EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

CSÁNYI PETRA – FÁBIÁN KATA –

POZSONYI ENIKŐ – SZABÓ ZSANETT

SZÁMELMÉLET TEGNAP ÉS HOLNAP

Matematika tanári MA

TDK

Témavezető:

Szabó Csaba

MTA doktora, egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2014

1. Tartalomjegyzék

2. Bevezető

A dolgozat azzal foglalkozik, hogy a magyarországi általános- és középiskolás diákok saját bevallásuk szerint mit tudnak, illetve mire emlékeznek a számelméleti alapfogalmakból (Csányi – Pozsonyi – Szabó 2014). A szerzők dolgozatukban először a kerettantervet vizsgálták meg. Megkeresték benne az összes olyan pontot, ahol a számelmélet tanításáról szó esik. Ezután interjúkat készítettek tanárokkal az ország több pontján, majd megnézték a gyerekek füzeteit is, hogy kiderüljön, mi az, ami valóban nem hangzik el az órákon, és mi az, amit a hallgatók csak letagadnak/elfelejtenek. Ezek után arra a megállapításra jutottak, hogy saját bevallásuk szerint a diákok általában még a számelmélet alapjait sem sajátították el.

Ebben a dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy a diákok saját tudásukról alkotott véleménye helytálló-e, és mit takar az általuk bevallott tudás illetve nemtudás. Ehhez az előző dolgozatban leírt diagnosztikus értékelést is figyelembe véve dolgozatokat állítottunk össze. Az első tapasztalatok után a dolgozatokból elkészítettünk egy javított, második verziót, és a továbbiakban ezeket írattuk meg a diákokkal.

A dolgozatok eredményeit több szempontból kielemeztük. Többfajta statisztikát készítettünk, kigyűjtöttük a típushibákat és a megoldási módszereket. Ezeket elemezve a kép tragikus. Kiderül, hogy a magyar középiskolások számelmélet tudása megfelel az előző dolgozatban alkotott képnek. Ahogy Kanadában az egyetemeken (Zazkis – Campbell 1996a), a magyar középiskolákban is változtatásra van szükség. Ezért vizsgálni kezdtük, hogy hogyan lehetne az iskolai számelmélet oktatást hatékonyabbá tenni.

Emiatt elmentünk megkérdezni a Debreceni Egyetem számelmélet oktatóit (Pintér Ákos, Gaál István, Hajdu Lajos), hogy szerintük mit lenne fontos megtanítani számelméletből az iskolában. Budapesten Károlyi Gyulát és Gyarmati Katalint kérdeztük ugyanerről. A kutatók válaszaira támaszkodva vizsgálni kezdtük, hogy mire jó a számelmélet, azaz milyen szerepet játszik a számelmélet a mindennapi életben és a matematikán belül. Két fő irányt tudtunk megkülönböztetni: az egyik a számelmélet alkalmazása a tudományban (titkosírás, titkosítás, kódolás, véletlen módszerek), illetve a mindennapi életben (naptár, óra, bankkártyák stb.). A másik a számelmélet összetett gondolkodásfejlesztő hatása. Ahogy a számelmélettel foglalkozó oktatók is hangsúlyozták, fontos a spiralitás elvét szem előtt tartva tanítani. Ennek megfelelően olyan feladatokat készítettünk, amelyekhez korábban tanult fogalmakat kell feleleveníteni a számelmélet tanulása közben, illetve amelyek a számelméleti fogalmak átismétlését igénylik más anyagrészek tanulása közben. Az algoritmusok, titkosírás irányába mutató feladatokat is megfogalmaztunk. Dolgozatunkban ezekből is bemutatunk néhányat.

Dolgozatunk egy nagyobb munka része. A dolgozat fizikai kereteit figyelembe véve eredményeinket nem teljes terjedelmükben közöljük. Bizonyos részekről csak említést teszünk, hogy a kutatás legfőbb vonulata jól látható maradjon.

Ahhoz, hogy a magyarországi helyzetet és eredményeket értékelni tudjuk, szükségünk volt arra, hogy utánajárjunk: más országokban milyen követelményeket támaszt a kerettanterv erre a témakörre vonatkozóan. Az angol kerettantervben (1) hasonló kulcsszavakat találtunk, mint a magyarországiban, ám ott csak a 100-nál kisebb számokat kell tudni faktorizálni, és csak a 20-nál kisebb prímeket kell ismerni. A középiskolás követelményben szerepel még a legnagyobb közös osztó, a legkisebb közös többszörös, a prím és a prímfelbontás kifejezések szókincsszerű használata (2). A német kerettanterv csak irányadó (3, 4, 5), de nem szerepel benne a számelmélet kifejezés. Baden-Württemberg tartomány tematikájában például semmilyen számelméleti vonatkozás nincs. Ha rákeresünk a számelmélet címszóra az Amerikai Matematikatanárok Közösségének honlapján (6), akkor csupa problémamegoldó konferenciát és workshopot találunk. Az első igazán számelméletinek is nevezhető módszertani kutatási eredmény a 80-as évek végén jelent meg (Ball 1990). Ebben kiderül, hogy a törtek osztásában mutatkozó hiányosságok visszavezethetőek a számelméleti alapok hiányosságaira. Azt, hogy a számelmélet milyen széles spektrumban tükrözi az ember matematikai gondolkodását, már több helyen kimutatták: prímszámokra vonatkozó tételek megértése kapcsán vizsgálták, hogy az emberi agy mennyire fogadja be a paradoxon szerepét a bizonyításokban (Movshovitz – Hadar 1990) illetve hogyan fedezi föl a konstruktív bizonyítás lényegét (Leron 1985). A fenti kísérletek és kutatások általános iskolai tanárjelölteket céloztak meg, csakúgy, mint az eddigi legáttekintőbb felmérések (Zazkis – Campbell 1996b, 1996a). Ezek a kutatások abból a megállapításból indultak ki, hogy a matematika oktatása a tanárok saját tudásának fejlesztésére és elmélyítésére alapul (Steffe 1990). A cikk következtetése meglehetősen egyszerűsített: a leendő tanárok nem értik a számelméletet, valamit tenni kell. Egyetemistákon végzett számelmélet tudással kapcsolatos vizsgálatokat (Zazkis – Campbell 2006) gyűjteményben találhatóak. Ez a válogatás az első számelmélet oktatásról szóló konferencia anyagának megjelentetett változata. Középiskolások körében végzett hasonló, számelméleti kutatásokról azonban nincsen tudomásunk.

