EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

CSÁNYI PETRA – POZSONYI ENIKŐ – SZABÓ ZSANETT

A SZÁMELMÉLET TANÍTÁSÁNAK HATÉKONYSÁGA ÁLTALÁNOS- ÉS KÖZÉPISKOLÁBAN

Matematika tanári MA

TDK

Témavezető:

Szabó Csaba

MTA doktora, egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2014

1. Tartalomjegyzék

2. Bevezető

Kutatásunk kiindulópontja Szabó Csaba, az ELTE Algebra és Számelmélet tanszék egyetemi tanárának alábbi észrevétele volt: **az elsőéves hallgatók saját bevallásuk szerint nem ismerik a számelmélettel kapcsolatos legalapvetőbb fogalmakat sem**. Mivel ez az észrevétel csupán az órai bekiabálók véleménye alapján született, ezért kérdéses, hogy mindez csak a hangadók véleménye volt vagy a többségé. Mi ennek jártunk utána. Megnéztük, hogy ki mikor és milyen formában foglalkozik számelmélettel és hogyan kéri azt számon.

Először átnéztük az általános- és középiskolás kerettantervet, hogy kiderüljön számunkra, hogy mi az az anyagrész, amiről egyáltalán hallhattak a diákok. A kerettanterv után végignéztük a matematika érettségiket 2005-től 2014-ig. Kerestünk a témához kapcsolódó szakirodalmat is, de nem igazán találtunk idevalót. Külön számelméleti módszertani kutatásokkal viszonylag későn, és centralizáltan kezdtek foglalkozni. Elsősorban tanárjelöltek számelméleti felkészültségét vizsgálták. Annyit azért előrebocsájtunk, hogy a kanadai tanárszakon nem hangzik el a számelmélet alaptételének a bizonyítása.

A kerettanterv és az érettségik után azt vizsgáltuk meg, hogy hogyan valósul meg Magyarország iskoláiban a számelmélet témakör oktatása. Az ország különböző helyein felkerestünk és megkérdeztünk tanárokat, illetve a tanárokhoz járó diákokat arról, hogy mennyit tanítanak, illetve mennyit tudnak számelméletből. Mind a tanárokkal, mind a diákokkal interjúkat és mélyinterjúkat készítettünk. A diákokat az interjú során arra is megkértük, hogy mutassák meg nekünk azokat a matematika füzeteiket, amelyek tartalmaznak számelméleti vonatkozást.

A megkérdezett tanárok és diákok válaszai, valamint a kerettantervben meghatározott tananyag és ott előírt kompetenciák alapján összeállítottunk egy kérdőívet, amely azt méri fel, hogy ebből mit sajátítottak el a diákok. A kérdőívekkel azt próbáltuk feltérképezni, hogy mi az, ami megragad a diákokban abból, amit tanítanak nekik általános- és középiskolában. Nem azt akartuk felmérni, hogy ismerik-e a diákok a kérdésben szereplő fogalmakat és tételeket, és hogy tudják-e használni azokat, hanem azt, hogy tanították-e nekik, hallottak-e róla, feltételezhetjük-e ezek tudását. A kérdőív összeállításánál törekedtünk arra, hogy a lehető legjobban lefedjük az elemi számelmélet témakörét.

A kérdőíveket különböző városok különböző szintű iskoláinak különböző szinten álló tanulói töltötték ki. A következő hipotézisekkel álltunk neki az eredmények kiértékelésének: Arra számítottunk, hogy a 10. osztályosok tudása még friss, és jól fognak emlékezni a kérdésekben szereplő fogalmakra, tételekre és alkalmazásokra. A 12. osztályosok válaszaira azért voltunk kíváncsiak, mert ez a korosztály az érettségire készül, így a teljes középiskolai matematika tananyaggal tisztában kellene lenniük. Az előzetes felmérések alapján viszont 9. osztályban foglalkoznak utoljára ezzel az anyagrésszel, később nem, vagy csak rövid ismétlés formájában kerül elő. Ezért úgy gondoljuk, hogy a diákok 12. osztályban – az érettségire való ismétlés előtt – már nem emlékeznek a tanultakra, így az egyetemre bekerülve még inkább megkopik a számelméleti tudásuk. Az elsőéves hallgatók az egyetemi szintfelmérőn már nem emlékeznek mindenre, amit az érettségi megírásakor még tudtak. Egy nyár alatt elfelejtik a tanultakat, mert nem foglalkoznak vele. Ezek alapján a számelméletet valószínűleg már jóval korábban elfelejtik, ha 9. osztályban foglalkoznak vele utoljára. Ez egybevágna azzal, amit a hangadók mondtak az elsőéves számelmélet előadáson. Tehát az ottani hangadók a többség véleményét képviselték, és az elsőéves hallgatók valóban nem emlékeznek a számelméleti alapfogalmakra?

Ahhoz, hogy a magyarországi helyzetet és eredményeket értékelni tudjuk, szükségünk volt arra, hogy utánajárjunk: más országokban milyen követelményeket támaszt a kerettanterv erre a témakörre vonatkozóan. Megvizsgáltuk tehát néhány ország követelményrendszerét.

Az angol kerettantervben (1) hasonló kulcsszavakat találtunk, mint a magyarországiban. Meglepő azonban, hogy csak a 100-nál kisebb számokat kell tudni faktorizálni, és csak a 20-nál kisebb prímeket kell ismerni. Mindemellett követelmény a számelmélet alaptételének teljes megértése. Meggyőződésünk, hogy ezt az oximoront egy gyakorló tanár nem tudja feloldani. A középiskolás követelményben szerepel még a legnagyobb közös osztó, a legkisebb közös többszörös, a prím és a prímfelbontás kifejezések szókincsszerű használata (2). A német kerettanterv csak irányadó (3, 4, 5), de nem szerepel benne a számelmélet kifejezés. Találhatunk benne egy-két utalást az egész számok tulajdonságaira, de messze nem a klasszikus értelemben. Németországban maga a kerettanterv tartományonként más és más. Baden-Württemberg tartomány tematikájában például semmilyen számelméleti vonatkozás nincs. Ha rákeresünk a számelmélet címszóra az Amerikai Matematikatanárok Közösségének honlapján (6), akkor csupa problémamegoldó konferenciát és workshopot találunk. Az első igazán számelméletinek is nevezhető módszertani kutatási eredmény a 80-as évek végén jelent meg (Ball, 1990). Itt egy nagyobb kutatási projekt részeként bemutatják, hogy hogyan gondolkodnak a tanárjelöltek a törtek osztásának – általuk definiált – háromféle módjáról. Kiderül, hogy nem értik teljes egészében a fogalmat, ami visszavezethető a számelméleti alapok hiányosságaira.

Azért az a felismerés az USA-ban is megszületett, hogy a számelmélet sok érdekes és hasznos lehetőséget kínál számunkra. A felfedezések jól kihasználhatók problémamegoldások során, illetve amikor matematikai fogalmakat alakítunk ki, amikor a matematika szépségét vagy a szám fogalmának kialakulását szemléltetjük. (6). Ugyanitt írják, hogy a számelmélet teljes megértése nélkül a matematika mindössze tényeknek egy titokzatos gyűjteménye.

Azt, hogy a számelmélet milyen széles spektrumban tükrözi az ember matematikai gondolkodását, már több helyen kimutatták. Például prímszámok négyzetgyökének irracionalitásának megértése kapcsán vizsgálták, hogy az emberi agy mennyire fogadja be a paradoxon szerepét a bizonyításokban (Movshovitz – Hadar 1990). Hasonlóan (Leron 1985) mutatta be a konstruktivizmus lehetőségeit az indirekt bizonyítás fogalmának kapcsán (konstruktív bizonyítás indirekt módon).

A fenti kísérletek és kutatások általános iskolai tanárjelölteket céloztak meg, csakúgy, mint az eddigi legáttekintőbb felmérés (Zazkis – Campbell 1996b). Itt a tanárjelölteknek az egész számok multiplikatív struktúrájához való viszonyát vizsgálták egy kiterjedt esettanulmányban. Kimutatták, hogy az oszthatóság fogalmának – mint az osztás inverz folyamata – megértése nélkül nem lehet elsajátítani a számelmélet alapjait, és ugyanígy nem lehet végrehajtani a szokásos, algebrához történő átvezetést sem. Az osztók és az osztás kapcsolatának megértése a legtöbb tanárjelöltnél hiányzott. A kísérlet 21 alanyából 17 nem tudta eldönteni egy szám kanonikus alakjából, hogy a szám osztható-e 63-mal. A fenti kutatások abból a megállapításból indultak ki, hogy a matematika oktatása a tanárok saját tudásának fejlesztésére és elmélyítésére alapul (Steffe 1990). Egy későbbi tanulmány (Zazkis – Campbell 1996b) kimutatta, hogy ugyanez a hallgatóság nem érti, vagy nem érzékeli a számelmélet alaptételében az egyértelműség szerepét, így alkalmazni sem tudja feladatmegoldások során. A cikk következtetése meglehetősen egyszerűsített: valamit tenni kell. Az egyik okot abban vélik felfedezni, hogy a leendő tanárok nem találkoztak a számelmélet alaptételének a bizonyításával.

Sorolhatnánk az egyetemistákon végzett számelmélet tudással kapcsolatos vizsgálatokat, az olvasó számos ilyet találhat (Zazkis – Campbell 2006) gyűjteményében. Ez a válogatás az első számelmélet oktatásról szóló konferencia anyagának megjelentetett változata. A (Poranen – Pentti 2012) tanulmány finn szerzőktől egy javaslatot és egy esettanulmányt mutat be arról, hogy hogyan lehet csoportelméleti rávezetéssel tanítani a számelméletet és fordítva. Természetesen ez is már egyetemi-főiskolai szinten történik. Középiskolások körében végzett hasonló, számelméleti kutatásokról azonban nincsen tudomásunk.

3. Kerettanterv

Megnéztük, hogy mi szerepel a kerettantervben, eszerint mi mindent kellene tanulniuk a diákoknak az egyes évfolyamokon. Mivel a kerettantervek változnak, ezért kérdéses volt számunkra, hogy mikorit nézzünk. A megkérdezni, tesztelni kívánt tanulók a régi kerettanterv szerint tanulnak, tanultak, ezért azt mindenképpen tanulmányoznunk kellett. Viszont kíváncsiak voltunk arra, hogy ma mit vár el a kerettanterv a számelmélet témakör kapcsán a diákoktól, ezért a legújabbat is megnéztük. Ennél az anyagrésznél nem volt lényeges különbség a különböző években kiadott kerettantervek között.

Nem volt eltérés a négy évfolyamos gimnáziumban, illetve a szakközépiskolában tanulóktól elvárt ismeretek között sem. (10; 11) Az elvárások a hat- és nyolcosztályos gimnáziumok tanulóival szemben is hasonlóak, csupán a tananyag elosztása más a különböző évfolyamok között. (8; 9)

A továbbiakban a 2012-es kerettanterv alapján írjuk le részletesen, – általános iskolásokra (12) és négy évfolyamos gimnazistákra (10) vonatkozó mellékletek szerint, – hogy mit kell tanulniuk a tanulóknak számelméletből az egyes évfolyamokon.

3.1. 5-8. osztály

5-6. évfolyamon a számtan, algebra témakörnél előzetes tudásként vannak feltüntetve a páros és páratlan számok, valamint a kerettanterv építkezik a többszörös, az osztó és a maradék fogalmak biztos tudására.

Ebben a blokkban a számelmélet témakörét érintő tanulási célok az 1. táblázatban olvashatók. A kerettanterv tartalmazza a következőket: az osztó, többszörös fogalmának elmélyítése, két szám közös osztóinak kiválasztása az összes osztóból, a legkisebb pozitív közös többszörös megkeresése, számolási készség fejlesztése (fejben), illetve a bizonyítási igény felkeltése. Részben vagy teljesen új ebben a témában az egyszerű oszthatósági szabályok ismerete (2-vel, 3-mal, 5-tel, 9-cel, 10-zel, 100-zal), illetve két szám közös osztóinak és közös többszöröseinek meghatározása és az osztók, többszörösök alkalmazása törtek egyszerűsítése, bővítése során.

Ismeretek	**Fejlesztési követelmények**	**Kapcsolódási pontok**
Szorzás, osztás 10-zel, 100-zal, 1000-rel.	A műveletfogalom mélyítése. A számolási készség fejlesztése gyakorlati feladatokon keresztül.	
Egyszerű oszthatósági szabályok (2-vel, 3-mal, 5-tel, 9-cel, 10-zel, 100-zal). Két szám közös osztói, közös többszörösei.	Az osztó, többszörös fogalmának elmélyítése. Két szám közös osztóinak kiválasztása az összes osztóból. A legkisebb pozitív közös többszörös megkeresése. Számolási készség fejlesztése szóban (fejben). A bizonyítási igény felkeltése.	Testnevelés: csapatok összeállítása.
Osztó, többszörös alkalmazása.	A tanult ismeretek felhasználása a törtek egyszerűsítése, bővítése során. Számolási készség fejlesztése.	

1. táblázat: Részlet a kerettantervből (5-6. osztály) (12)

7-8. évfolyamon – ahogy a 2. táblázatban is látható – új anyag a prímszám, az összetett szám fogalma, a prímtényezős felbontás. A kerettanterv lehetőséget ad a matematikatörténettel való ismerkedésre is. Érdekességeket említhetünk meg a prímszámok, tökéletes számok, és barátságos számok köréből. (Ezen a ponton megjegyezhetjük, hogy a számelmélettel foglalkozó emberek érthetetlenül állnak az előtt, hogy a Goldbach-sejtés és az ikerprím-sejtés helyett miért a barátságos számok kaptak helyet a tantervben.) Az oszthatósági szabályok mellett előkerülhetnek számelmélet alapú játékok is. A tanulás célja a korábban tanult és az új ismeretek közötti kapcsolat felismerése, oszthatósági szabályok alkalmazása a törtekkel való műveletek elvégzésekor, két szám legnagyobb közös osztójának és legkisebb közös többszörösének megtalálása a közös osztókból illetve közös többszörösökből. A témakör kiválóan alkalmas a bizonyítási igény felkeltésére, ráadásul az oszthatósági szabályok kapcsán több könnyen megérthető bizonyítást is megismerhetnek a gyerekek.

Ismeretek	Fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
Prímszám, összetett szám. Prímtényezős felbontás. Matematikatörténet: érdekességek a prímszámok köréből.	A korábban tanult ismeretek és az új ismeretek közötti összefüggések felismerése.	
Oszthatósági szabályok. Számelméleti alapú játékok. Matematikatörténet: tökéletes számok, barátságos számok. Legnagyobb közös osztó, legkisebb pozitív közös többszörös.	A tanult ismeretek felelevenítése. Oszthatósági szabályok alkalmazása a törtekkel való műveleteknél. A bizonyítási igény felkeltése oszthatósági feladatoknál. Két szám legnagyobb közös osztójának kiválasztása az összes osztóból. A legkisebb pozitív közös többszörös megkeresése a közös többszörösök közül.	

2. táblázat: Részlet a kerettantervből (7-8. osztály) (12)

3.2. 9-12. osztály

„A gyerekek szívesen játszanak maradékos osztáson, oszthatósági szabályokon alapuló számjátékokat. (...) Nyerni akarnak, ezért természetes módon elemezni kezdik a szabályokat, lehetőségeket. Olyan következtetésekre jutnak, olyan elemzéseket végeznek, amilyeneket hagyományos feladatokkal nem tudnánk elérni." (10)

9. osztályba (kerettanterv szerint, ahogy a 3. táblázat is mutatja) úgy érkeznek a diákok, hogy tisztában vannak a prímszám, összetett szám fogalmával, és tudják az oszthatósági szabályokat. A **9-10. osztály**ban számelméletből tanulandó ismeretek alig haladják meg az általános iskolás szintet, amint azt a 4. táblázat is mutatja. Amivel ilyenkor találkoznak a gyerekek, azok a korábban már tanult oszthatósági szabályok, újakkal kibővítve az 5-6. osztályos listát és a prímtényezős felbontás, legkisebb közös többszörös, illetve legnagyobb közös osztó fogalmak. Az eddigiekhez képest teljesen új a relatív prímség fogalma. Ezek mellett esetleg kiegészítésként elhangozhatnak matematikatörténeti érdekességek, valamint az, hogy végtelen sok prímszám létezik.

Ebben a blokkban követelmény, hogy a tanult oszthatósági szabályok rendszerezve legyenek, a prímtényezős felbontás segítségével tudjanak a gyerekek legnagyobb közös osztót és legkisebb közös többszöröst számolni, valamint, hogy egyszerű oszthatósági feladatokat és szöveges feladatokat meg tudjanak oldani. Fejlesztési követelmény még a gondolatmenet követése, illetve egyszerű gondolatmenet megfordítása. Ebben a korosztályban tananyag a különböző számrendszerek megismerése, illetve számrendszerek egyenértékűségének belátása, kiemelt figyelmet fordítva a kettes számrendszerre, esetleg megemlítve Neumann János nevét.

Tematikai egység/ Fejlesztési cél	2. Számtan, algebra	Órakeret 66 óra
Előzetes tudás	Számolás racionális számkörben. Prímszám, összetett szám, oszthatósági szabályok. Hatványjelölés. Egyszerű algebrai kifejezések ismerete, zárójel használata. Egyenlet, egyenlet megoldása. Egyenlőtlenség. Egyszerű szöveg alapján egyenlet felírása (modell alkotása), megoldása, ellenőrzése.	
A tematikai egység nevelési-fejlesztési céljai	Tájékozódás a világ mennyiségi viszonyaiban, tapasztalatszerzés. Problémakezelés és -megoldás. Algebrai kifejezések biztonságos ismerete, kezelése. Szabályok betartása, tanultak alkalmazása. Első- és másodfokú egyenletek, egyenletrendszerek megoldási módszerei, a megoldási módszer önálló kiválasztási képességének kialakítása. Gyakorlati problémák matematikai modelljének felállítása, a modell hatókörének vizsgálata, a kapott eredmény összevetése a valósággal; ellenőrzés fontossága. A problémához illő számítási mód kiválasztása, eredmény kerekítése a tartalomnak megfelelően. Alkotás öntevékenyen, saját tervek szerint; alkotás adott feltételeknek megfelelően; átstrukturálás. Számológép használata.	

3. táblázat: Részlet a kerettantervből (10)

Ismeretek	Fejlesztési követelmények	Kapcsolódási pontok
Számelmélet elemei. A tanult oszthatósági szabályok. Prímtényezős felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös. Relatív prímek. *Matematikatörténeti és számelméleti érdekességek*: (pl. végtelen sok prímszám létezik, tökéletes számok, barátságos számok, Eukleidész. Mersenne, Euler, Fermat)	A tanult oszthatósági szabályok rendszerezése. Prímtényezős felbontás, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös meghatározása a felbontás segítségével. Egyszerű oszthatósági feladatok, szöveges feladatok megoldása. Gondolatmenet követése, egyszerű gondolatmenet megfordítása. Érvelés.	
Különböző számrendszerek. A helyiértékes írásmód lényege. Kettes számrendszer. *Matematikatörténet:* Neumann János.	A különböző számrendszerek egyenértékűségének belátása.	*Informatika:* kommunikáció ember és gép között, adattárolás egységei.

