 (1)*. 24-31.

Gale, David 1998. *Tracking the Automatic ANT*. Springer. New York.

Grossman, Howard D. 1945. The twelve-coin problem. *Scripta Mathematica 11*. 360-361.

Hausrath, Alan – Jackson, Bradley – Mitchem, John – Schmiechel, Edward 1995. Gale's Round-Trip Jeep Problem. *The American Mathematical Monthly Vol. 102 (4)*. 299-309.

N. Kollár Katalin – Szabó Éva 2004. *Pszichológia pedagógusoknak.* Osiris Kiadó. Budapest. 194-212.

Kovács Veronika – Palotay Dorka 2012. *Ez is hungaricum – A modern tudomány és az oktatás kapcsolata*. TDK dolgozat. Budapest.

Pólya György 1971. *A gondolkodás iskolája*. Gondolat Kiadó. Budapest.

Róka Sándor 2001a. *Négyzetszámok.* Tóth Könyvkereskedés Kft. Debrecen.

Róka Sándor 2001b. *Kombinatorika.* Tóth Könyvkereskedés Kft. Debrecen.

Róka Sándor 2002a. *Szakköri feladatok matematikából 7-8. osztály.* Tóth Könyvkereskedés Kft. Debrecen.

Róka Sándor 2002b. *Prímszámok.* Tóth Könyvkereskedés Kft. Debrecen.

Róka Sándor 2007. *Szakköri füzetek – Számelmélet.* Tóth Könyvkereskedés Kft. Debrecen.

Róka Sándor 2010. *2000 feladat az elemi matematika köréből.* Typotex Kiadó. Budapest.

Róka Sándor 2013. *Logika-land.* Typotex Kiadó.

Sain Márton 1986: *Nincs királyi út! Matematikatörténet.* Gondolat Kiadó. Budapest.

Schoenfeld, Alan H. 1985. *Mathematical problem solving.* Academic Press INC. Orlando, Florida.

Smullyan, Raymond 2016. *Mi a címe ennek a könyvnek?* (ford.: Török Judit). Typotex Kiadó. Budapest. 18-25.

Szenderák Júlia 2020 *MetamatemEtikai dilemmák a tehetséggondozás területén.* TDK dolgozat. Budapest

Teller Ede 1990. *Légiposta*. Háttér Lap- és Könyvkiadó. Budapest.

Vigotszkij, Lev Szemjonovics 1967. *Gondolkodás és beszéd.* Akadémiai Kiadó. Budapest

(1) RUBICONline Kalendárium.
http://www.rubicon.hu/magyar/oldalak/1945_julius_16_az_elso_sikeres_atomkiserlet_vegrehajtasa

11. Függelék

11.1 Levél

Miről szól a matematika tanítása? Attól függ, hogy mi a célunk és kiket tanítunk.

Az iskolában adott a tananyag, és adott a tempó, hogyan kell haladni. Ott a trükköket kell elmondani, begyakoroltatni. Aki itt lemarad, az lemaradt. Sokan feladják, ezt azt néha megértenek az órai történésből, nekik inkább frusztráció az óra. Vannak nehézségek. Hogyan ébresszünk érdeklődést a tanulókban? Nyugodtan alszik attól, hogy nem ismeri a megoldóképletet, és érettségi után a logaritmust vagy a kör egyenletét soha nem fogja használni. Akkor most miért tanulja meg ezeket? Nagy kihívás, hogyan motiváljam az osztályt. Érdekes feladatokat kell mutatnom, kíváncsivá tenni őket, hogy várják a matekórát. Ahogy Seherezádé tette a meséivel, a szultán türelmetlenül várta a folytatást ezeregy éjszakán át. Könnyű ezt mondani.