A memória és az agy működését korszakváltóan új szemszögből elemző cikk (Banikowski 1999) és David Tall ezirányú többévtizedes kutatásait fölölelő monográfia (Tall 2012) számunkra rámutatnak arra, hogy a tudás felmérésének technikáján is változtatni kell.

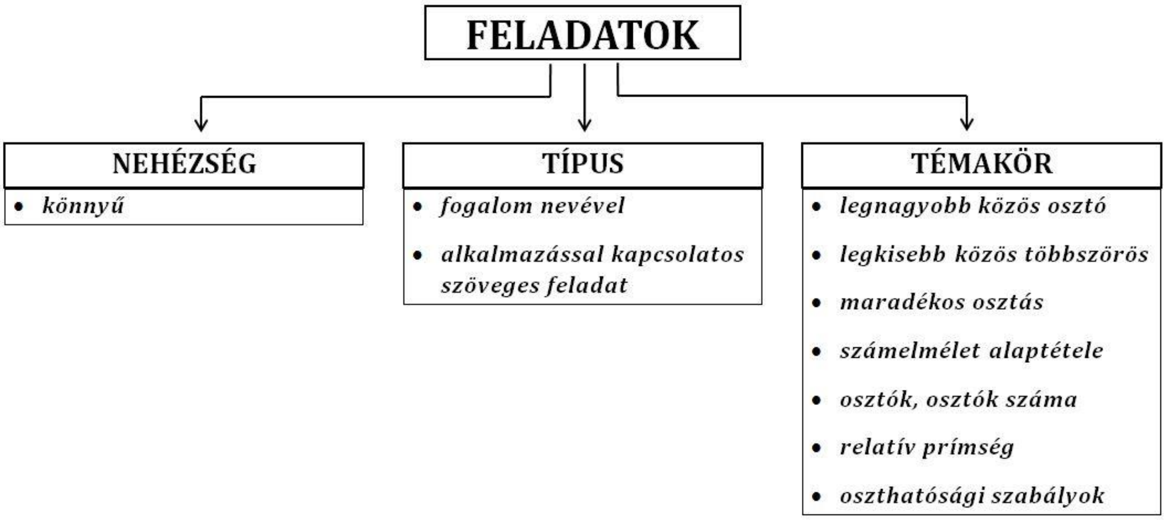
Míg eddig sokan Pólya általános sikerű fejtegetéseit (Pólya 2000) joggal tekintették a gondolkodás működését leíró alapműnek, ma már úgy gondoljuk, hogy az 1945-ben megjelent klasszikus tehetséges gyerekek egy lehetséges gondolkodásmódját elemző mű. Ezzel nem csorbítani szeretnénk Pólya munkásságának jelentőségét, csak jelezni, hogy a kor előrehaladtával a gondolkodás módszertanának tudománya is sokat fejlődött.

Tall munkái nyomán tudjuk, hogy a gondolkodás és a befogadás minden embernél más és más. Bár a tesztekkel elsősorban a lexikai tudást kívántuk felmérni, matematikában ez mindig a megértés valamely fokának elérésével kell, hogy járjon. A tanulási folyamat szintjeit általánosan a Bloom-féle taxonómia (Falus 2003: 151) alapján szintezik. Matematikában ezt finomítják a van Hiele szintek (Hiele 1986). Bár van Hiele eredetileg a matematika teljes befogadására építette fel szintjeit, azok elsősorban a geometriai gondolkodás szintjeinek szimbólumaként terjedtek a köztudatban. Tall (Tall 2012) elemzi is, mennyire nem alkalmazható ez az algebrára, a (Colignatus 2014)-ben pedig kritizálják Tall ezen nézeteit, és kiemelik, hogy a van Hiele munkásságának fő érdeme a szintekben való gondolkodás felvetése, nem pedig a szintek pontos meghatározása. Van Hiele (Hiele 2002) átfogalmazza elméletét: a legtöbb tudományágnak megvannak a különböző gondolkodási szintjei: a látható, a leíró és az elméleti szintek. Ugyanitt nyilatkozik a számelmélet és az algebra kapcsolatáról: az aritmetikából az algebrába való átmenet nem tekinthető új szintnek. A betűk mennyiségeket jelölnek, így ebben nincs semmi új. Erre Tall (Tall 2013: 105) válasza az, hogy a diákok sokkal nagyobb sikereket érnek el az olyan egyenletek megoldásánál, ahol csak az egyik oldalon van változó.