4. táblázat: Részlet a kerettantervből (9-10. osztály) (10)

A kerettantervben a **11-12. évfolyam**okon számelmélethez kapcsolódóan nincs kitűzött anyagrész.

Ezek szerint a kerettanterv sokat vár el a számelmélettől. Nem csak a száraz anyag ismertetését tűzi ki célul, hanem a gondolkodás és a kompetencia fejlesztését is (pl.: igény a stratégiák kiépítésére, bizonyítási igény).

A kerettanterv bizonyos részei egyéni ízlést tükröznek, a nem kötelező részeket választási lehetőségként tüntetik fel. Az általunk megkérdezett tanárok elsősorban a frappánsan megfogalmazható, közismert fogalmakon alapuló, érdeklődést felkeltő sejtéseket, problémákat helyezték előtérbe, ám a barátságos számokat egyikük sem említette.

4. Tanárokkal készített interjúk

A kerettanterv tanulmányozása után kíváncsiak voltunk arra, hogy a valóságban mit tanítanak számelméletből a középiskolákban. Ehhez azt tartottuk a legcélravezetőbbnek, ha először ismerős, majd később ismeretlen tanárokat kérdezünk meg arról, hogy ők hogyan tárgyalják a számelméletet az óráikon. Első körben három vidéki (Kaposvári Egyetem Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, Kaposvár; Kazinczy Ferenc Gimnázium, Győr; Magyar László Gimnázium, Dunaföldvár) és három budapesti iskola (Babits Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Újpest; Nagy László Általános Iskola és Gimnázium, Pesterzsébet; Városmajori Gimnázium és Kós Károly Általános Iskola, Budapest; Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest) tíz tanárával beszélgettünk. Személy szerint: Bakos Csilla, Borbényi Andor, Kiszliné Kristofics Szilvia, Kósa Eszter, Marton Sándor, Nagy Ágota, Nikházy Lászlóné, Orosz Gyula, Rostási Nándor és Szabó Szabolcs válaszolt kérdéseinkre. A feltett kérdések az 1. mellékletben találhatóak.

Alapjában kétféle válasz érkezett. Ez a két irány annyira egyértelmű és szétválasztható volt, hogy rájöttünk, hogy várhatóan minden tanár e két válasz valamelyikét adná. A válaszok közötti fő különbség a tárgyalt anyag mennyisége és minősége volt. A tanárok egyik csoportja rendkívül fontosnak tartja a számelméletet és nagy hangsúlyt fordít e tananyag részletes tanítására. A másik csoport ezzel szemben nem amiatt különül el, hogy a megkérdezett tanárok szerint a számelmélet egyáltalán nem fontos. Hanem amiatt, hogy ők kevesebb időt fordítanak az oktatására és az órákon csak az alapokkal foglalkoznak. Volt olyan tanár, aki azt mondta, hogy a számelmélet anyag alapjaival foglalkoznak már általános iskolában is, ami elegendő ismeret a diákok számára az érettségihez. Ezért ha időhiány miatt valamit le kell rövidíteni vagy el kell hagyni a tananyagból, akkor a számelmélet lesz az a témakör.

Elsőként arra voltunk kíváncsiak, hogy a megkérdezett tanárok mikor és hány órában foglalkoznak ezzel a témakörrel. Az interjúkból kiderült, hogy 7-8. osztályban átlagosan négy-öt és 9. osztályban is négy-öt órát tanítanak számelméletet. Egyetlen tanár említette meg azt, hogy a 12. osztályos ismétlésnél is elővesz ezt a témát. A többi helyen csak fakultáción és szakkörön szerepel a felsőbb évfolyamokon.

Beszélgetésünk során kitértünk arra is, hogy ki milyen tankönyvekből tanít. Alapvetően mindenki a Mozaik tankönyvet használja, de a tanárok többsége más könyvekből és feladatgyűjteményekből is válogat feladatokat.

Az interjúk nagy részét a témakör részletezése tette ki. Tájékozódni szerettünk volna arról, hogy ki mit tanít számelméletből a különböző évfolyamokon. Először a kerettantervben található ismeretekre, majd a típusfeladatokra kérdeztünk rá.

Természetesen a kerettantervben meghatározottakra mindenki azt a választ adta, hogy tanította. Az oszthatóság, a relatív prím, a legnagyobb közös osztó, a legkisebb közös többszörös fogalma, az oszthatósági szabályok, az egyszerű oszthatósági feladatok és a prímtényezős felbontás mind szerepel általános iskolában. Így az alapfogalmak nagy részével már ekkor találkoznak a diákok.

A kerettanterv matematikatörténeti kiegészítést és számelméleti érdekességeket is említ. Az ezek említésével kapcsolatos kérdésekre már különböző válaszok születtek. Például azt, hogy végtelen sok prím van, azt mindenki megemlíti az órán, néhány iskolában még a bizonyítás is előfordul. Viszont a tökéletes számokról, a barátságos számokról és híres matematikusokról (Eukleidész, Mersenne, Euler, Fermat) már kevesebben beszélnek.

Ezeken kívül rákérdeztünk konkrét típusfeladatokra, fogalmakra is. A válaszok három csoportba sorolhatók:

1. mindenhol előfordultak
2. ritkábban, vagy csak fakultáción fordultak elő
3. inkább nem fordultak elő

Az 1. csoportba azokat a feladatokat soroltuk, amelyekre szinte mindenki azt mondta, hogy foglalkoznak vele alapórán. Ide tartoznak a következők:

- az osztók számának meghatározása a prímtényezős felbontásból
- olyan törtes feladatok, melynek célja a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös alkalmazásának gyakorlása
- pl.: $\frac{1}{8100}-\frac{1}{16632}$ kiszámolása vagy $\frac{756}{792}$ egyszerűsítése

  Ezzel általában már 6. osztályban találkoznak a gyerekek, így a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös fogalmával is.
- számelmélethez (főleg legkisebb közös többszöröshöz) kapcsolódó szöveges feladatok
- a két leggyakoribb feladat a menetrendekkel, illetve a villanyoszlopokkal kapcsolatos feladat

- a számelmélet alaptétele mindenkinél szerepel, és egy tanár kivételével mindenki névvel együtt említi
- a következő típusú feladat: $3|\overline{54x23}$, ahol x lehetséges értékeit keressük egy kivételével mindenhol előfordult alapórán 7. osztálytól kezdve egyre bonyolultabb formában
- ez szintén igaz a következőre: $5|2a + 3b \Rightarrow 5|16a + 9b$
- az olyan típusú feladat, mint a $(b, 270) = 45$, ahol a b lehetséges értékeit keressük már kicsit megosztóbb volt, ezt a típust nem mindenki gyakorolja

A 2. csoportot azok a feladatok alkotják, amelyek nem minden alapórán fordulnak elő, több helyen csak fakultáción, szakkörön foglalkoznak velük. Ezek azok a feladatok, amelyek megosztják a tanárokat a fent említett két irányba.

- $\frac{3n+10}{n+1}$ mely n egészekre lesz egész?
- $4|11 \dots 1 - 55 \dots 5$?
- $3|n^3 - n!$?
- Milyen maradékot ad…? típusú feladat

A 3. csoportba azokat a típusokat soroltuk, amelyek csak egy-két tanárnál fordultak elő alapórán, és inkább fakultáción, szakkörön jelennek meg, vagy ott sem.

- a prímszámok végtelenségének bizonyítása
- a teljes indukció és az indirekt bizonyítás megjelenése a számelmélet témakörénél
- az eddigiektől különböző, más típusú feladat
- versenyfeladatok

Az interjú lezárásaként megkérdeztük a tanárok véleményét arról, hogy fontosnak tartják-e a számelmélet tanítását, vagy az erre szánt időt inkább mással töltenék-e ki. A válaszok szerint jórészt egybehangzóan fontosnak tartják. A következőket mondták:

„Igen fontos. Alapórán a legfontosabb szabályokat, értelmezéseket vesszük, ami szükséges a következő tananyaghoz. Például az algebrai törtekkel végzett műveletekhez tudni kell a számoknál tanult módszereket (legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös). Részletesebben a fakultáción foglalkozunk ezzel a témakörrel.”

„Igen, mert fejleszti a gondolkodást.”

„Igen, mindent kell tudni belőle.”

„Igen fontos, az egyik legfontosabb. Például az oszthatósági szabályokat mindig kikérdezem, mert ennek a korosztálynak nem engedem a számológép használatát az órákon. Ez nagyon nagy segítség ahhoz, hogy biztonsággal tudjanak számolni."

5. Diákok füzetei

A középiskolai tanárokon kívül diákokkal is beszélgettünk, arról, hogy mit tanultak számelméletből. A beszélgetések során megkértük őket, hogy mutassák meg matematikafüzeteiket is. A megkérdezett diákok mindegyike azt mondta, hogy a számelmélet témakörét főleg 9. osztályban és felső tagozatban tanulta. Ezeket a füzetrészeket is összegyűjtöttük és áttanulmányoztuk, hogy pontosabb képet kapjuk arról, hogy a különböző iskolákban hogyan tanítják ezt a témakört.

Ezeket a füzeteket az ország különböző helyeiről kértük el, így Budapestről, Kaposvárról, Zalaegerszegről, Dunaföldvárról, Szekszárdról, Siófokról, Bajáról, Győrből és Kiskunfélegyházáról is kaptunk füzeteket. A tanulók iskolái között volt gimnázium, szakközépiskola és általános iskola is. A füzetek átnézésekor nem tettünk különbséget a későbbi fakultációs, tagozatos, illetve a matematikát alap óraszámban tanuló diákok jegyzetei között, mert elsősorban a 7-8-9. osztályos füzeteket néztük, és ott még nincs ilyen különbség.

A legalapvetőbb fogalmak minden füzetben szerepeltek, mégis jelentős eltérés volt a különböző iskolákból elkért füzetek között a témakör tárgyalásának mélységét, illetve az arra fordított időt tekintve. A továbbiakban két példát szeretnénk kiemelni, amelyek jól tükrözik a különböző iskolák közötti különbséget a számelmélet oktatásában.

5.1. Egy hatosztályos gimnazista füzetének számelméleti vonatkozásai

Az egyik megkérdezett diák a dunaföldvári hatosztályos gimnázium tanulója. A gimnázium alatt használt füzetei közül a 7., a 8. és a 9. osztályosban találtunk számelmélettel kapcsolatos anyagrészeket.

Az első számelméleti rész a **7. osztály**os füzete elején található. A hatványazonosságok és a normálalak után, a törtműveletek előtt tanulták a témakört öt órában. Elsőként az osztó és a többszörös pontos definíciójával ismerkedtek meg, majd a különböző oszthatósági szabályokkal foglalkoztak. Az összes fontos oszthatósági szabály szerepel a tanultak közt: 2, 5, 10, 4, 25, 8, 125, 3, 9 és még a 11 is. Ezenkívül néhány összetett szám – így például a 6 és a 15 – oszthatóságára is adtak szabályt. A szabályok alkalmazását rögtön egy összetett feladattal szemléltette a tanár:

„Egészíts ki: $15|432\square 5\Delta$*”*

Definiálták a prímszámot is a következőképpen: *„Minden olyan természetes szám, amelynek csak két osztója van: az egy és önmaga.”* Ezek után az összetett szám definíciója a következő: *„a többi természetes szám”*. Szemléltetésképp Eratoszthenészi-szitát is készítettek 1-től 35-ig. Majd felírták, hogy az egy nem prím, a kettő pedig az egyetlen páros prím. Itt kicsit megtévesztő lehet az összetett szám fogalma, hiszen ez alapján az egyet az összetett számok közé sorolhatnánk.

Kimondták még azt is, hogy minden szám felbontható prímek szorzatára, de nem nevezték meg a tételt. Gyakorolták a prímtényezős felbontást és a fentihez hasonló oszthatósági szabályok alkalmazását. A számelméletet megelőző témakörhöz kapcsolódó, hatványazonosságokat alkalmazó feladatokat is megoldottak. Például:

„Egyszerűsítsd a következőt: $\frac{72^3\cdot 54^2}{108^4}$*”*

A következő óra a közös osztókról és a közös többszörösökről szólt. Először példán keresztül ismerkedtek ezekkel a fogalmakkal. Felírták két szám prímtényezős felbontását, majd az osztóit, és bekarikázták a közöseket. Ezek után kimondták, hogy mi a legnagyobb közös osztó. Érdekes az, hogy a definíció után rögtön kezükbe adta a tanár a lépéssorozatot a legnagyobb közös osztó kiszámítására.

„Két vagy több természetes szám legnagyobb közös osztóját úgy is megkaphatjuk, hogy:

1. *a számokat felbontjuk prímtényezőkre*
2. *vesszük azokat a prímtényezőket, amelyek mindegyikben benne vannak (közös)*
3. *az azonosak közül mindig a kisebbik kitevőjűt választjuk (nem nagyobb)*
4. *és a hatványokat összeszorozzuk”*

Majd gyakorlásképpen két ehhez kapcsolódó példát oldottak meg. Felírták, hogy a legnagyobb közös osztót legtöbbször a törtek egyszerűsítésénél használjuk, és erre is néztek két példát és néhány házi feladatot. Például:

„Add meg a (72,108) és a (840,1800) értékét!”

„Egyszerűsítsd a törteket egy lépésben: $\frac{36}{96}, \frac{1840}{3400}$*”*

Azért tartjuk érdekesnek ezt a részt, mert itt kezdődik minden. Mégpedig az, hogy a diákok kapnak a kezükbe egy algoritmust, amelyet begyakorolnak és alkalmaznak, anélkül, hogy értenék azt. Elég sok gyakorlással a mechanizmus rögzül és automatikussá válik. Viszont ez az állapot csak addig marad fent, amíg rendszeresen ismétlik, gyakorolják. Ez pedig azt jelenti, hogy ha a diák nem érti, hanem csak lépések sorozata segítségével számolja ki a legnagyobb közös osztót, akkor rendszeres ismétlés nélkül elhalványul a tudása és csak hiányosan, pontatlanul tudja felidézni ezeket a lépéseket. Így a közös osztó felírása már nem lesz helyes, ennek eredményeképp az alkalmazását, használatát inkább kikerüli. A legnagyobb közös osztó számolási módja így nem épül be a megfelelő sémába, így nem válik hosszútávon alkalmazható tudássá. (Knausz 2001, 13)

A következő órán a legkisebb közös többszöröst hasonlóképpen vezették be. Egy példában két szám többszöröseit írták fel, majd kiválasztották a legkisebb közöset. Ezután rögtön algoritmus következett, majd ennek gyakorlása. A gyakorlás után felírták az összefüggést, miszerint két vagy több szám legkisebb közös többszörösének és legnagyobb közös osztójának szorzata megegyezik a két vagy több szám szorzatával. Szerepelt az is, hogy a legkisebb közös többszöröst a törtek összevonásánál a nevező keresésénél használjuk. Ezt rögtön egy példával szemléltették: „$\frac{4}{45} - \frac{7}{150} = \frac{40-21}{450} = \frac{19}{450}$”

A következő definíció a relatív prímek fogalma volt. Ezt kimondták, de utána a törtek összeadását, kivonását és a közös osztókat, többszöröseket gyakorolták jó sok példán keresztül.

A témakört gyakorlással zárták le. Az eddig mutatott feladatokhoz hasonlóakat oldottak meg újra. Az egyetlen újdonság a következő szöveges példa volt a legnagyobb közös osztó gyakorlására:

„A kalózok zsákmánya 48 db tál, 712 db kehely és 100 db gyöngy volt. Hányan lehettek maximum, ha úgy osztották el a tárgyakat, hogy mindenki mindegyikből azonosan részesedjen?”

Legközelebb a **8. évfolyam**on, a tanév elején a hatványazonosság témakör után került elő ismét a számelmélet. Ekkor egy tanórát fordítottak rá, amelyben kicsit ismételték a 7. osztályban tanultakat. Ismét előkerült az osztó, a többszörös pontos fogalma és az Eratoszthenészi-szita is 32-ig. Ekkor az összetett szám fogalmát már pontosan mondták ki. A számelmélet alaptételét újra leírták, és most már nevet is adtak neki: az aritmetika alaptételeként emlegették.

A legkisebb közös többszörös fogalmát és kiszámolásának lépéseit is átismételték, és egy példán szemléltették. Ezek után mással nem foglalkoztak a témakör kapcsán, még a legnagyobb közös osztóval sem, helyette inkább a normálalak átismétlésébe kezdtek.

A füzet tanúsága szerint 8. osztályban később nem foglalkoztak számelmélettel vagy számelméleti vonatkozással. Legközelebb a 9. osztályosban találkoztak ezzel a témakörrel.

A **9. évfolyam**on a halmazműveletekkel kezdték matematika tanulmányaikat, majd a kombinatorikával folytatták. Mindkét témakörben előkerültek számelméleti alapfogalmak is. Például a halmazműveletek gyakorlásakor az egyik halmaz elemei a tíznél kisebb pozitív páros számok, a másik halmaz elemei pedig az egyjegyű prímszámok voltak. Kombinatorikánál például a következő feladatot is megoldották: *„Hány hattal osztható hatjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3, 4 és 5 számjegyekből?”*

Konkrétan a számelmélet témaköre a félév második felében a statisztika, hatványozás és számrendszerek után került elő náluk. Ekkor két tanórán keresztül ismételték át a tanultakat. Az alapfogalmakat ismét leírták, és néhány példán keresztül gyakorolták őket. Ekkor már néhány szöveges feladatot is megoldottak, például a következőeket:

1. *„Az egyik buszjárat 30 percenkét, a másik 25 percenként indul. Ha 6 órakor indulnak egyszerre, akkor 12 óráig hányszor találkoznak?”*
2. *„Az út egyik oldalán villanyoszlopok, a másikon fák vannak. A fák 60, az oszlopok 35 méterenként követik egymást. Ahol állunk pont szemben áll egymással egy fa és egy oszlop. Mennyit kell sétálni a következő szembenállásig?”*

Ez az a két típusfeladat – a menetrend és a villanyoszlopok – az, amelyek minden általunk megnézett füzetben előkerülnek. Több helyen, mint ahogy ebben az esetben is csak ez a két típus fordult elő a legkisebb közös többszörös gyakorlására, alkalmazására. Ezzel kapcsolatosan felmerült bennünk a kérdés: a tanárok nem ismernek más szöveges feladatot a legkisebb közös többszörös gyakorlására, vagy pont a közismertségük miatt választják ezeket?

Újdonságként kerültek elő a 9. osztályos füzetben az oszthatóság tulajdonságai. Összesen hét tulajdonságot fogalmaztak meg, de ezekkel kapcsolatos feladatot nem oldottak meg később. A számelmélet témakörének tárgyalása ezen az évfolyamon azzal fejeződött be, hogy az algebra és számelmélet témazáró dolgozatra való készüléskor még gyakoroltak egy-egy példát a törtek egyszerűsítésével, összeadásával, a legkisebb közös többszörössel és a legnagyobb közös osztóval kapcsolatban.