Más úgy tanítani, ha nem a vizsga, az érettségi vagy az évvégi jó jegy a cél, hanem az, hogy feladatokat oldozgatunk, keressük a megoldást. Ekkor van idő a gondolkodásra. Szeretem az ilyen helyzetet. Nagy élmény megérteni mi történik a világban, a történések okát. Gondolkodni öröm. A matematikatanítás jelentheti ezt is. Taníthatunk képleteket, szabályokat, hogy ha így és így csinálod, akkor megoldod a feladatot. Szerintem érdekesebb azt megtanulni, hogyan találok utat a célhoz. Ez a hasznos tudás, nem a megoldóképlet ismerete. Taníthatunk így, hogy veszünk egy érdekes problémát, és szeretem azt, ha az nekem is ismeretlen. Néha a szöveg megértésén is dolgozni kell, hogy megvilágosodjon miről van szó. Sokszor ez az első fontos állomás, világossá tenni a problémát. Kérdéseket teszünk fel, kóstolgatjuk a feladatot. Utakat járunk be a feladat változataihoz, például könnyebb esetekhez. Nem adom fel. Küzdeni kell. Együtt örülünk, amikor látszik a fény az alagút végén. Én nem vagyok tolakodó, hagyom járja a saját útját, akkor is, ha tudom, hogy az zsákutca. Majd rájön a tévedésre, és visszafordul. Van úgy, hogy én is aktív vagyok, közösen keresgéljük a megoldáshoz vezető utat. Ha már megoldottuk, akkor megbeszéljük a tapasztalatokat, mi volt a nehéz ebben, mi segített a megoldáshoz. Régebben nem így tanítottam, öntöttem rájuk a trükköket, bólogattak, megértették, és ez látszott is akkor, hihető volt, de pár hét múlva alig emlékeztek rá.

Most jobban is értem azt, hogy harminc évvel ezelőtt miért nem tetszett Pintér Lajos tanár úrnak az 1000 feladat az elemi matematikából könyv kézirata, és nem vállalta a lektorálását. Ízlése szerint másképp kell a matematikát tanítani, nem így. Ilyesmi lehetett a visszautasítás oka.

(Én csak távolról ismertem Pintér Lajost, sokaktól tudom mennyire jó tanár volt. Például Csete Lajos tanár úr tudna róla mesélni.)

Szeretnénk megérteni a világot, annyi kérdés van … Hogyan viselkedünk a karanténos világban. Magunkat megfigyelni, megérteni. Válaszokat keresünk, például arra, hogy a választásokon hogyan szavazzunk. Itt vannak a kérdések, és nagyon fontos, ha tudunk jó kérdéseket megfogalmazni. Mit jelent az, hogy Bence okosabb, mint Máté? Mit jelent az, hogy megtanultam valamit, például egy verset? Vannak jó kérdések, és vannak értelmetlen, hibás kérdések.

A matematika tanítása ezekben segíthet, segítséget ad a gondolkodáshoz. Ahhoz, hogy megértsek egy helyzetet. Lássam, hogy amit egy politikus mond, az nem magyarázat egy kérdésre, hanem ködösítés. Matematikában a szavak jelentése pontos, egyértelmű. Minden háromszögben a nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik – ez világos, mindenki ugyanúgy érti. Míg egy verssort ezerféleképpen érthetünk, a hangulatunktól is függ ez.

Szerintem ez az egyik nagy haszna a matematika tanulásának, hogy a gondolkodásunk ügyesebbé válik. Keressük a miérteket, a magyarázatokat, látjuk, mikor bizonyított egy állítás. Descartes egy életen át kereste a gondolkodás szabályait, hogyan juthatunk igaznak gondolható állításokhoz. A matematika problémáin gondolkodva mi is ezt az utat járjuk.

A gondolkodásunkat tudjuk jobbá tenni. Legyen kitartásunk, küzdjünk, nem adjuk fel. Ha zsákutcában járunk, tudjuk elengedni. Legyenek kérdéseink, ötleteink a probléma vizsgálatához. Nagyon jó a közös gondolkodás, hozzá szokhatunk ehhez, megtanuljuk ennek a módjait.