Mindezek alapján megalapozottnak tűnik egy számelméleti-algebrai gondolkodásmodell felállítása. Ez a dolgozat magyar nyelven íródik, magyar emberek olvassák. Ennek a jelentősége akkor jött elő, amikor idegen nyelvre kezdtük fordítani a munkát. A kifejezések angol fordításai egészen biztosan nem fogják teljes mértékben követni a magyar jelentést. Ugyanez a helyzet állt elő, amikor Freudenthal *„zich realiseren”* kifejezése angolul *„realistic”* majd magyarul realisztikus lett, holott a zich előtag a hollandban a visszaható igeelőtag (mos-mosdik), így a magyar durva fordítása *„saját magának elképzelhető matematika oktatás”* lenne a most használatos és sokak által félreértelmezett *„realisztikus matematika oktatásnak”*. Így az olvasónak sokkal inkább a szintek tartalmára, mint az elnevezésre kell összpontosítania. Mielőtt továbbfűznénk a gondolatot, nem állhatjuk meg, hogy ne idézzük Bessenyei idevágó gondolatát, amely dolgozatunk mottóját is adja: *„Minden nemzet a maga nyelvén lett tudós, de idegenen sohasem.”*

3. Dolgozatok összeállítása

A bevezetőben leírtak szellemében két dolgozatot állítottunk össze. (1. melléklet: Dolgozat A változat1. melléklet és 2. melléklet) Három szempontot figyelembe véve.



Először is a dolgozat legyen könnyű. A dolgozatban elsősorban nem logikai- és feladatmegoldási képességeket, hanem számelméleti tárgyi tudást akartunk felmérni. Arra koncentráltunk, hogy megállapíthassuk, hogy a tanulók milyen szinten sajátították el a kérdéses fogalmakat. A legegyszerűbb számelméleti fogalmakra és módszerekre kérdeztünk rá feladatok formájában úgy, hogy a feladatok megoldása az alapvető számelméleti tudáson kívül ne kívánjon meg semmi mást. Ne legyenek benne nehezebb logikai lépések, lehetőleg csak egyfajta módszert kelljen egy-egy feladatban alkalmazni és azt is a legegyszerűbb formában. Ennek megfelelően a dolgozatot bármilyen korosztály nehézségek nélkül kitöltheti, ha már tanulta a számelmélettel kapcsolatos alapfogalmakat.

A dolgozat összeállításánál először az időkeretet állapítottuk meg. Amíg egy diák pillanatok alatt megválaszol 15 tesztkérdést, az egy huzamban megoldható feladatok száma ennél korlátozottabb. Figyelembe kellett vennünk a diákok koncentrációképességeinek időbeli kapacitását. Azt már több kutatás során kimutatták, hogy a diákok 20-25 percnél tovább nem tudnak teljes összpontosítással dolgozni, ez az idő azonban teljesíthető.

Ráadásul ez nem egy olyan dolgozat, amire előre felkészítette a diákokat a tanár. Minden osztály váratlanul kapja meg ezeket a feladatokat. Ezért azt gondoltuk, hogy nem töltjük ki a teljes 45 perces tanóraidőt, amely két ilyen ciklust tartalmaz, hanem összeállítunk egy 15-25 perc alatt megoldható feladatlapot. A második szempont az volt, hogy különválasszuk a fogalmakat alkalmazó és a fogalmakra rákérdező feladatokat. Ezzel azt akartuk vizsgálni, hogy az adott fogalmakkal tudnak-e dolgozni, meg tudják-e oldani az ezzel kapcsolatos feladatokat. Illetve, hogy tudnak-e úgy dolgozni, ha a feladatok szövegét csak a fogalmak nevével fogalmazzuk meg. Például a 3-mal való oszthatósági szabályra rákérdeztünk konkrétan is, és külön rákérdeztünk az alkalmazására is.

Írd le az alábbi oszthatósági szabályokat!

3-mal:

Karikázd be azokat a számokat, amik oszthatók 3-mal!

283, 96, 1176

Minden témakörhöz két feladatot állítottunk össze. Az egyik a fogalomra rákérdező, a másik a fogalmat alkalmazó vagy szöveges típusú. A harmadik szempont a témakörök szerinti csoportosítás volt. Mivel számelméletből rengeteg feladat van és annál kevesebb alapfogalom, ezért nehéz dolgunk volt a feladatlap összeállításánál. Összegyűjtöttük azokat a fogalmakat, amelyek a későbbi matematikatanulás és a későbbi alkalmazások szempontjából a legfontosabbak. Ehhez már némi útmutatást adott az előző munkánkban összegyűjtött tesztkérdések tematikája. A témaköröket persze redukálni kellett.

Első kompromisszumként az algebrához kapcsolódó kérdéseket teljesen kihagytuk a dolgozatból. Így nem kerültek bele az $a^2 - b^2$-hez, illetve az $a^n - b^n$-hez kapcsolódó kérdések, és nem került bele a $\sqrt{2}$ irracionalitására vonatkozó feladat sem. Mivel több korosztállyal írattuk meg ugyanazt a dolgozatot, ezért fájó szívvel elhagytuk az olyan érdekesebb kérdéseket, mint például a négyzetszámok 3-mal vett maradékára vagy az $n!$ számjegyeire vonatkozó kérdések.