A későbbiekben, **10. és 11. évfolyam**on egyáltalán nem szerepelt számelmélet, viszont **12. osztály**ban az összefoglaláskor egy kis időre előkerült. Konkrétan számelméleti példa csupán egy szerepelt a próba érettségire való felkészüléskor. Ott két szám legkisebb közös többszörösét és a legnagyobb közös osztóját határozták meg. Ezen kívül előkerültek számelméleti fogalmak, illetve oszthatósági szabályok a kombinatorika, halmazműveletek és logika ismétlésekor. Például:

„Két dobókockával dobva mennyi a valószínűsége, hogy

- *a dobott számok szorzata kisebb, mint 10?*
- *összegük páros?*
- *egymás mellé leírva négyzetszám?*
- *szorzatuk osztható 4-gyel?"*

A szükséges és elégséges feltétel gyakorlásakor számelméletet is alkalmaztak a szemléltetésre. Például a következő feladatnál:

„Egy szám osztható 12-vel

- *szükséges: 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 6-tal osztható*
- *szükséges+elégséges: 3-mal és 4-gyel osztható*
- *elégséges: 24-gyel, 48-cal stb. osztható*
- *nem szükséges, nem elégséges: pl. 5-tel osztható"*

Látható, hogy a számelméletet be lehet és be is építik néhol más témakörökbe. Itt viszont leszűkül a számelmélet: az oszthatósági szabályokra és a prímszám fogalmára. Csak ezek azok a számelméleti fogalmak, amik felbukkannak más témakörökben.

5.2. Egy négy évfolyamos szakközépiskolás füzetének számelméleti vonatkozásai

A másik példa, amit szeretnénk bemutatni, egy paksi szakközépiskola négy évfolyamos környezetvédelmi-vízgazdálkodási képzésén tanult diák füzeteinek a számelméleti vonatkozása.

Náluk **9. évfolyam**on a tanév második felében került elő először a számelmélet témaköre a hatványazonosságok után és a függvények előtt. Ekkor négy tanórán keresztül foglalkoztak vele. A tanár rögtön belevágott a témába, mert feltételezte azt, hogy már kellő alapokkal rendelkeznek ebből a témakörből, hiszen a legalapvetőbb fogalmakat általános iskolában már tanulták. Példafeladatokkal kezdték a témakört, – így a tanár felmérhette, hogy mi az, amire valóban emlékeznek is a tanulók, – utána a tételek kimondása következett, majd nehezebb feladatok megoldásával foglalkoztak.

Az oszthatóság, prímszám, összetett szám pontos definíciójának házi feladatként kellett utána nézniük. Az órán gyors ismétléssel kezdtek. Először az oszthatóság fogalmát ismételték át példákkal szemléltetve a következőképp: „$7|21,\ mert\ 3 \in \mathbb{Z}\ és\ 7 \cdot 3 = 21$". Látható, hogy nem általánosítva, hanem példával, de nagyon részletesen fejtették ki a definíciót.

Külön foglalkoztak a nulla oszthatóságával, mint relációval, és a nullával való osztás értelmezésével, mint művelettel, majd felírták egy szám pozitív és valódi osztóit.

Leírták még a prímeket 29-ig, de a prímszám definícióját nem. Azt viszont igen, hogy végtelen sok van belőlük. Foglalkoztak még azzal, hogy az egy se nem prím, se nem összetett szám. Ezek után írtak egy példát prímtényezős felbontásra, és csak ezt követően mondták ki a számelmélet alaptételét: *„bármely összetett szám felbontható prímszámok szorzatára"*. Az oszthatósági szabályok kapcsán pedig csak azt írták le, hogy hol tudnak utánanézni a tankönyvben.

Ezek után feladatok megoldásába kezdtek, az egyik feladat kapcsán pedig mégis leírták az összetett szám pontos definícióját. Az első feladatok az oszthatósági szabályok gyakorlására irányultak, valamint az összetett szám és a prím fogalma köré csoportosultak. A gyakorlás teljesen más volt, mint a korábban leírt gimnazista füzetében. Egyrészt sokkal több feladatot oldottak meg, másrészt itt csak három példát oldottak meg a milyen x-re lesz hárommal osztható a $\overline{72x352}$ típusú feladatra. Helyette gondolkodtató példák jelentek meg, amelyek megoldásához ugyanazokra az ismeretekre volt szükségük, de így itt nem mindig ugyanaz a séma jelent meg. Ilyen feladatok voltak például a következők:

- „$6|10^{10}+14?$"
- „$8|(2\mathrm{k}+1)^2-1, \mathrm{ha\ k} \in \mathbb{Z}?$"

Ezután arról tanultak, hogy hogyan állapítsák meg az osztók számát a szám prímtényezős felbontásából. Ezt részletesen, magyarázattal kiegészítve, több példán keresztül szemléltették.

Ezt követően a legnagyobb közös osztóval és legkisebb közös többszörössel foglalkoztak egyszerre. A kiszámolásuk lépéseit pár szóban összefoglalva írták le, majd rögtön gyakorolták törtek egyszerűsítésén, összeadásán keresztül és ezek kiszámolására irányuló direkt feladatokban. Felírták azt is, hogy e kettő szorzata megegyezik a két szám szorzatával, majd egy szöveges példát is megoldottak a legkisebb közös többszörössel kapcsolatosan. Ezzel fejezték be ezt a témakört, és a számrendszerekkel kezdtek foglalkozni.

Az összefoglalásnál ismét gyakorolták a számelméleti alapfogalmakat két tanórán keresztül. Ezen a két órán hasonló feladatokat oldottak meg, mint az eddigiekben. Megjelentek a korábban említett menetrendhez, illetve fához-villanyoszlophoz kapcsolódó szöveges feladatok is.

A tanuló füzeteiben a későbbiekben már nem kerültek elő számelmélethez köthető feladatok 9. osztályban.

Mint ahogy már említettük, elég sokszínű volt a számelmélet témakör tanítása a különböző városokban, iskolákban. Volt, ahol csak az alapokat vették, csupán annyit, amennyi az érettségire szükséges a diákoknak. Viszont volt, ahol bővebben tanulták ezt az anyagrészt és nehezebb, gondolkodtató feladatokat is megoldottak. Érdekes kérdés még az, hogy a számelmélet témakörének tanításán kívül hol bukkan még fel ez a téma. Ez is meglehetősen különböző volt a különböző iskolákból származó füzetekben, de az általános tapasztalat az volt, hogy csak a logikánál, a halmazműveleteknél, a kombinatorikánál és a valószínűség-számításnál kerülnek elő számelmélettel kapcsolatos fogalmak, de általában ezek se mutatnak túl az oszthatósági szabályokon, a prímszámokon és a páros számokon. Fakultációs órákon több helyen kerülnek még elő további számelmélettel kapcsolatos feladatok. Például a következő típusú feladat, ahol a szám osztóit kell meghatározni a feladatmegoldáskor: *„Mely egész* x*-ekre lesz az* $\frac{x-2}{x+5}$ *is egész?"*

Alapórán ilyen jellegű feladat csak ritkán fordul elő. Az általános tapasztalat az volt, hogy a számelmélet alapfogalmait mindenhol megtanítják, és 9. osztályban még tudják is azokat a diákok, általában – a megkérdezett tanárok elmondása alapján – jó dolgozatokat írnak a tanulók ebből az anyagrészből. Az átnézett füzetekben legalább négy órát foglalkoztak számelmélettel, és a kerettantervben meghatározott követelményeket teljesítették. A kérdés továbbra is az, hogy miért nem emlékeznek rá később, ha tanulták a témakört és jó dolgozatokat írtak belőle.

6. Érettségik

A kerettanterv után végignéztük az összes matematika érettségit 2005-től 2014-ig. Meglepődve tapasztaltuk, hogy alig találtunk a feladatsorokban számelmélet feladatot. Ha előfordult, akkor is mindössze egy-két pontért.

Elsőként a középszintű feladatsorokat tárgyaljuk. Szeretnénk összefoglalni azt, hogy az eddigi érettségi feladatokban milyen számelmélethez kapcsolódó tudásra kérdeztek rá, milyen formában és mindezt hány pontért. A teljes feladatszövegek a 2. mellékletben találhatóak.

A számelmélet témakör többféleképpen is előkerül a középszintű érettségiben. Az egyik előfordulás az, amikor egyszerű számelmélet feladatról beszélhetünk.

Például: 2009. május: (7)

8.) Írja fel 24 és 80 legkisebb közös többszörösét! (2 pont)

Ilyen feladatból csupán kilenc található az elmúlt tíz év 23 érettségi feladatsorában általában 2 pontért. Ezek a feladatok a prímtényezős felbontással, a legkisebb közös többszörössel, a legnagyobb közös osztóval, az osztók meghatározásával vagy az oszthatósági szabályok alkalmazásaival kapcsolatosak.

Találkoztunk összetettebb, több anyagrészt összekapcsoló feladatokkal is.

Például: 2010. október: (7)

8.) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!

I. Minden prímszám páratlan.

II. Létezik páratlan prímszám.

III. Minden egész szám racionális szám.

IV. Van olyan irracionális szám, amelyik felírható két egész szám hányadosaként. (1-1-1-1 pont)

Ilyen jellegű feladatból összesen négy található az eddigi érettségi feladatsorokban. Közülünk három 2 pontért, egy pedig 4 pontért. Ezek a feladatok a prím fogalmára vagy egy oszthatósági szabály alkalmazására kérdeznek rá.

Ezeken kívül beszélhetünk még olyan érettségi feladatokról is, amelyek más matematikai témakörhöz tartoznak, ám vannak számelméleti vonatkozásai. Ez háromféleképp fordult elő az eddigi érettségikben: kombinatorika, valószínűség-számítás vagy halmazműveletekkel kapcsolatos feladat formájában. Ezek valamelyik oszthatósági szabály alkalmazására kérdeztek rá.

Például: 2011. október: (7)

17. b) Hány 4-gyel osztható hétjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből?

Az átnézett huszonhárom érettségi feladatsorban tíz feladat volt, melyben rákérdeztek az oszthatósági szabályok alkalmazására, két olyan volt, amelyben a prím fogalma került elő és egy, amelyben az osztók meghatározása volt a feladat. Ezeknél a feladatoknál nem lenne értelme a pontszámot felidézni, hiszen a hangsúly a kombinatorikán, a valószínűség-számításon vagy halmazműveleteken volt. A számelmélet csak kiegészítette, színesítette és összetettebbé tette az adott feladatot.

Összefoglalva tehát elmondhatjuk, hogy középszintű érettségin nagyon kevés feladat szerepel számelméletből. Ha előbukkan egy-egy, akkor általában 2 pontért, és az is a legalapvetőbb fogalmakra kérdez rá, melynek nagy részét már 6. osztályban tanulják a diákok.

Általános iskolás tanulmányaik végére pedig az összes olyan számelméleti ismerettel rendelkeznek, ami előfordulhat az érettségin. Ezek olyan feladatok, ahol szinte gondolkodás nélkül kell alkalmazni az ismert fogalmakat, oszthatósági szabályokat. Ezekben a feladatokban számelméleti vonatkozások annyira elenyésző számban fordultak elő az eddigi érettségikben, hogy nem is igazán érdemes beszélni róluk.

Két feladatot szeretnénk még kiemelni. Az egyik a legtöbb pontot érő, ezáltal „legbonyolultabbnak” titulált számelmélethez kapcsolható feladat, ahol már önálló gondolatokra is szükség lehet.

2006. február: (7)

15. Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.

a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám?

b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik?

(8 + 4 pont)

A másik a következő 2 pontot érő feladat.

2008. október: (7)

1. Adja meg a 24 egyjegyű pozitív osztóinak halmazát! (2 pont)

Ezt a feladatot azért tartjuk érdekesnek, mert egy véletlen kapcsán ráakadtunk egy 3. osztályos tankönyvben. Ott a 24 osztóit kellett felsorolniuk a gyerekeknek. Ebből jól látszik, hogy az érettségi feladatokban szereplő számelméleti fogalmak egy részét már 3. osztályban tanulják a gyerekek, illetve van olyan érettségi feladat, amit már akkor meg tudnának oldani. Az összes eddigi számelmélethez kapcsolódó érettségi feladathoz szükséges fogalmat pedig már egy 7. osztályos diák is tanulja.

Az eddigieket összefoglalva így csoportosítottuk az eddigi érettségikben előfordult számelméleti feladatokat:

- oszthatósági szabály (3, 4, 5, 6, 8, 10, 9, 20, 60)
- 24 pozitív osztóinak halmaza
- 24 és 80 legkisebb közös többszöröse

- 2010 pozitív osztói, amelyek prímszámok
- 10-nél kisebb pozitív prímszámok halmazának és hattal osztható, harmincnál nem nagyobb pozitív egészek halmazának metszete
- 420 prímszámok szorzataként
- igaz/hamis típusú feladat: prím, legkisebb közös többszörös, legnagyobb közös osztó, oszthatóság

Az emelt szintű érettségi esetén más a helyzet. Összesen két részfeladatot találtunk az elmúlt évek érettségi feladatsoraiban, amik számelméletinek mondhatók.

2006. május: (7)

4. a) Legyen (a_n) egy mértani sorozat, melynek első tagja 5, hányadosa 3. Mennyi a valószínűsége, hogy ha ennek a mértani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad? (6 pont)

2010. október: (7)

2. b) Írja fel a 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és a 8-as számjegyeket tartalmazza! (7 pont)

E kettőn kívül hat olyan valószínűség-számítás témájú feladat volt az eddigi emelt szintű érettségikben, amelyek tartalmaztak számelméleti vonatkozásokat, de azok is csak oszthatósági szabályok voltak. Ezek alapján kijelenthetjük, hogy az emelt szintű írásbeli érettségihez nem kell közvetlen számelméleti tudás.

Az emelt szintű érettségin viszont az egyik szóbeli tétel részeként jelen van a számelmélet. 2014-ben például a 2. tétel a következőket tartalmazta:

Valós számok halmaza és részhalmazai. Számelméleti alapfogalmak és tételek. Számrendszerek.

Látható tehát, hogy az emelt szintű érettségihez tudni kell a számelméletet, de itt is csupán az alapfogalmait és tételeit.

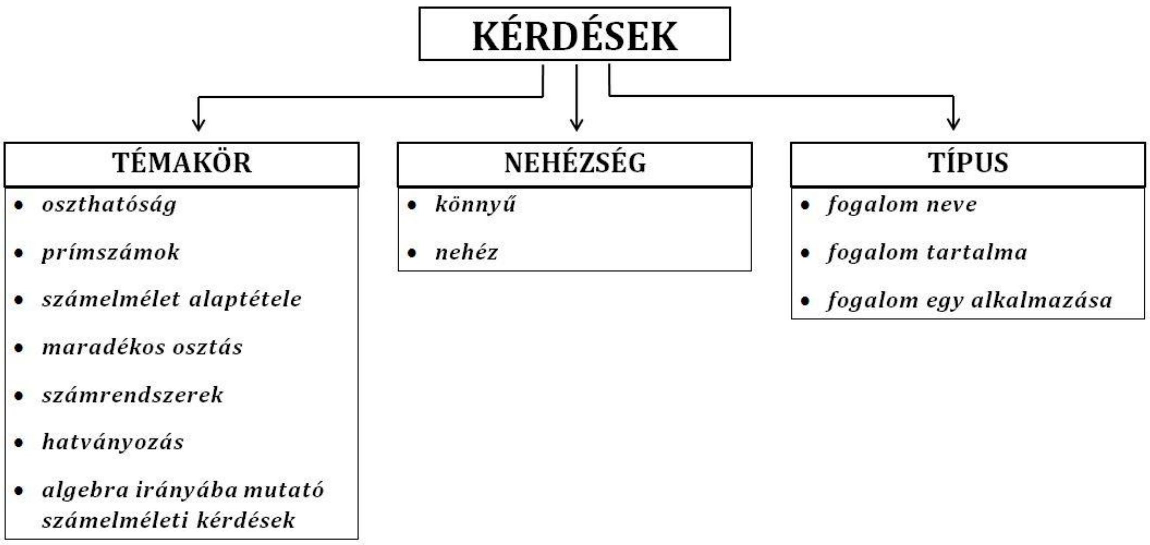
7. Kérdőívek

A megkérdezett tanárok és diákok válaszai alapján készítettünk egy kérdőívet a diákoknak. (A kérdőívek a 3. melléklet, 4. melléklet, 5. melléklet és 6. mellékletben találhatóak.) A kérdőív célja az volt, hogy az interjúk alapján levont következtetéseket alátámasszuk. Arra voltunk kíváncsiak, hogy mit tanítanak az általános- és középiskolában a diákoknak, és arra, hogy mi az, ami abból megragad bennük.

A kérdőívet úgy állítottuk össze, hogy ne tartson túl sokáig a kitöltése, mégis jó képet adjon arról, hogy miről hallottak és miről nem hallottak a diákok. A kérdésekben elsősorban a kulcsfontosságú fogalmakra kérdeztünk rá többféleképpen. Nem azt akartuk felmérni, hogy ismerik-e a diákok a kérdésben szereplő fogalmakat és tételeket, és hogy tudják-e használni azokat, hanem azt, hogy tanították-e nekik, hallottak-e róla, feltételezhetjük-e ezek tudását.

A kérdőív összeállításánál törekedtünk arra, hogy a lehető legjobban lefedjük az elemi számelmélet témakörét. Ezért az oszthatósághoz, a prímszámokhoz, a számelmélet alaptételéhez, a maradékos osztáshoz, a számrendszerekhez, a hatványozáshoz és az algebra irányába mutató számelméleti témákhoz kapcsolódó kérdéseket tettünk fel. Mindemellett szem előtt tartottuk azt is, hogy a kérdésekkel különböző mélységi szinteket célozzunk meg. Így szerepel közöttük olyan, amiről azt gondoljuk, hogy a számelmélet témakör feldolgozásának elengedhetetlen építőeleme, valamint olyan is, ami valószínűleg csupán részletesebb feldolgozáskor kerül elő. A könnyebb és nehezebb kérdések segítségével szerettünk volna visszajelzést kapni arról, hogy a diákok mennyire vették komolyan a válaszadást.

A kérdéseket alapvetően három szempont szerint csoportosíthatjuk az 1. ábrán látható módon.



1. ábra: Kérdések csoportosítása

Abból kiindulva, hogy egy negyedik osztályba készülő kisdiák a neki megfelelő számkörben el tudja dönteni minden számról, hogy osztható-e 2-vel vagy 5-tel, tud maradékosan osztani és a maradékokkal számolni, azt gondoltuk, hogy a következő kérdések könnyűnek számítanak:

Ismered a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?

Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?

Az előzetes felmérés során megkérdezett tanárok és diákok válaszai arra engedtek következtetni, hogy az alábbiak a nehéz kérdések közé tartoznak majd:

Tudod hogyan lehet átváltani egy 4-es számrendszer számot 5-ös számrendszerbelivé?

Tudtad, hogy $a - b|a^n - b^n$ *minden* n *egészre?*

Számrendszerek közötti átváltásokra kevés időt fordítanak a tanórákon, így legtöbbször csak a 2-es és 10-es számrendszerek közötti átváltásokkal ismerkednek meg a tanulók. A másik kérdést azért gondoltuk nehéznek, mert így, általános alakban nem szokták kimondani ezt az azonosságot, csupán $n = 2$, illetve $n = 3$ esetekre.

A kérdőív kérdéseit nem csak nehézségük szerint, hanem típusuk alapján is csoportosíthatjuk. Alapvetően három típusba sorolhatjuk azokat:

1. Rákérdeztünk a fogalom nevére, például:

   Hallottad már a relatív prím kifejezést?

2. Rákérdeztünk a fogalom tartalmára a fogalom megnevezése nélkül, például:

   Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?

3. Rákérdeztünk a fogalom egy alkalmazására. A következő példához hasonló feladatot szinte minden megkérdezett diák füzetében láttunk:

   Találkoztál ilyen típusú feladattal: $3|\overline{54x23}$*, ahol* x *lehetséges értékeit keressük?*

A fenti három kategóriába minden kérdés egyértelműen besorolható. Azonban egyes fogalmakra és tételekre többféleképpen is rákérdeztünk, így azok több kategóriába is beleillenek. Tisztában vagyunk azzal, hogy a diákok nem feltétlenül kötik a fogalmakat az elnevezésükhöz. Az külön vizsgálat tárgyát képezhetné, hogy a diák memóriájában milyen formában rögzül a tartalom és az elnevezés. Ezért azt gondoltuk, hogy ha többféleképpen is rákérdezünk bizonyos fogalmakra, akkor árnyaltabb képet kaphatunk a diákok tudásáról. A továbbiakban nézzünk ezekre néhány példát.

Volt olyan tétel, amire (1)-es és (2)-es típusú kérdéssel is rákérdeztünk, például:

(1) Hallottál a számelmélet alaptételéről?

(2) Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?

A legnagyobb közös osztóra vonatkozó kérdéseink a (2)-es és (3)-as kategóriába tartoznak:

(2) Hallottad már a legnagyobb közös osztó kifejezést?

(3) Tanultad a törtek egyszerűsítését?

A kérdéseinkkel nem azt akartuk felmérni, hogy a diákok ténylegesen tisztában vannak-e a kérdésben szereplő fogalmakkal, hanem azt, hogy tanulták-e és emlékeznek-e rá. Ennek megfelelően az alábbi négy válaszlehetőséget adtuk a kitöltőknek:

1. biztosan nem volt ilyen
2. nem emlékszem rá, hogy lett volna ilyen
3. hallottam már róla, de nem tudom pontosan mi az
4. hallottam és tudom is, mit jelent

A négy válaszlehetőséget úgy határoztuk meg, hogy lehetőleg mindenki találjon közöttük számára megfelelőt. Az első kettő arra az esetre vonatkozik, amikor a diákok nem emlékeznek arra, hogy hallottak már a kérdésben szereplő fogalomról, a második kettő pedig arra az esetre, amikor a diákok tisztában vannak vele, hogy hallották már a kérdéses fogalmat.

Az első két válaszlehetőség között látszólag nincs nagy különbség, mégis egészen mást jelent az, ha valaki teljesen határozottan állítja, hogy soha nem hallott az adott tételről vagy fogalomról és az, amikor nem ennyire biztos a döntésében, vagyis nem zárja ki annak lehetőségét, hogy hallott már róla. Ennél jóval markánsabb különbség érezhető a harmadik és a negyedik opció között. Ezek a válaszok feltételezik, hogy a diákok korábban tanulták a kérdésben szereplő fogalmat vagy tételt, hallottak már róla. A lényeges különbség a kettő között az, hogy a negyedik lehetőséget választó diákok úgy gondolják, hogy fel is tudják idézni a korábban elsajátított ismeretet, míg a harmadik lehetőséget választók nem emlékeznek tisztán a fogalomhoz köthető definícióra vagy a pontos tételre.

A kérdőívnek két változatát készítettük el. Ezek a 3. mellékletben és a 4. mellékletben láthatóak.

A kérdőíveket a diákok anonim módon töltötték ki. Minket a nevük helyett a korosztályuk érdekelt elsősorban, illetve az, hogy milyen formában tanulják/tanulták a matematikát. A számelmélettel kapcsolatos kérdések előtt ezekre vonatkozó kérdéseket is feltettünk, ahol a megfelelő választ kellett aláhúzniuk a kitöltőknek. Ezeken kívül azt is megkérdeztük, hogy milyen nemű a kitöltő, hátha később fontossá válna számunkra ez az információ.

Mindkét változatban tizenhat számelmélettel kapcsolatos kérdést tettünk fel a diákoknak. Látható, hogy a két kérdőívben lényegében ugyanazok a kérdések szerepelnek, csak más sorrendben. Ezek nem csupán azért készültek így, hogy a diákok ne puskázzanak egymásról, hanem azt szerettük volna megvizsgálni, hogy a fogalomról eszükbe jut-e a gyerekeknek az alkalmazás, illetve az alkalmazásról eszükbe jut-e a fogalom. Mivel a kérdőív kitöltésére kevés idő állt rendelkezésre, ezért azt feltételeztük, hogy a diákok sorrendben, visszatekintés nélkül válaszolnak a kérdésekre.

Az előbbiekben megemlített példánál maradva kíváncsiak voltunk arra, hogy a *Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?* kérdést elolvasva eszébe jut-e a kitöltőnek, hogy azt a számelmélet alaptételének hívják. Vagy fordítva: a számelmélet alaptételéről eszébe jut-e, hogy az mit takar. Természetesen azt gondoljuk, hogy akik már ismerik a számelmélet alaptétele kifejezést, azoknak a kérdések sorrendisége nem számít.

Várhatóan vannak olyan gyerekek, akik még nem jutottak el a memorizálás utolsó stádiumába, így nem egyforma erősen rögzült bennük a fogalom és a tartalom. Ezektől a gyerekektől azt várjuk, hogy ha előbb olvassák a kimondott tételt, akkor esetleg a másik kérdésnél már kapcsolnak, és a tétel nevéről is tudni fogják, hogy miről van szó. Míg azok, akiknél a tétel nevét tartalmazó kérdés van előbb, nem fogják azt ikszelni, hogy ismerik a tételt.

Amitől mi jobban tartunk, az sokkal inkább az, hogy ezek a fogalmak már rögzültek, de amiatt, hogy nem frissítették kellő gyakorisággal, ezek a kötelékek lazultak. Mint ahogy láttuk is, ha valaki sokáig nem foglalkozik egy fogalommal, akkor hajlamos arra, hogy ismétlés vagy újratanulás nélkül már ne emlékezzen rá. Knausz Imre így fogalmazott erről: *„A leghatékonyabb tanítási módszer esetén is évekre van szükség ahhoz, hogy az elsajátítás valóban bekövetkezzék, hogy tehát a témazáró dolgozattal még koránt sincs minden befejezve.”* (Knausz 2001, 7)

A kérdéspárokra adott válaszok korosztályonkénti vizsgálata igazolhatja egyik vagy másik, esetleg mindkét feltevésünket. Ha az idő múlásával egyre kisebb az összefüggés a két kérdésre adott válasz között, az valóban jelentheti azt, hogy a kötelék lazul. Ebben az esetben az feltételezhető, hogy a tanár nem alkalmazta a spiralitás elvét, és ezzel a régen megtanított információ elvész.

8. A kitöltés megszervezése, a kérdőív második változata

Kérdőíveinkkel elsősorban három korosztályt céloztunk meg: a 10. és 12. osztályosokat és az elsőéves egyetemistákat.

Ahogy azt már korábban említettük, a kerettanterv szerint középiskolában a 9. és a 10. évfolyamokon foglalkoznak a számelmélet témakörével. Saját középiskolai tapasztalataink, a megkérdezett tanárok véleménye és a használatban lévő középiskolai matematika tankönyvek alapján arra következtethetünk, hogy 9. osztályban, az év elején tárgyalják ezt az anyagrészt az iskolákban. A kérdőívek kitöltetését 2013 novemberében kezdtük el. Ekkor nem tudhattuk, hogy a 9. évfolyamosok foglalkoztak-e már a számelmélet témakörével, így nem őket, hanem a 10. osztályosokat választottuk a megkérdezendő legfiatalabb korosztálynak. Azt gondoltuk, hogy az ő tudásuk még friss, és jól fognak emlékezni a kérdésekben szereplő fogalmakra, tételekre és alkalmazásokra.

A 12. osztályosok válaszaira is kíváncsiak voltunk, hiszen ez a korosztály az érettségire készül, így a teljes középiskolai matematika tananyaggal tisztában kellene lennie.

Harmadikként az elsőéves egyetemisták korosztályát választottuk, hiszen kutatásunk abból az észrevételből indult ki, hogy az elsőéves számelmélet előadáson a hallgatók a legalapvetőbb számelmélettel kapcsolatos fogalmakra sem emlékeznek. Így természetesen az ő válaszaik is érdekeltek bennünket.

A kérdőíveket először egy szűkebb körrel töltettük ki. Az első 649 kitöltő válaszait tanulmányozva kiderült számunkra, hogy a kérdőívbe belekerült néhány túl könnyű és néhány félreérthető kérdés is. Azért, hogy ezeket a hibákat korrigáljuk, elkészítettük a kétféle kérdőív módosított változatát. Ezek az 5. mellékletben és a 6. mellékletben tekinthetők meg.

Félreérthető kérdés volt például a következő:

Tudsz módszert az osztók számának meghatározására?

Ezt a kérdést a módosított változatokból teljes egészében kihagytuk.

A törtek egyszerűsítésével és közös nevezőre hozásával kapcsolatos kérdésekre túlzottan egybehangzó válaszok érkeztek. Ezeknél majdnem mindenki a negyedik válaszlehetőséget jelölte be, vagyis azt, hogy hallotta és tudja is, hogy mit jelent. Így tettük fel ezeket a kérdéseket az első változatokban:

Tanultad a törtek egyszerűsítését?

Tanultad a törtek közös nevezőre hozását?

A legnagyobb közös osztóra és a legkisebb közös többszörösre vonatkozó kérdésekre legtöbbször ugyanazt a választ adták a diákok, ezért ezeken is változtatni szerettünk volna. Az első változatokban a következőképp tettük fel ezeket a kérdéseket:

Hallottad már a legkisebb közös többszörös kifejezést?

Hallottad már a legnagyobb közös osztó kifejezést?

A fenti négy kérdés helyett a módosított változatokba a következő kettő került bele:

Tanultál a legnagyobb közös osztóról?

Tanultad, hogy a legkisebb közös többszöröst a törtek összeadásánál használjuk?

Így ezzel a két kérdéssel lefedtük a legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös, illetve a törtek témakörét is.

A kérdőívek első változatai egyetlen kérdésben különböztek egymástól. Az A változatban ez a kérdés szerepelt:

Tudtad, hogy az $a^n - b^n$ *minden pozitív* n *egész esetén felbomlik* $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$ *alakban?*

Míg a B változatba ez a kérdés került:

Láttál már olyan feladatot, hogy milyen x*-re lesz 3-mal osztható az* $\overline{54x32}$*?*

A kérdőívek módosított változataiba – a C és D változatba egyaránt – már mindkét kérdést beletettük.

Úgy gondoltuk, hogy több alkalmazáshoz kapcsolódó kérdésre lenne szükség annak megállapításához, hogy mennyire részletesen tanulják a számelmélet anyagrészt a diákok az iskolában. Így ezeket a kérdéseket is beletettük a kérdőívek új változataiba:

Láttál már olyan feladatot, hogy milyen számjegyre végződik a 19^{2012}*?*

Láttál olyan feladatot, hogy a $100!$ *hány 0-ra végződik?*

Hallottál már arról, hogy egy négyzetszám 3-mal osztva milyen maradékot adhat?

A többi kérdésen érdemben nem változtattunk. Némelyik megfogalmazásán módosítottunk csak egy kicsit, hogy a válaszlehetőségek jobban kapcsolódjanak a kérdésekhez. A négy válaszlehetőséget is hasonló okokból fogalmaztuk át. A módosított változatokban ezeket az opciókat adtuk a diákoknak:

1. biztosan nem volt ilyen
2. nem emlékszem rá, hogy lett volna ilyen
3. hallottam már róla, de nem tudom pontosan mi az/nem tudnék rá pontosan válaszolni
4. hallottam és tudom is, mit jelent/tudnék rá válaszolni

A leírtak alapján elkészült módosított változatok az eddigi tizenhat helyett tizenhét kérdést tartalmaznak. Mivel a tizenhét kérdés egyikét sem szerettük volna elhagyni, – mert akkor egy általunk fontosnak tartott anyagrészre nem tudtunk volna rákérdezni, – és úgy gondoltuk, hogy az eggyel több kérdés megválaszolása nem vesz el sokkal több időt a tanórából, ezért nem ragaszkodtunk hozzá, hogy a módosított változatokba is ugyanannyi kérdés kerüljön, mint az első változatokba.

Kíváncsiak voltunk arra is, hogy a megkérdezett diákok milyen formában tanulják/tanulták a matematikát, ezért a számelmélettel kapcsolatos kérdések előtt egy erre vonatkozó kérdést is feltettünk, ahol a megfelelő választ kellett aláhúzniuk a kitöltőknek. A kérdőív első változataiban így tettük fel a kérdést:

Ha jártál ezek valamelyikére, akkor húzd alá:

- *matematika fakultáció*
- *matematika tagozat*

Később viszont rájöttünk, hogy ez nem volt szerencsés megoldás, mert nem volt egyértelmű, hogy az illető nem járt tagozatra és fakultációra sem vagy csak átugrotta ezt a kérdést és rögtön a számelmélethez kapcsolódóakra kezdett el válaszolni. Ennek okán ez a rész is módosításra került. Így formáltuk át:

Milyen formában tanulod a matematikát? (húzd alá)

- *normál*
- *matematika fakultáció*

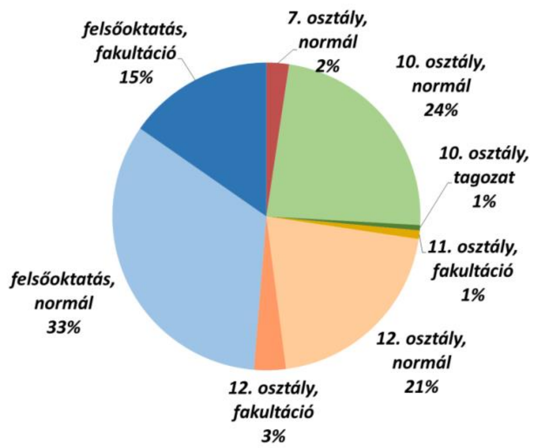
- *matematika tagozat*

9. A kérdőívek kiértékelése

A kérdőíveket összesen 1231 tanuló töltötte ki. Különböző városok különböző szintű iskoláiba vittük el a kérdőíveket, hogy minél tisztább képet kapjunk arról, hogy mire emlékeznek a diákok a középiskolai számelmélet tananyagból. A kitöltők között voltak vidéki – dunaföldvári, kaposvári és szekszárdi – és külvárosi budapesti iskolák is. Kérdéseinkre válaszoltak matematika iránt érdeklődő, matematika szakos elsőéves egyetemisták és olyan elsőévesek is, akik az érettségi után nem kívántak többet matematikával foglalkozni.

A válaszadókat elsősorban korosztály szerint csoportosítottuk. Másodlagos rendezési szempontunk az volt, hogy a kitöltők milyen formában tanulják/tanulták a matematikát. A továbbiakban azokat a felsőoktatásban tanuló hallgatókat, akik középiskolai tanulmányaik során matematika fakultációsok vagy tagozatosok voltak felsőoktatásbeli fakultációsokként emlegetjük, míg azokról, akik nem jártak matematika fakultációra felsőoktatásbeli normál szinten tanulókként beszélünk majd.

A kitöltők korosztályok szerinti eloszlását a 2. ábra szemlélteti.



2. ábra: A kérdőívek kitöltői korosztály szerinti

A kérdőívekkel kapcsolatos statisztikák elkészítésében Erdélyi Éva, a Budapesti Corvinus Egyetem Élettudományi területű Doktori Iskolái és a Budapesti Gazdasági Főiskola kutatásmódszertan tárgyainak oktatója, illetve tantárgyfelelőse volt segítségünkre.

A kérdőívek kérdéseire adott válaszokat az adatok feldolgozásakor számokkal jelöltük. A számokat így rendeltük a válaszlehetőségekhez:

1: biztosan nem volt ilyen

2: nem emlékszem rá, hogy lett volna ilyen

3: hallottam már róla, de nem tudom pontosan mi az/nem tudnék rá pontosan válaszolni

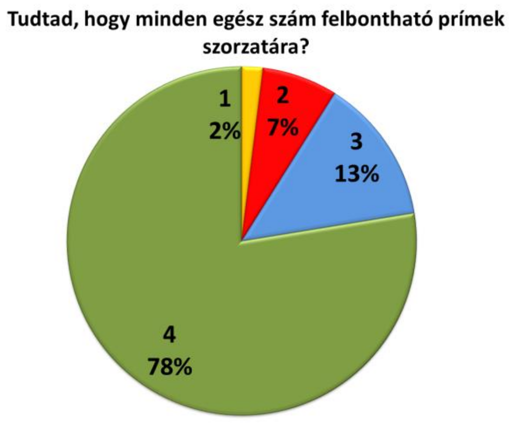
4: hallottam és tudom is, mit jelent/tudnék rá válaszolni

A kiértékelésnél tisztában voltunk vele, hogy attól, hogy a hallottam és tudom is választ írja be a diák, még nem biztos, hogy valóban tudja is.

Óvatosan kellett statisztikai módszert választanunk. Nem skálázott adatokról lévén szó a hagyományos statisztikai módszereket itt el kell vetni. Négyféle módszert használtunk: minden kérdésre adott válaszokat ábrázoltuk kördiagramon, majd a korosztályokat és a kérdéseket a hierarchikus klaszteranalízissel osztályoztuk. A kritikus kérdéseket K-közép módszerrel kerestük meg. Ez a két módszer a minőségekről nem, csak az eltérésekről nyilatkozik. A minőségi elemzéshez a varianciaanalízist kiegészítő középérték összehasonlító Tukey-módszert használtuk.

Az egyes kérdésekre adott válaszok arányát kördiagramokkal szemléltettük. A 7. mellékletben megtalálhatóak az egyes kérdésekhez tartozó kördiagramok. A továbbiakban néhányról részletesebben is beszélünk.

Nagy különbséget mutattak a számelmélet alaptételére rákérdező és annak tartalmával kapcsolatos kérdésekhez tartozó kördiagramok. Ahogy az a 3. ábráról leolvasható, a válaszadók 24%-a írta azt, hogy nem hallotta még a számelmélet alaptétele kifejezést, míg 9%-uk válaszolta azt, hogy nem emlékszik rá, hogy tanulta volna azt, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára. Már ebből is látszik, hogy a tanulók fejében nem kapcsolódott össze elég erősen a tétel neve és tartalma. Amikor a tétel nevével tettük fel a kérdést, 60%-kal kevesebben válaszoltak úgy, hogy hallották már a tételt és tudják is, hogy mit jelent, mint akkor, amikor a kérdésben kimondtuk a tételt.



3. ábra: A számelmélet alaptételével kapcsolatos kérdésekre adott válaszok kördiagramon

Megvizsgáltuk azt is, hogy a szóban forgó két kérdés esetében hogyan válaszoltak a diákok. Kíváncsiak voltunk rá, hogy ha az egyik kérdésre azt írták, hogy tudják, akkor milyen választ adtak a másik kérdésre, és fordítva. A sorrendiség vizsgálatakor az 5. táblázatban látható eredményt kaptuk.