Végül az alábbi hét témakör maradt:

- **legnagyobb közös osztó:** Alapfogalom, szükséges a törtek egyszerűsítéséhez, alapvető diofantikus egyenletek megoldásához.
- **legkisebb közös többszörös:** Alapfogalom, szükséges a törtek összeadásához, periodikussághoz kapcsolódó szöveges feladatokhoz.
- **maradékos osztás:** A legalapvetőbb eszköz, már harmadik osztályban tanítják. Erre alapul a számelmélet alaptétele, a kongruencia fogalma és később a számítógépes algoritmusok jelentős része.

- **számelmélet alaptétele:** Számok felbontása felbonthatatlanok szorzatára, eszköz szinte minden számelmélet feladat megoldásához. Ez egy klasszikus létezik és egyértelműségi tétel. Minden számelméletben való munka kiindulási alapja.
- **osztók, osztók száma:** Az oszthatóság fogalmának teljes megértéséhez elengedhetetlen ennek ismerete. Akár listázással, próbálkozással, akár kanonikus alakból számolható.
- **relatív prímség:** A legfontosabb technikai fogalom, kötődik a legnagyobb közös osztóhoz, hisz csak annyit mond, hogy két szám legnagyobb közös osztója egy. A későbbi bizonyításokban alapvető szerepet játszik.
- **oszthatósági szabályok:** A kisebb számokkal való legegyszerűbb oszthatósági tesztek, amelyek megkönnyítik a prímfelbontást.

Minden témakörhöz két kérdést fogalmaztunk meg. Az egyik minden esetben a konkrét fogalom ismeretét követeli meg, míg a másik a fogalom alkalmazásával vagy a fogalommal kapcsolatos szöveges feladat. Két szöveges feladat kivételével az összes saját készítésű. A nem saját feladatok azért kerültek bele a dolgozatba, mert elég meggyőzőnek és frappánsnak találtuk őket, megfeleltek a céljainknak. A hét témakörhöz az alábbi kérdéspárokat fogalmaztuk meg:

Legnagyobb közös osztó:

- Mennyi 1320 és 504 legnagyobb közös osztója?
- Az iskolai évkönyvbe a végzős osztályok minden tanulójáról raknak egy képet. Az egyes osztályok tanulóinak képei külön oldalra kerülnek. A képeket egymás mellé, sorokba rendezve ragasztják az évkönyvbe. Maximum hány képet rakhatunk egy sorba, ha azt szeretnénk, hogy minden oldalon mindegyik sorban ugyanannyi kép legyen és a végzős osztályokba 30, 24, illetve 36 tanuló jár?

A fogalommal kérdező kérdésnél olyan számokat választottunk, amik legnagyobb közös osztója nem állapítható meg ránézésre és több különböző prímtényezőből áll. Figyeltünk arra is, hogy mindkét számban legyen olyan prímtényező, ami a másik számban nem szerepel. Úgy választottuk a számokat, hogy legyen olyan közös prímtényezőjük is, amely különböző hatványon szerepel a két számban. Így a legnagyobb közös osztó képzésének az összes lehetséges hátulütőjére rákérdeztünk.

A számunkra megfelelő szöveges feladat kiválasztása, kitalálása nem volt könnyű. Végül emellett a (Pintér: 10)-beli feladat mellett döntöttünk. Olyan feladatot kerestünk, ami nem rugaszkodik el a hétköznapi élettől, és könnyen átfogalmazható a számelmélet nyelvére. Feltétel volt az is, hogy az átfogalmazás után már ne igényeljen logikai lépéseket a feladat megoldása. Nem szerettük volna, hogy erőltetettnek tűnjön a feladat, azaz, hogy úgy nézzen ki, hogy ezt szándékosan a legnagyobb közös osztóra gyártották le. Nagy hangsúlyt fordítottunk arra, hogy a feladat lehetőleg első olvasásra érthető és egyértelműen értelmezhető legyen.

Legkisebb közös többszörös:

- Mennyi 8 és 12 legkisebb közös többszöröse?
- Zsoltinak az első 5 éves érettségi találkozója 2012-ben volt, ami szökőév. Ha 5 évente találkoznak, mikor lesz legközelebb szökőévben érettségi találkozó? (Négyévente van szökőév.)

Itt a konkrét fogalommal dolgozó feladatnál olyan számokat választottunk, amikkel könnyű számolni. Nem csak arra voltunk kíváncsiak, hogy meg tudják-e oldani a feladatot, hanem arra is, hogy ilyen kis számok esetében milyen módszerrel keresik meg a legkisebb közös többszöröst a tanulók. Azt gondoltuk, hogy első ránézésre sokak fejében megfordulhat, hogy a számok szorzata lesz a megoldás.

A szokványos legkisebb közös többszörösre rákérdező villanyoszlopos vagy hajós feladatokat kissé erőltetettnek tartottuk, ezért azoknál élethűbb feladatot kerestünk. Úgy gondoltuk, hogy ha szokványos feladatot tennénk bele a dolgozatba, akkor a diákok mechanikusan oldanák meg, hiszen ezek a feladatok más-más számokkal, de gyakran előkerülnek tanulmányaik során. Kevesebbszer, de előfordulnak olimpiához köthető feladatok is a témakör kapcsán. Az ilyen jellegűekhez hasonló, a mindennapi élethez közel álló kérdést fogalmaztunk meg a legkisebb közös többszöröst alkalmazó feladatként.