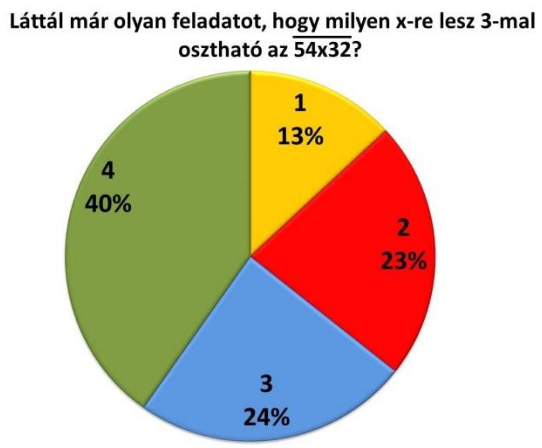
C (%)		tartalommal (1.)				
		1	2	3	4	∑
névvel (2.)	1	0,68	2,72	3,40	5,78	12,59
	2	1,70	4,08	5,78	28,57	40,14
	3	0,34	2,38	6,80	24,83	34,35
	4	0,00	0,00	1,02	11,90	12,93
	∑	2,72	9,18	17,01	71,09	100,00

D (%)		tartalommal (2.)				
		1	2	3	4	∑
névvel (1.)	1	1,09	2,54	2,90	8,70	15,22
	2	0,36	5,07	5,43	18,84	29,71
	3	0,00	3,62	6,16	33,33	43,12
	4	0,00	0,00	0,72	11,23	11,96
	∑	1,45	11,23	15,22	72,10	100,00

5. táblázat: Számelmélet alaptétele névvel és kimondva sorrendiség vizsgálat

Mindkét táblázatban az látható, hogy a válaszadók hány százaléka milyen válaszokat adott a két kérdésre. A bal oldali táblázatban összesítettük azokat, akiknél először az a kérdés szerepelt, hogy *Tudtad-e, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára*? és utána szerepelt az, hogy *Hallottál a számelmélet alaptételételéről?*. A harmadik sor negyedik oszlopa azt mutatja, hogy a válaszadók 24,83%-a válaszolt 3-mal az első kérésre és 4-gyel a második kérdésre akkor, ha először szerepelt náluk az első kérdés. A jobb oldali táblázat ugyanezt mutatja azokra, akik először kapták a második kérdést. A táblázatok alapján látható, hogy a diákok válaszait befolyásolta az, hogy melyik kérdést olvasták előbb. Amikor a tétel nevével feltett kérdést olvasták később a tanulók (bal oldali táblázat), akkor lényegesen többen válaszolták azt, hogy nem emlékeznek rá, hogy hallottak volna már a számelmélet alaptételéről. Amikor pedig az a kérdés szerepelt később, amelyikben kimondtuk a tételt (jobb oldali táblázat), akkor kevesebben válaszoltak úgy, hogy egészen biztosak benne, hogy soha nem hallottak erről. Ez azt jelenti, hogy miután hallották a tételt, beugrik a tétel neve, ami önmagában kevesebbet mond. Érdekes, hogy a tételeknek általában azért adunk nevet, hogy arról jegyezzék meg a diákok, de szerencsésebb így, mintha a tétel nevére emlékeznének és nem a tartalmára.

A másik, számunkra meglepő eredményt az 4. ábrán diagramon láttuk.



4. ábra: $\overline{54x32}$-vel kapcsolatos feladathoz tartozó kördiagram

Minden általunk megkérdezett tanár azt mondta, hogy szokott ilyen feladatokat feladni az órán, a tankönyvekben is sok példát láttunk ilyen jellegű feladatra. Minden diák füzetében is találtunk ehhez hasonló feladatot, a válaszok aránya viszont ettől jelentősen eltér. A válaszadók 36%-a válaszolt úgy, hogy nem emlékszik rá, hogy találkozott volna ilyen jellegű feladattal vagy egészen biztos benne, hogy nem látott még ilyen típusú oszthatósági feladatot. Mindössze a megkérdezettek 40%-a írta azt, hogy látott már ilyen feladatot és meg is tudná oldani azt.

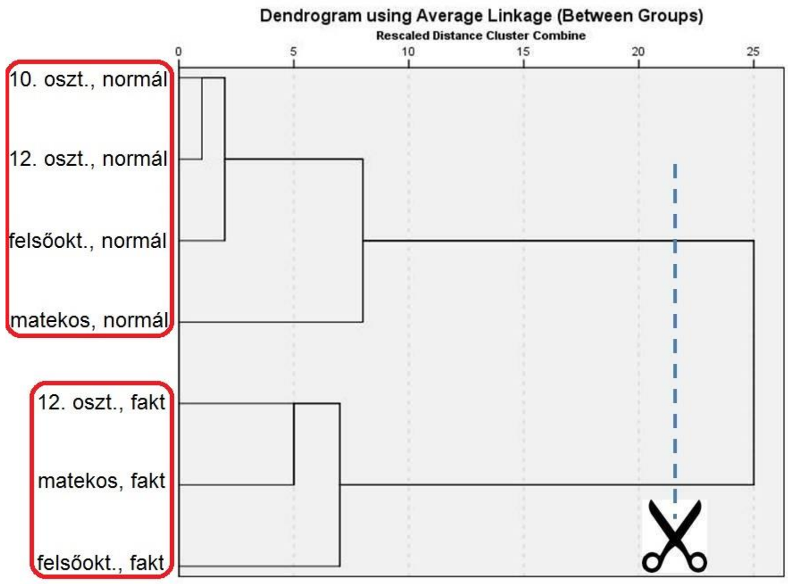
Nem elégedtünk meg a kördiagramokból látható különbségekkel. Ennél részletesebben is érdekelt bennünket az eredmény, ezért többváltozós statisztikai módszerekkel vizsgálódtunk tovább.

Az eredmények statisztikai kiértékelésére az SPSS programcsomagot használtuk. Az SPSS felhasználóbarát statisztikai szoftver, mely klasszikus és modern statisztikai módszereket egyaránt tartalmaz. Előnye, hogy a feltételek hiányában nem használható hagyományos módszerek helyett más módszerek alkalmazására is lehetőséget kínál.

Elsőként hierarchikus klaszteranalízissel vizsgáltuk az adatokat. A hierarchikus klaszteranalízis csoportokba sorolja a nem skálázott adatokat az általunk megadott kategóriák szerint. A hasonló válaszsorozatokat sorolja egy osztályba. Vagyis a hierarchikus klaszteranalízis egy olyan dimenziócsökkentő eljárás, amellyel adattömböket tudunk homogén csoportokba sorolni. Ezeket a csoportokat nevezzük klasztereknek. Az egyes klasztereken belüli adatok valamilyen dimenzió szerint hasonlítanak egymásra és a dimenzió mentén különböznek a többi csoporttól. Így ez a módszer kiválóan alkalmas arra, hogy megvizsgáljuk, hogy a különböző csoportok egymáshoz képest mennyire hasonló válaszokat adtak a kérdésekre.

Ennél a vizsgálatnál külön csoportba soroltuk azokat az egyetemistákat, akik matematika szakon tanulnak és azokat, akik más szakokon folytatják tanulmányaikat azért, hogy a matematika szakos egyetemisták válaszaival ne torzítsuk el a felsőoktatásban tanuló hallgatók eredményeit. Azt a csoportot, amibe a korábban matematika fakultációs matematika szakos hallgatókat soroltuk matekos fakultációs korosztályként, míg azokat a hallgatókat, akik matematika szakon kezdték meg tanulmányaikat, de korábban normál szinten tanulták a matematikát matekos normálos korosztályként emlegetjük majd. A felsőoktatásbeli fakultációs illetve normálos korosztályok a nem matematika szakos egyetemistákat takarják majd.

Hierarchikus klaszteranalízissel elsőként azt vizsgáltuk meg, hogy milyen eredményt kapunk, ha – a 7. osztályosokon és a 10. osztályos tagozatosokon kívül – az összes korosztályt és az összes kérdést vizsgáljuk. A hierarchikus klaszteranalízis elvégzése után az 5. ábrán látható dendrogramot kaptuk eredményül.



5. ábra: Hierarchikus klaszteranalízis – összes kérdés, összes korcsoport

A dendogram értelmezéséhez segítség lehet, ha úgy tekintünk a korosztályokat összekötő fekete vonalakra, mintha azok drótból lennének. Ha az ollóval jelölt helyen elvágjuk a drótunkat, akkor az két részre esik szét. Az egyik részen az egyik klaszterhez tartozó korosztályok lesznek, a másikon pedig a másik klaszterhez tartozóak.

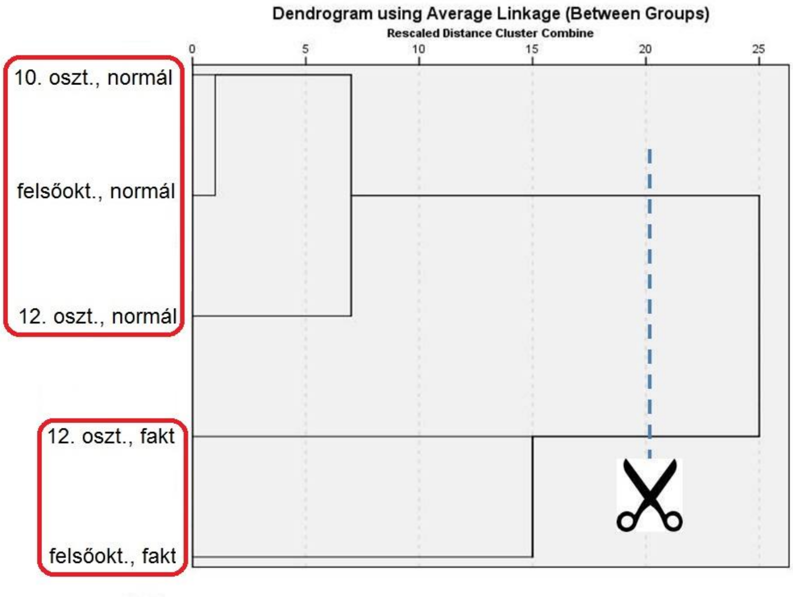
A dendogram alapján látható, hogy ha két klaszterbe szeretnénk sorolni a korosztályokat, akkor az egyikbe a 10. és 12. osztályos normál szinten tanulók, illetve felsőoktatásbeli normálosok és a matekos normálosok kerülnek. A másik klaszterbe pedig a 12. osztályos fakultációsok, a felsőoktatásban tanuló fakultációsok valamint a matekos fakultációsok kerülnek. Érdekes módon az ELTE matematika szakán tanuló egyetemisták, akik korábban nem jártak fakultációra, gyengébb válaszokat adtak, mint a 12. osztályos fakultációs tanulók.

A hierarchikus klaszteranalízis nem ad választ arra a kérdésre, hogy a különböző korosztályok válaszai miben térnek el egymástól és arra sem, hogy melyik korosztályok adták a jobb, illetve a rosszabb válaszokat az egyes kérdésekre. K-közép módszer segítségével állapítottuk meg, hogy ennél a csoportosításnál mely kérdések határozzák meg leginkább a korosztályok klaszterekbe sorolását. Két klaszterbe sorolás esetén a csoportok közötti különbséget jelentő kérdések – a C változat szerinti számozással – a következőek voltak:

1. Hallottad már a számelmélet kifejezést?
3. Tudod hogyan lehet átváltani egy 4-es számrendszerbeli számot 5-ös számrendszerbelivé?
4. Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?
5. Hallottál a számelmélet alaptételéről?
6. Hallottad már a relatív prím kifejezést?
9. Tudtad, hogy az $\mathrm{a^n - b^n}$ minden pozitív n egész esetén felbomlik $\mathrm{(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})}$ alakban?
10. Láttál már olyan feladatot, hogy milyen x-re lesz 3-mal osztható az $\overline{54x32}$?

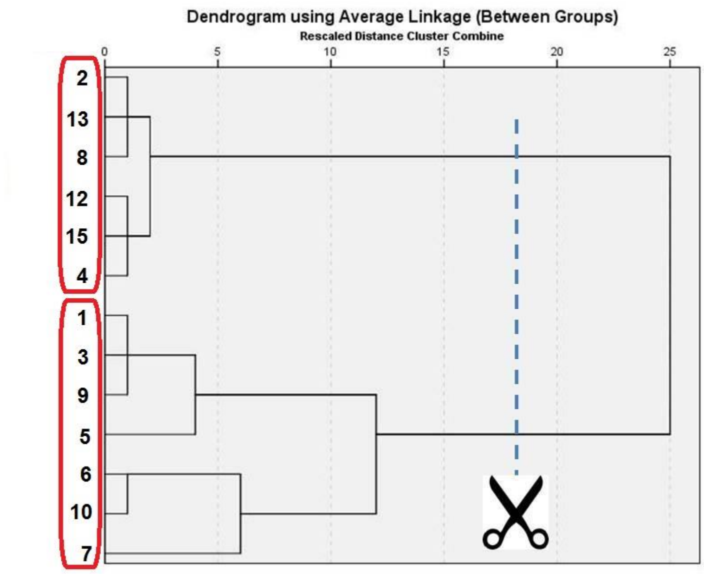
Kíváncsiak voltunk arra is, hogy milyen eredményt ad a hierarchikus klaszteranalízis, ha a matematika szakos egyetemistákat kivesszük a válaszadók közül. Ebben az esetben a 6. ábrán látható dendogramot kaptuk. Két klaszterbe soroláskor az előzőhöz hasonló eredményt kaptunk. Az egyik klaszterbe a normál szinten tanulók kerültek, míg a másikba a fakultációsok. Itt is megvizsgáltuk K-közép módszer segítségével, hogy melyik kérdésekre adott válaszok határozták meg a két klasztert. Ezek a következőek voltak:

2. Ismered a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?
4. Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?
7. Tudtad, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális?
8. Hallottál már olyan szabályt, hogy egy szám mikor osztható 3-mal vagy 9-cel?
12. Hallottál róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?
13. Tanultál a legnagyobb közös osztóról?
15. Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?
16. Tanultad, hogy a legkisebb közös többszöröst a törtek összeadásánál használjuk?



6. ábra: Hierarchikus klaszteranalízis – összes kérdés, matekos egyetemisták nélkül

Nem csak arra voltunk kíváncsiak, hogy az egyes korosztályok válaszai mennyire hasonlítanak egymásra, hanem arra is, hogy az egyes kérdésekre adott válaszok mennyire hasonlóak, hogy hogyan csoportosíthatóak a kérdések a tanulók válaszainak tekintetében. Ennek vizsgálatát is hierarchikus klaszteranalízissel végeztük. A vizsgálat eredményeképp a 7. ábrán látható dendogramot kaptuk.



7. ábra: Hierarchikus klaszteranalízis kérdések szerint

A kérdéseket itt is két klaszterbe soroltuk az előzőekhez hasonló módon. Ezek a kérdések kerültek az egyik klaszterbe:

2. Ismered a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?
13. Tanultál a legnagyobb közös osztóról?
8. Hallottál már olyan szabályt, hogy egy szám mikor osztható 3-mal vagy 9-cel?
12. Hallottál róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?
15. Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?
4. Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?

Míg a másik klaszterhez a következő kérdések tartoztak:

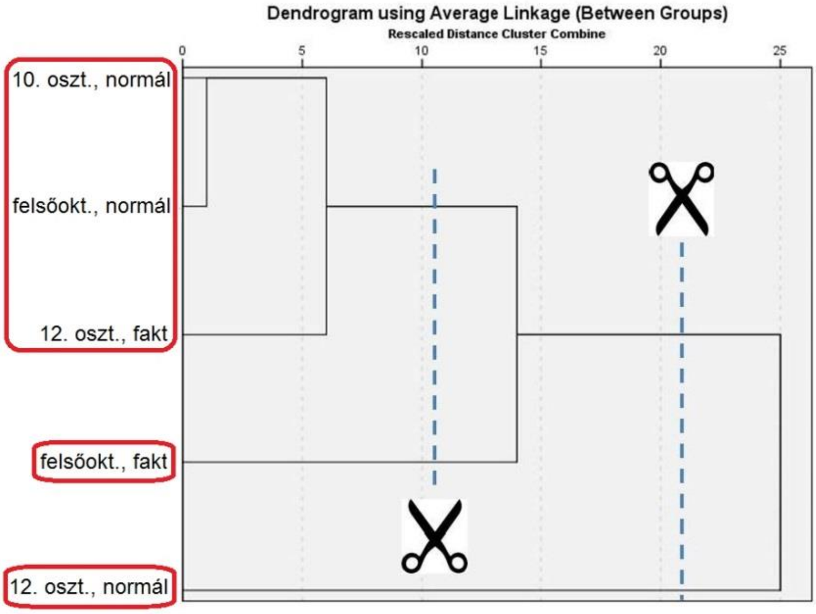
1. Hallottad már a számelmélet kifejezést?
3. Tudod hogyan lehet átváltani egy 4-es számrendszerbeli számot 5-ös számrendszerbelivé?
9. Tudtad, hogy az $a^n - b^n$ minden pozitív n egész esetén felbomlik $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ alakban?
5. Hallottál a számelmélet alaptételéről?
6. Hallottad már a relatív prím kifejezést?
10. Láttál már olyan feladatot, hogy milyen x-re lesz 3-mal osztható az $\overline{54x32}$?
7. Tudtad, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális?

Az egyik klaszterbe főként az általunk könnyebbnek vélt kérdések (2., 4., 8., 12., 13., 15.) kerültek, míg a másikba nagyrészt azok, amiket nehezebbnek gondoltunk. Előzetes elképzeléseinkhez képest meglepő volt számunkra, hogy a 10. kérdés a második klaszterbe került, pedig ezt a kérdést könnyűnek gondoltuk és azt reméltük, hogy mindenki egyformán tudni fogja.

A kérdések szerinti vizsgálat után az általunk fontosnak vélt kérdésekre is lefuttattuk a hierarchikus klaszteranalízist. A következő kérdések voltak azok, amiket ebben az esetben fontosnak tartottunk:

2. Ismered a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?
4. Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?
7. Tudtad, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális?
8. Hallottál már olyan szabályt, hogy egy szám mikor osztható 3-mal vagy 9-cel?
12. Hallottál róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?
13. Tanultál a legnagyobb közös osztóról?
15. Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?
16. Tanultad, hogy a legkisebb közös többszöröst a törtek összeadásánál használjuk?

A felsorolt kérdésekre és a matematika szakos egyetemisták kivételével az összes többi korosztályra lefuttatott hierarchikus klaszteranalízis a 8. ábrán látható eredményt hozta.



8. ábra: Hierarchikus klaszteranalízis az általunk fontosnak vélt kérdések szerint

A korosztályokat két klaszterbe sorolva a 12. osztályos normál szinten tanulók különülnek el a többi korosztálytól. Ha a korosztályokat nem két, hanem három klaszterbe soroljuk, akkor külön klaszterbe kerülnek továbbra is a 12. osztályos normálosok, egy másik klasztert alkotnak a felsőoktatásbeli fakultációsok, míg a többi korosztály – a 12. osztályos fakultációs, a felsőoktatásbeli normálos, illetve a 10. osztályos normálos – a harmadik klaszterbe kerül. A szóban forgó dendogramról az is leolvasható, hogy az általunk fontosnak vélt kérdések esetén leginkább a 10. osztályos normálosok, illetve a felsőoktatásbeli normálosok válaszai hasonlítanak, mert ha négy klaszterbe sorolnánk a korosztályokat, akkor ez a kettő lenne az, amelyikek egy klaszterbe kerülnének.

A hierarchikus klaszteranalízisből ugyan csak a korosztályok közötti hasonlóság mértékére lehet következtetni, de más módszerekkel azt is megállapítottuk, hogy a 12. osztályos normálosok azért különülnek el a többi korosztálytól, mert a tudásszintjük rosszabb, mint a többi korosztályé, míg a felsőoktatásbeli normálosok különbözőségének oka az, hogy az ő válaszaik jobbak voltak, mint a többi korosztályé.

Nemcsak azt szerettük volna tudni, hogy mennyire hasonlítanak, illetve különböznek az egyes korosztályok a válaszaik alapján, hanem azt is, hogy tudásuk alapján hogyan csoportosíthatók. Erre alkalmas a többváltozós varianciaanalízist kiegészítő középérték összehasonlító tesztek közül a Tukey-féle analízis, amely megmutatja, hogy a tudásszintjük alapján mennyire különülnek el a korosztályok, összességében melyik adta a legtöbb nemleges és melyik a legtöbb pozitív választ. Ezt a módszert az egyes kérdésekre külön-külön futtattuk. Ezen összehasonításokat is az SPSS programcsomag segítségével, 95%-os szignifikancia szinten végeztük.

A következőkben az összes kérdésre adott válasz eredményét nem közöljük, de néhány példát bemutatunk közülük. (Az összes kérdésre lefuttatott Tukey-féle analízis eredménye megtekinthető nyers változatban a 8. mellékletben.)

A SPSS az eredményeket egy táblázat formájában adja ki. Az első példa, amit szeretnénk bemutatni, az a C kérdőívben található 9. kérdés (a D kérdőívben a 15.).

9. Tudtad, hogy az a^n-b^n minden pozitív n egész esetén felbomlik (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2} b+…+b^{n-1}) alakban?			
	kód	Subset	
		1	2
Tukey HSD[a,b]	10. osztály, normál	2,73	
	felsőoktatás, normál	2,83	
	12. osztály, normál	2,88	
	12. osztály, fakt	2,95	
	felsőoktatás, fakt		3,59
	Sig.	,799	1,000

6. táblázat: $a^n - b^n$-hez kapcsolódó kérdés Tukey-módszerrel

Ezt a kérdést nehéznek gondoltuk, hiszen ezzel az általánosítással általában nem találkoznak a középiskolában a diákok, esetleg az $n = 2$, illetve $n = 3$ speciális esettel foglalkoznak a tanórákon. Ebben a kérdésben a korosztályok két csoportra oszthatók válaszaik alapján az 6. táblázatban látható módon. A táblázatot úgy kell értelmezni, hogy a számokkal megjelölt oszlopok alkotják a csoportokat. Itt az látszik, hogy a felsőoktatásban tanuló fakultációs korosztály a többi korosztálytól elkülönülő csoportot alkot. Ez a táblázat szerint a 2-es csoport, az összes többi korosztály pedig az 1-es csoportba került. Látszik, hogy az első négy korosztály középértéke 2,85, míg a felsőoktatásbeli fakultációs korosztályé 3,6 körül mozog, ami éles határt jelent a két csoport között. Azt pedig, hogy melyik csoport tudásszintje a jobb, azt az oszlopok fejlécében található szám mutatja meg. Itt a 2-es csoport tudásszintje magasabb az 1-esnél. Ez azzal magyarázható, hogy középiskolában csak ritkán találkoznak ezzel az azonossággal a diákok.

Másik érdekes kérdés a C kérdőív 10. kérdése: *Milyen* x-*re lesz 3-mal osztható az* $\overline{54x32}$? Korábban láthattuk, hogy ez volt az egyik megosztó kérdés az első hierarchikus klaszteranalízis (5. ábra) által létrehozott csoportok között. Amint azt már említettük, ez azért érdekes, mert ez volt az a típusfeladat, amit minden általunk megnézett diák füzetében és tankönyvben megtaláltunk. Ezen kívül a tanárokkal készített interjúk során is kiderült, hogy mindenki gyakorol az óráján ilyen típusú feladatot, még azok a tanárok is, aki csak az érettségire szükséges minimális követelményeket tanítják számelméletből. Az erre a kérdésre adott válaszokból a Tukey-módszerrel a 7. táblázatban látható eredményt kaptuk.

10. Láttál már olyan feladatot, hogy milyen x-re lesz 3-mal osztható az $\overline{54x32}$?

	kód	Subset		
		1	2	3
Tukey HSD[a,b]	120	2,77		
	100	2,96	2,96	
	200	3,13	3,13	
	201		3,52	3,52
	121			3,76
	Sig.	,430	,074	,784

7. táblázat: $\overline{54x32}$-vel kapcsolatos kérdés Tukey-módszerrel

Ebből a táblázatból az olvasható le, hogy a módszer három csoportra bontotta a korosztályokat erre a kérdésre adott válaszaik alapján. Ez a három csoport nem különül el élesen egymástól. Egy-egy korosztály több csoportba is besorolható, így ezek átmenetet képeznek az 1-es és 2-es, valamint a 2-es és 3-as csoport között. Tudásszint alapján azt lehet mondani, hogy a 3-as csoport a jobb, a 2-es a közepes, az 1-es pedig a rosszabb csoport. Ez azt jelenti, hogy a két fakultációs korosztály jelölte a legtöbbször azt a kérdőíven, hogy igen, meg tudná oldani a feladatot vagy azt, hogy már hallották, de nem biztosak benne. Ezzel szemben az 1-es csoportban lévő három korosztály: a 12. osztályos normál, a 10. osztályos normál és a felsőoktatásbeli normál szinten tanuló diákok válaszainak a középértéke lett alacsonyabb. Ez a középérték itt 2,9 körül van, ami azt jelenti, hogy az ezen korosztályokhoz tartozó tanulók közül már sokan válaszolták azt, hogy nem emlékeznek rá, hogy találkoztak volna ilyen feladattal, vagy azt, hogy biztosan tudják, hogy nem találkoztak ilyen példával. Ez azért meglepő, mert az előzetes felméréseink szerint kellett, hogy találkozzanak vele.

A 12. osztályos nem fakultációs – az egyszerűség kedvéért normálos – tanulók válaszai adták a legrosszabb, 2,77-es középértéket, ami még a 10. osztályosokénál is majdnem két tizeddel alacsonyabb. A táblázat alapján jól látszik még az is, hogy ebben a kérdésben a 12. osztályos fakultációs és a 12. osztályos nem fakultációs korosztály különül el a legjobban a többitől. Míg az első azért, mert ők adták a legjobb válaszokat, addig a második pedig azért, mert az ő válaszaik voltak a leggyengébbek. Ez azt mutatja, hogy saját bevallásuk szerint mennyire emlékeznek, illetve tudnák megoldani az ilyen típusú a feladatokat.

A harmadik példaként a C kérdőív 7. feladatát szeretnénk megemlíteni, elemezni.

7. Tudtad, hogy a gyök 2 irracionális?				
	kód	Subset		
		1	2	3
Tukey HSD[a,b]	12. osztály, normál	2,93		
	felsőoktatás, normál		3,46	
	10. osztály, normál		3,54	3,54
	12. osztály, fakt		3,67	3,67
	felsőoktatás, fakt			3,97
	Sig.	1,000	,729	,076

8. táblázat: $\sqrt{2}$-vel kapcsolatos kérdés Tukey-módszerrel

A $\sqrt{2}$ irracionalitására vonatkozó kérdés nem tartozik olyan szorosan a számelmélet témakörébe, mint az előző feladatok, de az erre a kérdésre adott válaszok is szépen mutatják a korosztályok egymáshoz való viszonyát. A 8. táblázatban látható, hogy a 12. osztályos normálosok alkotják egyedül az 1-es csoportot, és élesen elkülönülnek a többi korosztálytól. Ebben a kérdésben is az ő válaszaik lettek a leggyengébbek a korosztályok közül. A 2-es és a 3-mas csoportok közötti határ kevésbé éles, a 10. osztályos normálosok és a 12. osztályos fakultációsok mindkettőbe besorolhatóak, míg a felsőoktatásbeli normálosok csak a 2-es, a felsőoktatás fakultációsok csak a 3-as csoportba. Tehát a közöttük lévő különbséget lehet kiemelni a táblázat alapján. Látható még az, hogy a felsőoktatásbeli fakultációs korosztály válaszainak középértéke 3,97, ami azt jelenti, hogy szinte mindenki azt válaszolta, hogy igen, biztosan tudja, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális, és tudja is, hogy ez mit jelent.

Természetesen nem minden kérdésre adott válasz esetén különülnek el ennyire egymástól a különböző korosztályok. Több olyan kérdés is van, ahol a korosztályokat csak egy nagy csoportba lehet sorolni a Tukey-módszerrel, hiszen nem jelentős a különbség a válaszaik között. Ilyen kérdés például a 11. kérdés, melyben egy kilencre végződő szám nagy hatványának az utolsó számjegyére kérdező feladat szerepelt. Ez azért érdekes feladat, mert azt gondoltuk, hogy ez egyértelműen a könnyű feladatok közé sorolható, hiszen ha elkezdünk hatványozni egy kilencre végződő számot, akkor gyorsan észrevehetjük, hogy az mindig egyre vagy kilencre végződik. Ezután pedig már csak a 2014 paritását kell megvizsgálnunk.

Előzetes felméréseink szerint ez egy olyan típusfeladat, ami több iskolában, osztályban is előfordul, pont azért, mert könnyű és gyorsan rájönnek a diákok a megoldásra, ha elkezdenek gondolkodni rajta. Ez már nem tartozik szorosan az érettségire felkészítő alapfeladatok közé, néhány megkérdezett tanárnál, diáknál nem is szerepelt ehhez hasonló példa.

11. Láttál már olyan feladatot, hogy milyen számjegyre végződik a 19^{2012}?

	kód	Subset
		1
Tukey HSD[a,b]	felsőoktatás, fakt	2,76
	12. osztály, normál	2,79
	felsőoktatás, normál	2,85
	10. osztály, normál	2,91
	12. osztály, fakt	3,10
	Sig.	,424

9. táblázat: Hatványozós kérdés Tukey-módszerrel

A 9. táblázatból leolvasható, hogy ennél a kérdésnél egy csoportba sorolja a korosztályokat a vizsgálat. Érdekes módon ennél a kérdésnél a felsőoktatásbeli fakultációs korosztály középértéke lett a legalacsonyabb, amely nem sokkal tér el a 12. osztályos normálosokétól. Így ebben a kérdésben ők adták a legtöbb rosszabb választ, de a vizsgálat szerint nem jelentős a különbség az egyes korosztályok között. A középértékek 2,9 körül mozognak, ami azt mutatja, hogy ezt a feladatot nem annyira ismerik a diákok, a válaszaik bizonytalanabbak, mint például az előzőleg említett, $\sqrt{2}$-vel kapcsolatos kérdésnél, ahol a legrosszabb középérték a 2,93 volt.

Az utolsó példa, amiről beszélni szeretnénk a Tukey-féle módszerrel kapcsolatosan, az a C kérdőív 4. feladata. Ez a kérdés a számelmélet alaptételében szereplő tartalomra kérdez rá, amely alapismeret már általános iskolában is.

4. Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?			
	kód	Subset	
		1	2
Tukey HSD[a,b]	12. osztály, normál	3,41	
	10. osztály	3,66	3,66
	12. osztály, fakt	3,76	3,76
	felsőoktatás, normál	3,80	3,80
	felsőoktatás, fakt		3,90
	Sig.	,075	,497

10. táblázat: Felbonthatóság Tukey-módszerrel

Ahogy a 10. táblázatban látható, ennél a kérdésnél a középértékek magasak, ami azt jelenti, hogy többségben van az *igen, tudom és azt is, hogy mit jelent* válaszlehetőséget ikszelték a diákok ennél a kérdésnél, de ahogy az a számokból is látszik, nem csak ez a válasz született ennél a kérdésnél. Ez elgondolkodtató, hiszen ez az állítás alapvető a számelméleti, de még az általános matematikai ismereteknél is.

Ennél a kérdésnél is látható, hogy a 12. osztályos normálosok válaszai a leggyengébbek, a felsőoktatásbeli fakultációsoké pedig a legerősebbek. Ez a két korosztály egyértelműen külön csoportba tartozik, míg a többi korosztály átmenetet képez ezek között.

10. Konklúzió

Kutatásunk tehát azzal az észrevétellel indult, hogy az elsőéves egyetemisták nem emlékeznek a számelméleti alapfogalmakra (saját bevallásuk szerint). A kutatás során annak jártunk utána, hogy a különböző korosztálybeli tanulók, illetve az elsőéves egyetemisták mely számelméleti fogalmakkal találkoztak, találkozhattak. A kerettanterv áttanulmányozása és a diákokkal, illetve tanárokkal készített interjúk alapján képet kaptunk arról, hogy a témakörön belül milyen ismeretek birtokába kerülnek a diákok az egyes évfolyamokon. A benyomások pontosítása érdekében kérdőíveket készítettünk, amelyekben a kérdések minden olyan számelméleti fogalmat lefedtek, amik egyáltalán szóba kerülhetnek a közoktatásban. A kérdőívekben a diákok saját megérzéseik szerint nyilatkozhattak ismereteikről anélkül, hogy tudásukat bizonyítaniuk kellett volna. A kérdőívek segítségünkre voltak abban, hogy megtudjuk, mely fogalmak kerülnek elő az iskolában, és hogy ezek mennyire tartósan épültek be a diákok memóriájába. Kutatásunk eredményei között szerepel a kérdőívek statisztikai kiértékelése, mely arra enged következtetni, hogy

- a diákok a fogalmakat nem kapcsolnak össze a tartalmukkal.
- ha két klaszterbe szeretnénk sorolni a korosztályokat, akkor az egyikbe a 10. és 12. osztályos normál szinten tanulók, illetve felsőoktatásbeli normálosok és a matekos normálosok kerülnek. A másik klaszterbe pedig ennél a felosztásnál a 12. osztályos fakultációsok, a felsőoktatásban tanuló fakultációsok valamint a matekos fakultációsok tartoznak.
- ha a matematika szakos egyetemistákat kivesszük a válaszadók közül, akkor a két klaszter a következő: 10. osztályos normálosok, felsőoktatásbeli normálosok és 12. osztályos normálosok, valamint 12. osztályos fakultációsok és felsőoktatásbeli fakultációsok.
- a 12. osztályos normál szinten tanulók tudásszintje rosszabb, mint a többi korosztálybeli tanulóé.

Azt tapasztaltuk tehát, hogy a fakultácóra járó tanulók tudásszintjük alapján kiemelkednek a többiek közül, míg a normál szinten tanulók rosszabb eredményeket mutattak.

Arra a kezdeti kérdésünkre tehát, hogy a diákok valóban nem találkoznak a számelméleti fogalmakkal, vagy csak elfelejtik azokat, a következő választ adhatjuk: A legtöbb fogalommal és összefüggéssel találkoznak ugyan a tanulók az iskolában, de csak kevés ideig foglalkoznak velük, így hamar el is felejtik azokat. Az emelt szintű érettségire készülők előnyt élveznek abból a szempontból, hogy több idejük van a matematikával foglalkozni, több feladatot oldanak meg, és a szóbeli érettségi tételek között is jó eséllyel szerepel egy számelméleti témájú. A normál szinten tanulók viszont csak bizonyos évfolyamokon találkoznak egy-két számelmélethez kapcsolódó feladattal, ami éppen elég ahhoz, hogy az érettségiben szereplő néhány pontos feladatokkal megbirkózzanak. További ismétlés és gyakorlás nélkül azonban a tudásuk rövid időn belül elkopik.

11. Irodalomjegyzék

Ball, D. L. 1990. Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 132-144.

Knausz Imre. 2001. *A tanítás mestersége.* http://mek.oszk.hu/01800/01817/01817.pdf (2014.11.29.)

Leron, U. 1985. A direct approach indirekt proofs. *Educational Studies in Mathematics* 16, 312-325

Movshovitz-Hadar, N., and Hadass, R. 1990., "Preservice Education of Math Teachers Using Paradoxes" *Educational Studies in Mathematics*, 21, 265-287.

Rina Zazkis and Stephen Campbell 1996a. Prime decomposition: Understanding uniqueness. Journal of Mathematical Behavior, 15(2), 207-218.

Rina Zazkis and Stephen Campbell 1996b Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers'Understanding *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 27, No. 5 pp. 540-563

Poranen, Jaska, Haukkanen, Pentti 2012 Didactic Number Theory and Group Theory for School Teachers *Open Mathematical Education Notes* ISSN: 1840-4383 Volume 2 Page Numbers 23-37

Steffe, L. 1990. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36

Zaskis, Rina and Campbell, Stephen R. 2006 *Number theory in mathematics education: perspectives and prospects*. Mahwah, USA: Lawrence Erlbaum Associates

(1) Elementary Integrated Curriculum Framework Montgomery County Public Schools September, 2010 https://www.montgomeryschoolsmd.org/uploadedFiles/curriculum/integrated/EIC-Framework.pdf (2015. 01. 06.)

(2) Mathematics programmes of study: key stage 3 National curriculum in England, September 2013 https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/239058/SECONDARY_national_curriculum_-_Mathematics.pdf (2015. 01. 06.)

(3) Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich, 15.10.2004. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (2015. 01. 06.)

(4) Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss, 4.12.2003
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (2015. 01. 06.)

(5) Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, 18.10.2012.
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (2015. 01. 06.)

(6) Math Teacher' Cicle Network
http://www.mathteacherscircle.org/upcoming-workshops/for-teachers/ (2015. 01. 06.)

(7) *Érettségi feladatsorok.*
http://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/feladatsorok_vizsgatargyankent
(2014.12.29.)

(8.) *Kerettanterv a gimnáziumok 5-12. évfolyama számára.*
http://kerettanterv.ofi.hu/05_melleklet_5-12/index_8_gimn.html (2014.12.29.)

(9.) *Kerettanterv a gimnáziumok 7-12. évfolyama számára.*
http://kerettanterv.ofi.hu/04_melleklet_7-12/index_6_gimn.html (2014.12.29.)

(10) *Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára.*
http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html (2014.12.29.)

(11) *Kerettanterv a szakközépiskolák 9-12. évfolyama számára.*
http://kerettanterv.ofi.hu/06_melleklet_9-12_szki/index_szakkozep.html (2014.12.29.)

(12) *Kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára.*
http://kerettanterv.ofi.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html (2014.12.29.)

12. Mellékletek

1. melléklet:

A tanárokkal készített interjúk főbb kérdései

1. Mikor tanít számelméletet és hány órában? (Pl. 9. osztályban a nevezetes azonosságok után 4 órában.)
2. Milyen könyvet használnak a diákok?
3. Ön milyen tankönyvet használ még kiegészítésként?
4. Mennyi számelméletet tanít, hogyan?
5. Ez miben tér el a tantervtől?
   tanterv: (akár igen/nem is elegendő)
   - oszthatósági szabályok (alap)?
   - kiegészítve (11 stb.)?
   - relatív prímek szorzata (pl. 12,36 stb.)?
   - prímtényezős felbontás?
   - legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös?
   - relatív prímek?
   - egyszerű oszthatósági feladatok?
   - szöveges feladatok megoldása?