Maradékos osztás:

- Milyen maradékot ad 25-tel osztva a 12345?
- Egy szerdai matekórán a tanárnő bejelentette, hogy 30 nap múlva dolgozatírás lesz. Julcsi jelentkezett, hogy 30 nap múlva szombat lesz. Igaza van-e Julcsinak? Milyen napon lesz a dolgozatírás?

Az első feladatot kétféleképpen is meg lehet oldani: akár maradékos osztással, akár az utolsó két számjegy vizsgálatával. A 25-tel való osztás abból a szempontból is érdekes, hogy bár ezt az oszthatósági szabályt is tanítják a többivel együtt, később viszont nem igazán jön elő és számonkérésekbe is csak ritkán kerül bele. A második feladat kiválasztásánál körülbelül azokat a szempontokat vettük figyelembe, mint a legnagyobb közös osztós feladatnál. A maradékos osztás az egész életünket behálózza. Gondoljunk csak a naptárra és az órára. Mi egy naptáros feladat mellett döntöttünk.

Számelmélet alaptétele:

- Készítsd el a 280 prímtényezős felbontását!
- Bontsd fel prímek szorzatára a következő számot:

$$420 \,\Big|$$

A prímtényezős felbontást nehéz volt két részre vágni. Mindkét feladatban direkt módon kérdeztünk rá. Az egyikben berajzoltuk a segédvonalat. A legtöbb tankönyvben ugyanis egy függőleges vonal mentén faktorizálják a számokat.

Osztók, osztók száma:

- Sorold fel az 54 összes osztóját!
- Csilla talált egy 180 cm hosszú, 1 cm széles szalagot. Olyan 1 cm szélességű, egyforma téglalapokra akarja szétdarabolni, amelyek másik oldala is egész cm hosszúságú. Sorold fel az összes lehetőséget (beleértve azt is, hogy Csilla mégsem darabolja fel a szalagot)!

Itt is a szokásos szempontrendszerből indultunk ki. Az itteni szöveges feladat a másik, amit nem mi készítettünk, hanem egy kilencedik osztályos tankönyvből (Tóthné 2014: 28) vettünk. Ennél a feladatnál a gyerekeknek egy kicsit értelmezniük kellett, hogy pontosan mit várunk el.

Relatív prímség:

- Az alábbi számok közül melyek relatív prímek?

  21, 45, 32

- Válaszd ki az alábbi számok közül azokat a számpárokat, amelyeknek a legnagyobb közös osztója 1.

36, 49, 32

Erről a feladatról előre tudtuk, hogy kritikus lesz. A kérdőívekből ugyanis az derült ki, hogy a jó és rossz válaszokat adó gyerekek közötti különbséget alapvetően a fogalmak ismerete vagy épp a fogalmak ismeretének hiánya jelentette. A relatív prím is egy ilyen fogalom volt. A diákok többsége a legnagyobb közös osztó fogalmát ismeri, de azt már nem tudja, hogy a relatív prímség egy speciális esete a legnagyobb közös osztónak, amikor két szám legnagyobb közös osztója egy. A számokat úgy választottuk ki, hogy könnyen lehessen számolni velük, és ne azon múljon a sikeres megoldás, hogy elszámolják-e a feladatot.

Oszthatósági szabályok:

- Írd le az alábbi oszthatósági szabályokat!
  1. 8-cal:
  2. 12-vel:
  3. 3-mal:
- Karikázd be azokat a számokat, amik oszthatók
  a) 3-mal
     283, 96, 1176
  b) 6-tal
     72, 76, 84
  c) 4-gyel
     48, 154, 228

A számelmélet feladatok nagy részénél megoldás közben szükség van az oszthatósági szabályok alkalmazására. Mindkét feladatnál három egymástól eltérő típusú oszthatósági szabályt választottunk. Az egyik a szám végződésével, míg egy másik a számjegyek összegével kapcsolatos, harmadiknak pedig egy összetett oszthatósági szabályt választottunk. A konkrét fogalomra kérdező feladatnál a szabályok leírására kértük a diákokat, míg az alkalmazással kapcsolatos feladatnál néhány számról kellett eldönteni bekarikázással, hogy osztható-e a megadott számmal vagy sem.

4. A kitöltés megszervezése

Az eddigi eredmények és tapasztalatok alapján az alábbi hipotézisekkel kezdtük el a dolgozatok kitöltetését:

- A gyermekek számelmélet tudása korosztály és szakfüggő.
- A gyermekek számelmélet tudása iskola és tanárfüggő.
- Várhatóan a 9-10. osztályosok és a fakultációsok eredményei hasonlóak lesznek.
- Várhatóan a matematikát normál szinten tanuló 12. osztályosok eredményei elmaradnak majd a 9-10. osztályosokétól.
- A szövegesen megfogalmazott feladatokat jobban fogják tudni megoldani a diákok, mint az explicit fogalmakat tartalmazó feladatokat.