   + (matematikatörténeti) kiegészítés:
   - végtelen sok prím létezik?
   - tökéletes számok?
   - barátságos számok?
   - Eukleidész, Mersenne, Euler, Fermat?
6. Milyen típusfeladatokat vesznek?
   Például ezek közül melyek szerepelnek? (igen/nem/csak fakton, szakkörön)
   a. osztók számának meghatározása?
   b. a számelmélet alaptétele?
   c. $5|2a+3 \Rightarrow 5|16a+9b$?
   d. $36|\overline{53x37y}$
   e. $\frac{3n+10}{n+1}$ mely n egészekre lesz egész?
   f. végtelen sok prím létezésének bizonyítása?
   g. szöveges feladatok?
   h. $4|11\ldots1-55\ldots5$?
   i. $3|n^3-n!$?
   j. versenyfeladatok?
   k. megjelenik a teljes indukció, indirekt bizonyítás?
   l. tulajdonságok bizonyítása pl.: $a|b$ és $a|c \Rightarrow a|b+c$ és ezek alkalmazásai?
   m. $\frac{1}{8100}-\frac{1}{16632}$?
   n. egyszerűsítsük: $\frac{756}{792}$?

o. szöveges feladatok (pl. mikor találkoznak a buszok vagy mikor állnak együtt legközelebb a csillagok)?
p. 2008-nak 3-mal való osztási maradéka?
q. 10^{99}-nek 3-mal való osztási maradéka?
r. (b; 270)=45, melyek b lehetséges értékei?
s. Adott két természetes szám, egyik 7-tel való osztási maradéka 2, a másiké 5. Mennyi a két szám összegének 7-es osztási maradéka?
t. más osztási maradékos feladat?

Ezen kívül más? (Elég tankönyv/oldalszám is.)

7. Fontosnak tartja-e ennek a tanítását vagy ezt az időt véleménye szerint érdemesebb lenne mással kitölteni? Melyik anyagrésszel?
8. Ha fontosnak tartja, miért?

Az interjúk során ezek a kérdések határozták meg a beszélgetések irányát, de ezeken kívül, ha úgy hozta a beszélgetés, akkor további kérdéseket is feltettünk.

2. melléklet:

Az eddigi érettségikben előforduló számelmélet feladatok

Középszint:

2005. 05.10.

14. Kiszámoltuk ebben a sorozatban az első 111 tag összegét: 25863.
    b) Igaz-e, hogy 25863 számjegyeit tetszőleges sorrendben felírva mindig hárommal osztható számot kapunk? (Válaszát indokolja!) (3 pont)
    c) Gábor olyan sorrendben írja fel 25863 számjegyeit, hogy a kapott szám néggyel osztható legyen. Milyen számjegy állhat a tízes helyiértéken? (Válaszát indokolja!) (4 pont)

2005. 05.28.

14. a) Iktasson be a 6 és az 1623 közé két számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy számtani sorozat szomszédos tagjai legyenek! (5 pont)
    b) Számítsa ki a 6 és az 1623 közötti néggyel osztható számok összegét! (7 pont)

2005. október

2. Peti felírt egy hárommal osztható hétjegyű telefonszámot egy cédulára, de az utolsó jegy elmosódott. A barátja úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy nulla volt. A kiolvasható szám: 314726□. Igaza lehetett-e Peti barátjának? Válaszát indokolja! (2 pont)

2006. február

15. Összeadtunk ötvenöt egymást követő pozitív páratlan számot, az összeg értéke 3905.
    a) Melyik volt az összegben az első, illetve az ötvenötödik páratlan szám?
    b) Melyik az összeadottak között a legkisebb olyan szám, amelynek a prímtényezős felbontásában két különböző prímszám szerepel, és a négyzete ötre végződik? (8 + 4 = 12 pont)

2006. október

6. Háromjegyű számokat írtunk fel a 0; 5 és 7 számjegyekkel. Írja fel ezek közül azokat, amelyek öttel oszthatók, és különböző számjegyekből állnak! (2 pont)

2007. május

12. A 100-nál kisebb és hattal osztható pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mekkora valószínűséggel lesz ez a szám 8-cal osztható? Írja le a megoldás menetét! (3 pont)

18. a) Határozza meg azt a háromjegyű számot, amelyről a következőket tudjuk:
    - számjegyei a felírás sorrendjében egy számtani sorozat egymást követő tagjai;
    - a szám értéke 53,5-szerese a számjegyei összegének;
    - ha kivonjuk belőle az első és utolsó jegy felcserélésével kapott háromjegyű számot, akkor 594 az eredmény.

    b) Sorolja fel azokat a 200-nál nagyobb háromjegyű számokat, amelyeknek számjegyei a felírás sorrendjében növekvő számtani sorozat tagjai!

    c) Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a b) kérdésben szereplő számok közül véletlenszerűen egyet kiválasztva, a kiválasztott szám osztható 9-cel!

2007. október

5. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
    a) Ha egy természetes szám osztható hattal és tízzel, akkor osztható hatvannal.
    b) A 20-nál kisebb pozitív prímszámok összege páratlan.
    c) A deltoid átlói felezik a belső szögeket. (1-1-1 pont)

2008. május

3. Péter egy 100-nál nem nagyobb pozitív egész számra gondolt. Ezen kívül azt is megmondta Pálnak, hogy a gondolt szám 20-szal osztható. Mekkora valószínűséggel találja ki Pál elsőre a gondolt számot, ha jól tudja a matematikát. (2 pont)

15. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával ötjegyű számokat készítünk az összes lehetséges módon (egy számjegyet többször is felhasználhatunk). Ezek között hány olyan szám van,
    a) amely öt azonos számjegyből áll; (3 pont)
    b) amelyik páros; (4 pont)
    c) amelyik 4-gyel osztható? (5 pont)

2008. október

1. Adja meg a 24 egyjegyű pozitív osztóinak halmazát! (2 pont)

2009. május

8. Írja fel 24 és 80 legkisebb közös többszörösét! Számítását részletezze! (3 pont)

2009. október

2. Legyen az A halmaz a 10-nél kisebb pozitív prímszámok halmaza, B pedig a hattal osztható, harmincnál nem nagyobb pozitív egészek halmaza. Sorolja fel az A, a B és az $A \cup B$ halmazok elemeit! (3 pont)

2010. május

1. Sorolja fel a 2010-nek mindazokat a pozitív osztóit, amelyek prímszámok! (2 pont)

2010. október

8. Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis!
   I. Minden prímszám páratlan.
   II. Létezik páratlan prímszám.
   III. Minden egész szám racionális szám.
   IV. Van olyan irracionális szám, amelyik felírható két egész szám hányadosaként.
   (1-1-1-1 pont)

2011. május

4. Adottak a következő számok: $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^4$ és $b = 2 \cdot 5^2 \cdot 11^3 \cdot 13$. Írja fel a és b legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! A kért számokat elegendő prímtényezős alakban megadni. (2 pont)
7. Az A halmaz az 5-re végződő kétjegyű pozitív egészek halmaza, a B halmaz pedig a kilenccel osztható kétjegyű pozitív egészek halmaza. Adja meg elemeik felsorolásával az alábbi halmazokat: A; B; $A \cap B$; $A \setminus B$ (4 pont)
12. Döntse el az alábbi állítások mindegyikéről, hogy igaz-e vagy hamis!
   A: Ha két szám négyzete egyenlő, akkor a számok is egyenlők.
   B: A kettes számrendszerben felírt 10100 szám a tízes számrendszerben 20.
   C: Egy hat oldalú konvex sokszögnek 6 átlója van. (3 pont)

2011. október

1. Írja fel prímszámok szorzataként a 420-at! (2 pont)
17. a) Hány olyan négy különböző számjegyből álló négyjegyű számot tudunk készíteni, amelynek mindegyik számjegye eleme az $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7\}$ halmaznak?
   b) Hány 4-gyel osztható hétjegyű szám alkotható az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből?
   c) Hány olyan hatjegyű, hárommal osztható szám írható fel, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazza, és e számjegyek mindegyike legalább egyszer előfordul benne? (3+6+8 pont)

2012. május

16. Tekintsük a következő halmazokat:

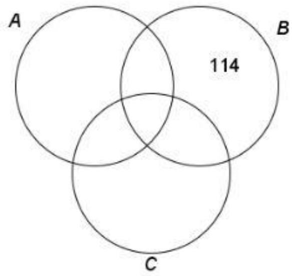
A = {a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok};

B = {a 300-nál nem nagyobb 3-mal osztható pozitív egész számok};

C = {a 400-nál nem nagyobb 4-gyel osztható pozitív egész számok}.

a) Töltse ki a táblázatot a minta alapján, majd a táblázat alapján írja be az 52, 78, 124, 216 számokat a halmazábra megfelelő tartományába! (8 pont)

	A halmaz	*B* halmaz	*C* halmaz
114	*nem eleme*	*eleme*	*nem eleme*
52			
78			
124			
216			



b) Határozza meg az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszámát! (3 pont)

c) Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az A halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a B, sem a C halmaznak! (6 pont)

2013. május

12. Adja meg annak valószínűségét, hogy a 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám prím! (2 pont)

2013. október

4. Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!

A) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig kisebb mindkét számnál.

B) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója mindig osztója a két szám összegének.

C) Két különböző pozitív egész szám legnagyobb közös osztója nem lehet 1. (2 pont)

11. Adja meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 60-nak! Válaszát indokolja!

2014. május

1. Legyen A halmaz a 8-nál nem nagyobb pozitív egész számok halmaza, B pedig a 3-mal osztható egyjegyű pozitív egész számok halmaza. Elemeinek felsorolásával adja meg az A, a B, az $A \cap B$ és az $A \setminus B$ halmazt! (1-1-1-1 pont)
7. Melyik számjegy állhat a $\overline{2582X}$ ötjegyű számban az X helyén, ha a szám osztható 3-mal? (3 pont)

2014. október

6. Az első 100 pozitív egész szám közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott szám osztható 5-tel! (2 pont)
12. Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)!
   A: Minden valós szám abszolút értéke pozitív.
   B: $16^{\frac{1}{4}} = 2$
   C: Ha egy szám osztható 6-tal és 9-cel, akkor biztosan osztható 54-gyel is. (2 pont)

Emeltszint

2005. május

-

2005. október

6. A következő táblázat egy 30 fős kilencedik osztály első félév végi matematikaosztályzatainak megoszlását mutatja.

Érdemjegy	5	4	3	2	1
Tanulók száma	4	7	9	8	2

   a) Ábrázolja az érdemjegyek eloszlását oszlopdiagramon! (3 pont)
   b) Mennyi a jegyek átlaga? (2 pont)
   c) Véletlenszerűen kiválasztjuk az osztály egy tanulóját. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a tanuló legalább 3-ast kapott félév végén matematikából? (3 pont)
   d) Két tanulót véletlenszerűen kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy érdemjegyeik összege osztható 3-mal?(8 pont)

2006. május:

4. a) Legyen (a_n) egy mértani sorozat, melynek első tagja 5, hányadosa 3. Mennyi a valószínűsége, hogy ha ennek a mértani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad?

   b) Legyen (b_n) egy számtani sorozat, amelynek az első tagja 5, és a differenciája 3. Mekkora a valószínűsége, hogy ha ennek a számtani sorozatnak az első 110 tagjából egyet véletlenszerűen kiválasztunk, akkor a kiválasztott tag 11-gyel osztva 1 maradékot ad? (6+7)

2006. október:

-

2007. május:

-

2007. október:

-

2008. május:

-

2008. október:

-

2009. május:

-

2009. október:

-

2010. május:

-

2010. október:

2. a) Hány olyan tízjegyű pozitív egész szám van, amelynek minden számjegye a $\{0;\ 8\}$ halmaz eleme?

   b) Írja fel a 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és a 8-as számjegyeket tartalmazza!

(A feladat megoldása során fokozottan vegye figyelembe a 3. oldalon található 5. és 6. pontban előírtakat!) (3+7 pont)

(Az 5. pont: A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!

A 6. pont: Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetők legyenek!)

2011. május:

-

2011. október:

6. a) Két szabályos dobókockát egyszerre feldobunk. Számítsa ki a következő két esemény valószínűségét:

   A: A: a dobott pontok összege prím;

   B: B: a dobott pontok összege osztható 3-mal.

   b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből véletlenszerűen kiválasztunk három különbözőt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával 4-gyel osztható háromjegyű számot tudunk képezni? (6+5 pont)

2012. május:

-

2012. október

-

2013. május:

9. Egy dobozban 17 darab egyforma sugarú golyó van. A golyók közül 8 darab sárga és 9 darab zöld.

   a) Visszatevés nélkül kihúzunk a dobozból 3 golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott 3 golyó egyszínű?

   b) Ha úgy húzunk ki a dobozból 5 golyót, hogy a kivett golyót minden egyes húzás után visszatesszük, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 alkalommal sárga golyót, 2 alkalommal pedig zöld golyót húzunk?

   c) A golyók meg vannak számozva 1-től 17-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy visszatevés nélkül 3 golyót kihúzva a golyókon található számok összege osztható 3-mal? (4+4+8 pont)

2013. október:

-

2014. május:

1. a) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm^2 ?

   b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van?

3. melléklet:

Kérdőív A változat

Kérdőív diákok részére

(A változat)

Korosztály: 10. évfolyam 12. évfolyam egyetemista (kar: _____)

Nem: fiú lány

Kérdések: (A válaszadáskor az érettségi előtti tanulmányaidra gondolj.)

Ha jártál ezek valamelyikére, akkor **húzd alá**:

- matematika fakultáció
- matematika tagozat

		biztosan nem volt ilyen	nem emlékszem rá, hogy lett volna ilyen	hallottam már róla, de nem tudom pontosan mi az	hallottam és tudom is, mit jelent
1.	Hallottad már a számelmélet kifejezést?				
2.	Ismered a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?				
3.	Hallottad már a legnagyobb közös osztó kifejezést?				
4.	Tudtad, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális?				
5.	Hallottad-e már a legkisebb közös többszörös kifejezést?				
6.	Találkoztál már a 3-mal és 9-cel való oszthatósági szabállyal?				
7.	Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?				
8.	Hallottál a számelmélet alaptételéről?				
9.	Tudtad, hogy $a - b \mid a^n - b^n$ minden n egészre?				
10.	Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?				
11.	Hallottál róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?				
12.	Tanultad a törtek egyszerűsítését?				
13.	Tanultad a törtek közös nevezőre hozását?				
14.	Tudsz módszert az osztók számának meghatározására?				
15.	Tudod hogyan lehet átváltani egy 4-es számrendszer számot 5-ös számrendszerbelivé?				
16.	Hallottad már a relatív prím kifejezést?				

4. melléklet:
Kérdőív B változat

Kérdőív diákok részére

(B változat)

Korosztály: 10. évfolyam 12. évfolyam egyetemista (kar: _____)

Nem: fiú lány

Kérdések: (A válaszadáskor az érettségi előtti tanulmányaidra gondolj.)

Ha jártál ezek valamelyikére, akkor **húzd alá**: • matematika fakultáció • matematika tagozat		biztosan nem volt ilyen	nem emlékszem rá, hogy lett volna ilyen	hallottam már róla, de nem tudom pontosan mi az	hallottam és tudom is, mit jelent
1.	Hallottad már a számelmélet kifejezést?				
2.	Ismered a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?				
3.	Tanultad a törtek egyszerűsítését?				
4.	Tanultad a törtek közös nevezőre hozását?				
5.	Találkoztál ilyen típusú feladattal: $3\mid\overline{54x23}$ ahol x lehetséges értékeit keressük?				
6.	Tudtad, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális?				
7.	Hallottál a számelmélet alaptételéről?				
8.	Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?				
9.	Hallottad-e már a legkisebb közös többszörös kifejezést?				
10.	Hallottad már a legnagyobb közös osztó kifejezést?				
11.	Hallottál róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?				
12.	Hallottad már a relatív prím kifejezést?				
13.	Ismered a 3-mal és 9-cel való oszthatósági szabályt?				
14.	Tudsz módszert az osztók számának meghatározására?				
15.	Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?				
16.	Tudod hogyan lehet átváltani egy 4-es számrendszer számot 5-ös számrendszerbelivé?				

5. melléklet:

Kérdőív C változat

Kérdőív diákok részére

(C változat)

Korosztály: 10. évfolyam 12. évfolyam felsőoktatás (kar:______)

Nem: fiú lány

Kérdések: (A válaszadáskor az érettségi előtti tanulmányaidra gondolj.)

Milyen formában tanulod a matematikát? (**húzd alá**)

- normál
- matematika fakultáció
- matematika tagozat

		biztosan nem volt ilyen	nem emlékszem rá, hogy lett volna ilyen	hallottam már róla, de nem tudom pontosan mi az/nem tudnék rá pontosan válaszolni	hallottam és tudom is, mit jelent/tudnék rá válaszolni
1.	Hallottad már a számelmélet kifejezést?				
2.	Ismered a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?				
3.	Tudod hogyan lehet átváltani egy 4-es számrendszerbeli számot 5-ös számrendszerbelivé?				
4.	Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?				
5.	Hallottál a számelmélet alaptételéről?				
6.	Hallottad már a relatív prím kifejezést?				
7.	Tudtad, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális?				
8.	Hallottál már olyan szabályt, hogy egy szám mikor osztható 3-mal vagy 9-cel?				
9.	Tudtad, hogy az $a^n - b^n$ minden pozitív *n* egész esetén felbomlik $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ alakban?				
10.	Láttál már olyan feladatot, hogy milyen x-re lesz 3-mal osztható az $\overline{54x32}$?				
11.	Láttál már olyan feladatot, hogy milyen számjegyre végződik a 19^{2012}?				
12.	Hallottál róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?				
13.	Tanultál a legnagyobb közös osztóról?				
14.	Hallottál már arról, hogy egy négyzetszám 3-mal osztva milyen maradékot adhat?				
15.	Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?				
16.	Tanultad, hogy a legkisebb közös többszöröst a törtek összeadásánál használjuk?				
17.	Láttál olyan feladatot, hogy a *100!* hány 0-ra végződik?				

6. melléklet:

Kérdőív D változat

Kérdőív diákok részére

(D változat)

Korosztály: 10. évfolyam 12. évfolyam felsőoktatás (kar:______)

Nem: fiú lány

Kérdések: (A válaszadáskor az érettségi előtti tanulmányaidra gondolj.)

Milyen formában tanulod a matematikát? (**húzd alá**)

- normál
- matematika fakultáció
- matematika tagozat

		biztosan nem volt ilyen	nem emlékszem rá, hogy lett volna ilyen	hallottam már róla, de nem tudom pontosan mi az/nem tudnék rá pontosan válaszolni	hallottam és tudom is, mit jelent/tudnék rá válaszolni
1.	Hallottad már a számelmélet kifejezést?				
2.	Ismered a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?				
3.	Tudod hogyan lehet átváltani egy 4-es számrendszerbeli számot 5-ös számrendszerbelivé?				
4.	Hallottál a számelmélet alaptételéről?				
5.	Tanultál a legnagyobb közös osztóról?				
6.	Hallottad már a relatív prím kifejezést?				
7.	Tudtad, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális?				
8.	Hallottál róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?				
9.	Láttál már olyan feladatot, hogy milyen x-re lesz 3-mal osztható az $\overline{54x32}$?				
10.	Hallottál már arról, hogy egy négyzetszám 3-mal osztva milyen maradékot adhat?				
11.	Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?				
12.	Hallottál már olyan szabályt, hogy egy szám mikor osztható 3-mal vagy 9-cel?				
13.	Láttál már olyan feladatot, hogy milyen számjegyre végződik a 19^{2012}?				
14.	Láttál olyan feladatot, hogy a *100!* hány 0-ra végződik?				
15.	Tudtad, hogy az $a^n - b^n$ minden pozitív *n* egész esetén felbomlik $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$ alakban?				
16.	Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?				
17.	Tanultad, hogy a legkisebb közös többszöröst a törtek összeadásánál használjuk?				