A kérdőíves felmérés során szerzett tapasztalatok óvatosságra intettek bennünket. Tudtuk, hogy fennáll az a lehetőség, hogy nem sikerül elsőre összeállítanunk a tökéletes dolgozatot. Hiszen akármilyen gondosan is tervezi az ember a kísérletet, később felmerülhetnek olyan szempontok, amelyeket eddig nem vett figyelembe. Ezért először egy szűkebb körrel töltettük ki a dolgozatokat.

Elsősorban a tudásra és a típushibákra voltunk kíváncsiak. A tudás felméréséhez ideális esetben elegendő lett volna osztályonként egy-egy tanulóval kitölteni a dolgozatot, de ez naiv ábránd. A típushibák kiszűrése nagyobb létszámú kitöltést igényel, mert fennáll a lehetőség, hogy mindenki – véletlenszerűen vagy tudatosan – ugyanazt a hibát követi el. A véletlenszerűség elkerüléséhez nagy létszámú mintára van szükségünk, a tudatos hiba elkerüléséhez pedig különböző iskolákban tanuló diákok megoldásaira. Így bár tudtuk, hogy ez még nem a végleges dolgozat, mégis nagy mintára volt szükségünk.

Három különböző szintű és jellegű iskolába vittük el a dolgozatokat: egy gimnáziumba (Kaposvári Egyetem Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium), egy matematika orientáltságú szakközépiskolába (Noszlopy Gáspár Közgazdasági Szakközépiskola) és egy általános szakközépiskolába (Eötvös Loránd Műszaki Szakközépiskola, Szakiskola és Kollégium).

Az 512 db dolgozat kijavítása után úgy döntöttünk, hogy néhány helyen valóban célszerű átfogalmaznunk a feladatokat. A módosítások egyik részét a feladatok szövegének félreérhetősége tette indokolttá. A változtatások másik részre pedig azért volt szükség, mert olyan nem várt megoldási stratégiák kerültek elő, amik leegyszerűsítették a feladatmegoldást, és ezzel kikerülhetővé vált a vizsgálni kívánt fogalmak alkalmazása.

A legnagyobb közös osztóhoz és a számelmélet alaptételéhez kapcsolódó feladatokon nem változtattunk.

A maradékos osztás alkalmazásához tartozó feladaton változtattunk. Ezt azért éreztük szükségesnek, mert azt, hogy milyen nap lesz 30 nap múlva sokan az ujjukon számolták végig, míg mások felírták a számokat 30-ig, és a számok fölé írták a napok kezdőbetűit, többen még naptárat is rajzoltak hozzá. A 30 napot 100 napra, a dolgozatírást pedig utolsó tanítási napra cseréltük. Így a feladat szövege a következő lett:

- Egy szerdai matekórán a tanárnő bejelentette, hogy 100 nap múlva lesz az utolsó tanórájuk együtt. Julcsi jelentkezett, hogy 100 nap múlva szombat lesz. Igaza van-e Julcsinak? Milyen napon lesz az utolsó matekóra?

Az osztók, osztók száma témakör szöveges feladatában a 180-at egy kisebb számra cseréltük, mert a 180-nak sok osztója van és csak keveseknek sikerült az összeset felsorolniuk hiánytalanul. A gondolatmenetek nehezen követhetőek voltak, többen össze-vissza írogatták az osztókat, mindenféle szisztéma nélkül, Számunkra az összes osztó hiánytalan felsorolásánál fontosabb szempont volt az, hogy a tanulók a feladat olvasása után tudják, hogy a szám osztóit kell megkeresniük. A 180-at olyan számra akartuk kicserélni, aminek két prímosztója van és az egyik második hatványon szerepel a prímtényezős felbontásban. Így a számnak hat osztója lesz, ami lényegesen kevesebb, mint a 180 tizennyolc osztója, de a felsorolásukhoz azért át kell gondolni a dolgokat. A leírtak alapján a 45-öt választottuk, mert a 12-t és a 20-at túl kicsinek találtuk. A feladat szövegét is átfogalmaztuk, mert többen nem értették vagy félreértették. Ez lett a módosított feladat:

- Egy 45 cm hosszú szalagot szeretnénk feldarabolni kisebb, egyforma, egész cm hosszúságú szalagokra. Milyen hosszú darabokat kaphatunk? Sorold fel az összes lehetőséget beleértve azt is, hogy nem daraboljuk fel a szalagot.

A legkisebb közös többszörös témaköréhez tartozó szöveges feladatot teljes egészében lecseréltük. Azért döntöttünk így, mert sokan oldották meg úgy a feladatot, hogy elkezdték az évszámokat sorolni és melléírták, ha az adott évben osztálytalálkozó vagy szökőév volt. Addig sorolták az évszámokat, ameddig nem találtak olyat, ami megfelel mindkét feltételnek. Azt gondoltuk, hogy ha nagyobb számokkal teszünk fel hasonló kérdést úgy, hogy a többszörösök felsorolásával ne lehessen gyorsan megtalálni a megoldást, akkor többeknek jut majd eszébe, hogy legkisebb közös többszöröst kellene számolni. A módosított feladat a következő:

- Egy uszodában két medence van. Az egyikben 24 naponta, a másikban 28 naponta cserélik le a vizet. Az uszoda zárva van azon a napon, amikor mindkettőben vizet kell cserélni. Ma zárva van az uszoda. Mikor lesz zárva legközelebb?

A relatív prímséggel kapcsolatos feladatokat kicsit átfogalmaztuk, egyértelműbbé tettük. Eredetileg a konkrét fogalomra rákérdező feladat szövegéből nem derült ki, hogy számpárokat keresünk. Az átfogalmazás során ez is belekerült a feladat szövegébe, mert többen egy-egy számra írták, hogy relatív prím, néhányan pedig csak a három szám legnagyobb közös osztóját vizsgálták. Így egy kis segítséget adtunk a feladat megoldásához, de továbbra is a fogalom nevével tettük fel a kérdést. A fogalomhoz kötődő mindkét feladatot kiegészítettük azzal, hogy az összes relatív prím számpárt keressük, mert sokan megelégedtek egyetlen jó számpár megtalálásával. Így néznek ki a témához tartozó átfogalmazott feladatok:

- Az alábbi számok közül mely párok relatív prímek? Soroljuk fel az összes lehetőséget!
  21, 45, 32
- Adjuk meg az alábbi számok közül azokat a számpárokat, amelyek legnagyobb közös osztója 1. Sorold fel az összes ilyen számpárt!
  36, 49, 32

Az oszthatósági szabályok témaköréhez tartozó, a szabályok alkalmazásával kapcsolatos feladaton annyit változtattunk, hogy mindhárom részfeladatnál több számról kell eldönteni, hogy osztható-e a megjelölt számmal vagy sem. A kis számokat nagyobb számokra cseréltük, hogy fejben számolás helyett a szabályok alkalmazására kerüljön a hangsúly. Úgy gondoljuk, hogy a több és nagyobb számoknak köszönhetően jobban kiderül, hogy a diákok csak ráhibáztak a jó megoldásra vagy valóban jól alkalmazzák a szabályokat. A feladat a módosítás után:

- Karikázd be azokat a számokat, amik oszthatók
  a) 3-mal
     283, 9672, 1176, 111111, 111112
  b) 6-tal
     283, 9672, 1176, 111111, 111112
  c) 4-gyel
     2345, 1234, 48148, 32100, 76432

A dolgozatok módosított, második változatai a 3. és 4. mellékletben találhatóak. Ezen változatoknak a kitöltésében a következő iskolák voltak segítségünkre: Babits Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest; Bajza József Általános Iskola, Budapest; Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium, Budapest; Magyar László Gimnázium, Dunaföldvár; Nagy László Általános Iskola és Gimnázium, Budapest;

Városmajori Gimnázium, Budapest. Összesen 715 tanuló töltötte ki a dolgozatok javított, második változatát.

5. Javítás

A dolgozatok javítása természetesen nem történhetett a megszokott módon, hiszen nem osztályozni szerettük volna őket. Megpróbáltunk egy olyan pontrendszert létrehozni, amely tükrözi a számunkra fontos különbségeket az egyes megoldások között. Ezért hét kategóriát hoztunk létre a következőképpen:

- 6 - hibátlan megoldás
- 5 - jól kezdte, de nem fejezte be vagy nem teljes a megoldás
- 4 - elvileg jó, de számolási hibát követett el
- 3 - jól kezdte, de később elvi hiba
- 2 - elkezdte, de rosszul kezdte el
- 1 - írt valami kezdetlegeset, olvasta a feladatot, de nem tudta megoldani (pl. lerajzolta a szalagot)
- 0 - hozzá sem kezdett

Ezek a kategóriák általános megfogalmazásai. Természetesen az egyes feladatoknál eltérhet az értelmezése, adott feladatokhoz sokkal pontosabb és könnyebben értelmezhető leírást is készítettünk, de a kategóriák lényegét az előbb felsorolt tulajdonságok adják.

Fontosnak tartottuk azt, hogy külön kategóriába tartozzon a számolási és az elvi hiba, hiszen egyik sem helyes megoldás, de teljesen mást jelentenek. Más kategóriába soroltuk azokat az eseteket is, amikor a tanulók üresen hagyták a feladatot és azokat, amelyeknél bármilyen tollvonást, firkát felfedeztünk, hiszen akkor már biztos, hogy foglalkozott a feladattal és nem csak átsiklott felette. Természetesen minden megoldás más és más. Például az 5. kategóriába azok a megoldások tartoznak, amelyek helyesek, de nem teljes megoldások. Ennek a kategóriának például az osztók felsorolásánál van jelentősége. Nyilván itt is különbség van aközött, hogy a tanuló egy vagy két osztót sorolt fel és aközött, hogy egy vagy két osztót hagyott csak ki. Ezek olyan különbségek, amelyeket egy dolgozat osztályozásakor nem hagyhatunk figyelmen kívül, de jelen kutatásunknak nem mérvadó elemei. Mi sokkal inkább a hibák feltárására, megértésére és kiküszöbölésére szeretnénk a helyezni a hangsúlyt.

Nem elégedtünk meg azzal, hogy az egyes megoldásokat kategorizáltuk, hiszen a fejlesztés lehetősége a megoldások elemzésében rejlik. Ezért a pontozás mellett az összes feladathoz gyűjtöttük a jó és rossz típusmegoldásokat egyaránt, hiszen ebből láthatjuk azt, hogy hogyan gondolkodott a kitöltő diák.