7. melléklet:

Az egyes kérdésekhez tartozó kördiagramok

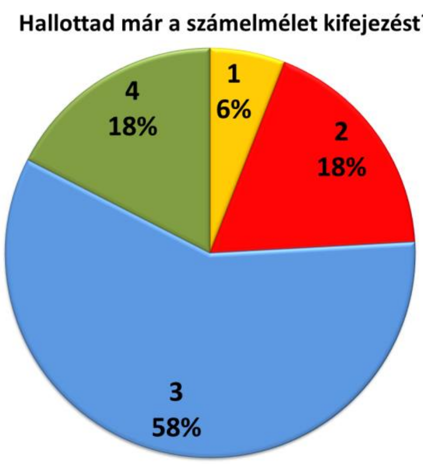
Kategóriák jelentése:

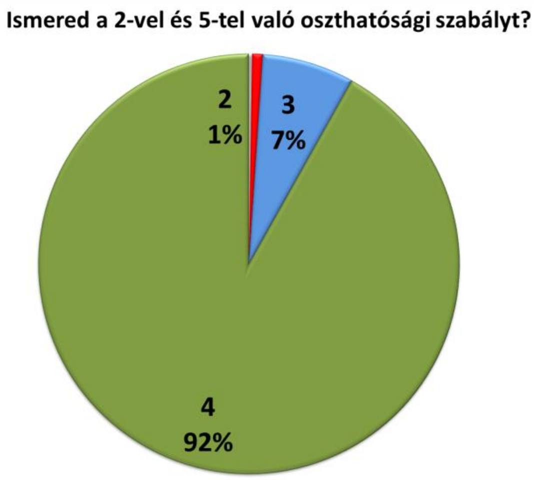
1: biztosan nem volt ilyen

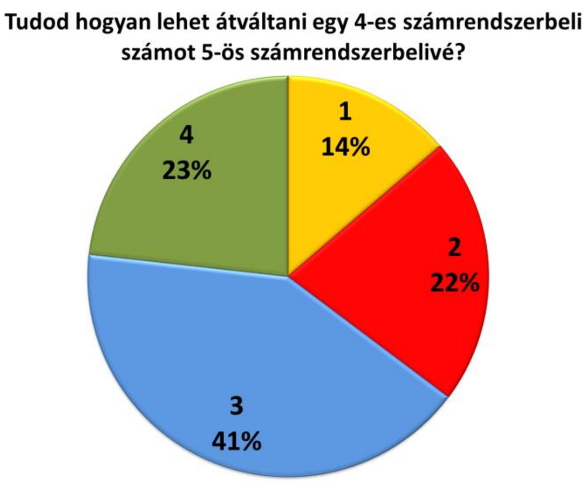
2: nem emlékszem rá, hogy lett volna ilyen

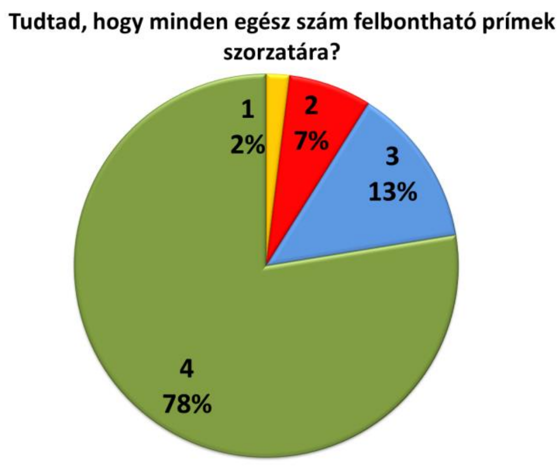
3: hallottam már róla, de nem tudom pontosan mi az/nem tudnék rá pontosan válaszolni

4: hallottam és tudom is, mit jelent/tudnék rá válaszolni

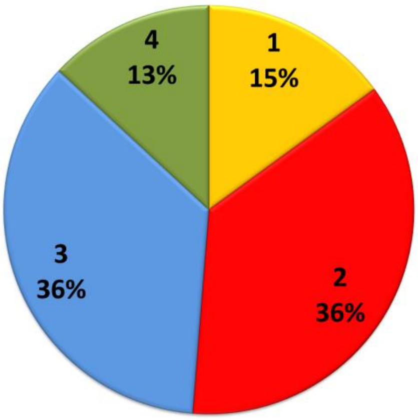




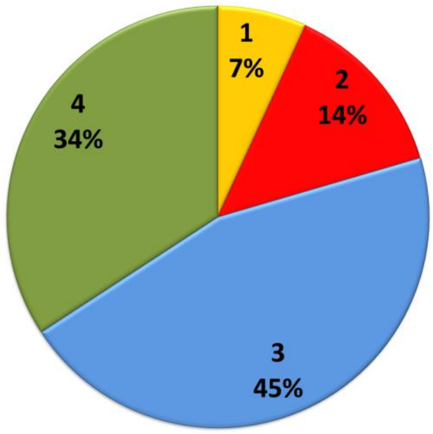




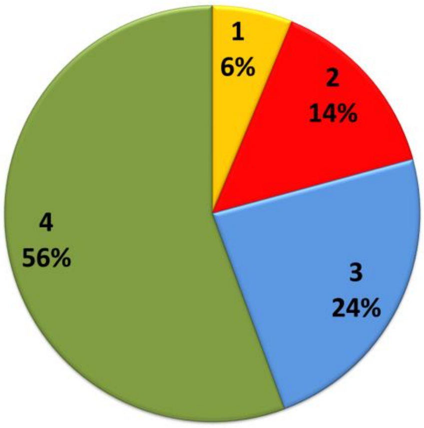
Hallottál a számelmélet alaptételéről?



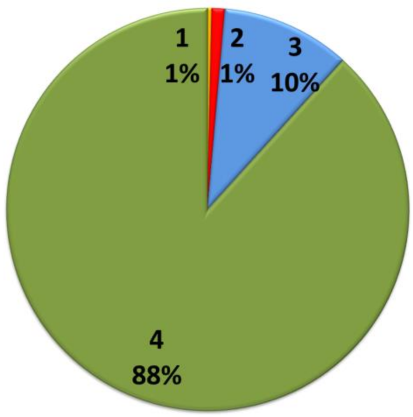
Hallottad már a relatív prím kifejezést?



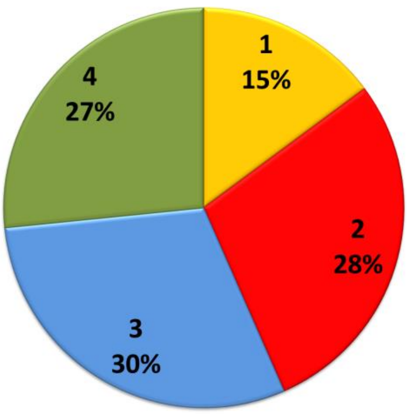
Tudtad, hogy a gyök 2 irracionális?



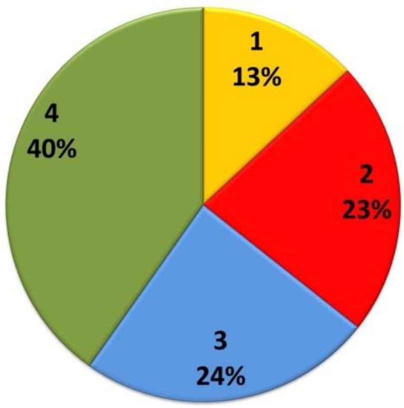
Hallottál már olyan szabályt, hogy egy szám mikor osztható 3-mal vagy 9-cel?



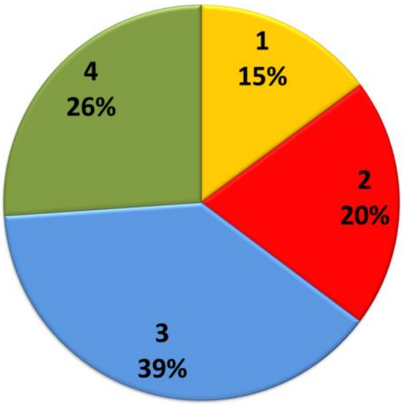
Tudtad, hogy az a^n-b^n minden pozitív n egész esetén felbomlik $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})$ alakban?



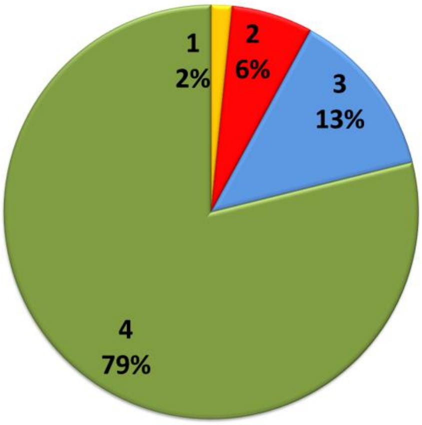
Láttál már olyan feladatot, hogy milyen x-re lesz 3-mal osztható az $\overline{54x32}$?



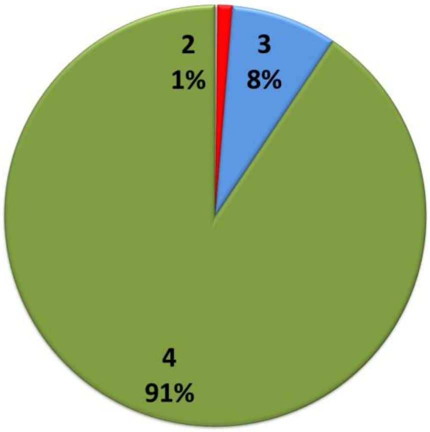
Láttál már olyan feladatot, hogy milyen számjegyre végződik a 19^{2012}?



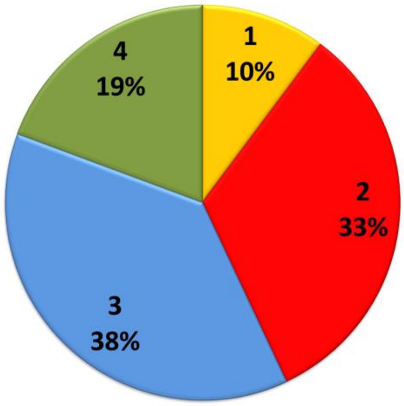
Hallottál róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?



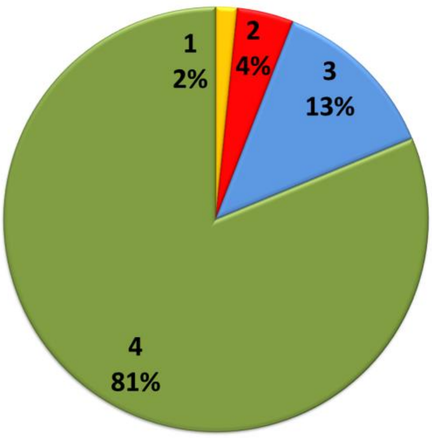
Tanultál a legnagyobb közös osztóról?



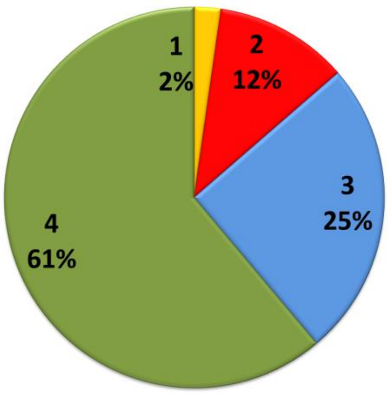
Hallottál már arról, hogy egy négyzetszám 3-mal osztva milyen maradékot adhat?



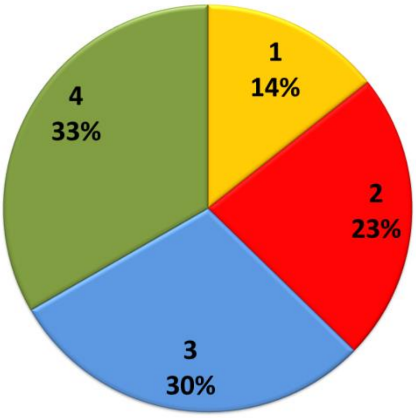
Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?



Tanultad, hogy a legkisebb közös többszöröst a törtek összeadásánál használjuk?



Láttál olyan feladatot, hogy a 100! hány 0-ra végződik?



8. melléklet:

Varianciaanalízist kiegészítő Tukey-módszer eredményei kérdésenként

Korosztályok kódolása:

100: 10. osztály

120: 12. osztály, normál

121: 12. osztály, fakultáció

200: felsőoktatás, normál

201: felsőoktatás, fakultáció

Kérdésenkénti eredmények:

- Hallottad már a számelmélet kifejezést?

1. Hallottad már a számelmélet kifejezést?			
	kod	N	Subset
			1
TukeyHSD[a,b]	200	99	2,77
	201	29	2,90
	100	134	2,93
	120	192	2,93
	121	21	2,95
	Sig.		,672

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,459.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Ismered a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?

2. Ismered a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?			
	kod	N	Subset
			1
TukeyHSD[a,b]	100	134	3,82
	120	192	3,88
	200	99	3,95
	121	21	3,95
	201	29	3,97
	Sig.		,316

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,137.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Tudod hogyan lehet átváltani egy 4-es számrendszerbeli számot 5-ös számrendszerbelivé?

3. Tudod hogyan lehet átváltani egy 4-es számrendszerbeli számot 5-ös számrendszerbelivé?			
	kod	N	Subset
			1
TukeyHSD[a,b]	120	192	2,71
	200	99	2,87
	100	134	2,95
	121	21	3,00
	201	29	3,07
	Sig.		,282

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,799.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?

4. Tudtad, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?				
	kod	N	Subset	
			1	2
TukeyHSD[a,b]	120	192	3,41	
	100	134	3,66	3,66
	121	21	3,76	3,76
	200	99	3,80	3,80
	201	29		3,90
	Sig.		,075	,497

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,534.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Hallottál a számelmélet alaptételéről?

5. Hallottál a számelmélet alaptételéről?			
	kod	N	Subset
			1
TukeyHSD[a,b]	200	99	2,19
	121	21	2,38
	120	192	2,39
	100	134	2,62
	201	29	2,62
	Sig.		,076

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,660.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Hallottad már a relatív prím kifejezést?

6. Hallottad már a relatív prím kifejezést?				
	kod	N	Subset	
			1	2
TukeyHSD[a,b]	200	99	2,93	
	120	192	3,04	
	100	134	3,13	3,13
	121	21	3,29	3,29
	201	29		3,59
	Sig.		,227	,064

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,694.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Tudtad, hogy a gyök 2 irracionális?

7. Tudtad, hogy a gyök 2 irracionális?					
	kod	N	Subset		
			1	2	3
TukeyHSD[a,b]	120	192	2,93		
	200	99		3,46	
	100	134		3,54	3,54
	121	21		3,67	3,67
	201	29			3,97
	Sig.		1,000	,729	,076

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,635.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Hallottál már olyan szabályt, hogy egy szám mikor osztható 3-mal vagy 9-cel?

8. Hallottál már olyan szabályt, hogy egy szám mikor osztható 3-mal vagy 9-cel?			
	kod	N	Subset
			1
TukeyHSD[a,b]	120	192	3,83
	100	134	3,85
	121	21	3,86
	200	99	3,87
	201	29	3,97
	Sig.		,420

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,151.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Tudtad, hogy az $a^n - b^n$ minden pozitív n egész esetén felbomlik $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + ? + b^{n-1})$ alakban?

9. Tudtad, hogy az $a^n - b^n$ minden pozitív n egész esetén felbomlik $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + ? + b^{n-1})$ alakban?				
	kod	N	Subset	
			1	2
TukeyHSD[a,b]	100	134	2,73	
	200	99	2,83	
	120	192	2,88	
	121	21	2,95	
	201	29		3,59
	Sig.		,799	1,000

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,939.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Láttál már olyan feladatot, hogy milyen x-re lesz 3-mal osztható az $\overline{54x32}$?

10. Láttál már olyan feladatot, hogy milyen x-re lesz 3-mal osztható az $\overline{54x32}$?					
	kod	N	Subset		
			1	2	3
TukeyHSD[a,b]	120	192	2,77		
	100	134	2,96	2,96	
	200	99	3,13	3,13	
	201	29		3,52	3,52
	121	21			3,76
	Sig.		,430	,074	,784

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = 1,093.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Láttál már olyan feladatot, hogy milyen számjegyre végződik a 19^{2012}?

11. Láttál már olyan feladatot, hogy milyen számjegyre végződik a 19^{2012}?			
	kod	N	Subset
			1
TukeyHSD[a,b]	201	29	2,76
	120	192	2,79
	200	99	2,85
	100	134	2,91
	121	21	3,10
	Sig.		,424

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,916.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Hallottál róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?

12. Hallottál róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?				
	kod	N	Subset	
			1	2
TukeyHSD[a,b]	120	192	3,58	
	200	99	3,72	3,72
	100	134	3,72	3,72
	201	29	3,90	3,90
	121	21		4,00
	Sig.		,137	,220

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,430.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Tanultál a legnagyobb közös osztóról?

13. Tanultál a legnagyobb közös osztóról?			
	kod	N	Subset
			1
TukeyHSD[a,b]	120	192	3,78
	100	134	3,83
	121	21	3,86
	200	99	3,89
	201	29	4,00
	Sig.		,089

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,189.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Hallottál már arról, hogy egy négyzetszám 3-mal osztva milyen maradékot adhat?

14. Hallottál már arról, hogy egy négyzetszám 3-mal osztva milyen maradékot adhat?			
	kod	N	Subset
			1
TukeyHSD[a,b]	200	99	2,62
	100	134	2,72
	120	192	2,72
	121	21	2,95
	201	29	2,97
	Sig.		,311

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,794.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?

15. Tudod, hogy mi az a maradékos osztás?			
	kod	N	Subset
			1
TukeyHSD[a,b]	100	134	3,74
	120	192	3,76
	200	99	3,78
	121	21	3,86
	201	29	3,93
	Sig.		,439

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,307.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Tanultad, hogy a legkisebb közös többszöröst a törtek összeadásánál használjuk?

16. Tanultad, hogy a legkisebb közös többszöröst a törtek összeadásánál használjuk?				
	kod	N	Subset	
			1	2
TukeyHSD[a,b]	121	21	3,24	
	120	192	3,32	
	100	134	3,53	3,53
	200	99	3,59	3,59
	201	29		3,93
	Sig.		,183	,085

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = ,597.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.

- Láttál olyan feladatot, hogy a 100! hány 0-ra végződik?

17. Láttál olyan feladatot, hogy a 100! hány 0-ra végződik?			
	kod	N	Subset
			1
TukeyHSD[a,b]	100	134	2,53
	200	99	2,82
	201	29	2,90
	120	192	2,92
	121	21	2,95
	Sig.		,246

Meansforgroupsinhomogeneoussubsetsare displayed.Basedonobservedmeans. The errorterm is MeanSquare(Error) = 1,018.
a.UsesHarmonicMeanSampleSize = 47,676.
b. Alpha = ,05.