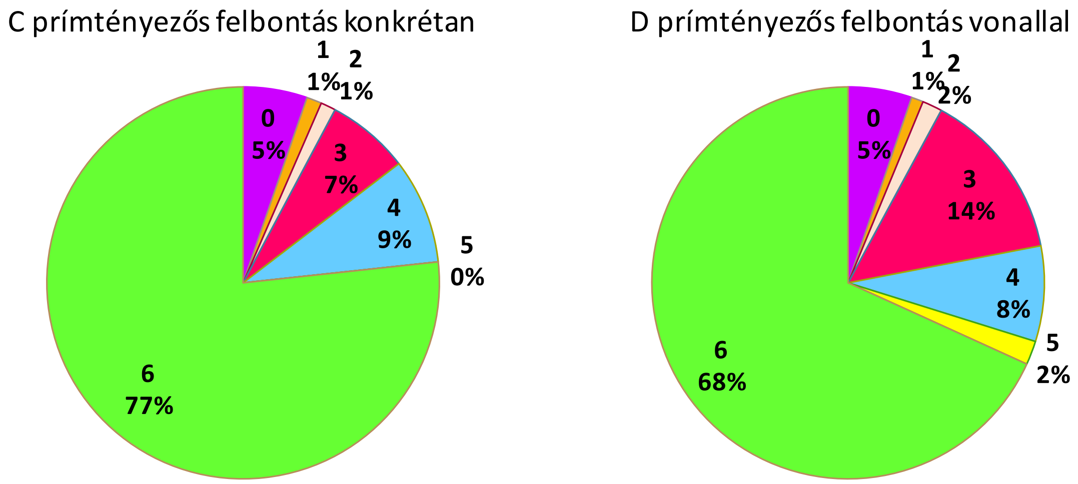
A következőkben az egyes feladatokat külön elemezzük először számszerűsítve, majd a tipikus – főként hibás – megoldásokat elemezzük. Az egyes feladatokhoz tartozó kördiagramok az 5. mellékletben találhatóak meg. Ahogyan azt már említettük a dolgozatokban szereplő hét témakör mindegyikét kétféle – szöveges, illetve konkrét – feladat formájában érintjük. Így az egyes feladatpárokat egyszerre elemezzük.

A statisztikát a dolgozatok C és D változatai alapján késztettük, mivel az A és B változatok egyes feladatai pontatlanul, a tanulók számára félreérthetően voltak megfogalmazva, így nem lett volna jó, ha azok alapján az eredmények alapján vontuk volna le a következtetéseket. Ahol nem változtattunk a feladatokon és úgy gondoltuk, hogy érdemes, illetve érdekes, ott természetesen az A és B változatok eredményeit is figyelembe vettük. (Az ilyen részeknél ezt jelezni is fogjuk.)

5.1. Prímtényezős felbontás

Ahogy a dolgozatok összeállításánál említettük a C csoportnak változatot kitöltő tanulóknak a 280 prímtényezős felbontását kellett elkészíteniük, a D változatban pedig a 420-at kellett prímek szorzatára bontaniuk a diákoknak. Fő különbség a két feladat között a feladat szövegének megfogalmazása volt és az, hogy a D csoportban már előre meghúztuk a vonalat – ami mellett a prímtényezős felbontást többen készíteni szokták –, sugallva ezzel a prímfelbontás egyik lehetséges megoldását.

Kíváncsiak vontunk arra, hogy a vonal segít-e a feladat megoldásában, illetve arra, hogy van-e különbség a két feladat megoldottsága között. Az 1. ábra a kördiagramjain látható, hogy hogyan sikerült megoldaniuk a prímtényezős felbontással kapcsolatos feladatot a dolgozat C illetve a D változatát kitöltő tanulóknak.



1. ábra: Prímtényezős felbontásos feladatokhoz tartozó kördiagramok

Mindkét csoportban a kitöltők 5%-a hagyta üresen ezt a feladatot, 1-1%-uk pedig nem foglalkozott érdemben a feladattal vagy átfirkált mindent, amit leírt. Így megállapíthatjuk, hogy nem befolyásolta az előre behúzott vonal azt, hogy nekiállnak-e a diákok a feladatnak. Szintén nem jelentős az eltérés a két csoport között abban, hogy milyen megoldást alkalmaztak – D változatbeli – vonalas és a – C változatbeli – nem vonalas feladat esetében. A hagyományos *„vonalas”* megoldás mellett a *„bináris fás”* megoldás jelent még meg. (Erről még később részletesebben beszélünk.) Ott ahol előre megrajzoltuk a vonalat (D változat) 0,5%, míg ott ahol nem volt vonal (C változat) 1,2% oldotta meg a feladatot a fás módszerrel. Ezt a megoldást két iskola tanuló alkalmazták. Az egyik iskolában ugyanannyian oldották meg a feladatot fásan a C és D változatot kitöltők közül. Volt olyan tanuló, aki áthúzta a vonalat és mellette megoldotta a fás módszerrel, és volt olyan diák is, aki mindkét megoldást leírta. A másik iskolában csak abban az esetben alkalmazták a fás megoldást, amikor nem volt előre berajzolva a vonal. Valószínű, hogy a diákok mindkét megoldási módszert ismerték, így a vonal ebben az esetben befolyásolta őket abban, hogy melyikkel oldják meg a feladatot.

Látható az 1. ábra diagramjain, hogy a két csoport megoldásai hasonlóan oszlanak el. Mivel a két feladat között a megoldások tekintetében nincs jelentős különbég, ezért ezentúl együtt kezeljük őket.

Főként a 7. osztályosok voltak azok, akik üresen hagyták ezt a feladatot. Ez valószínűleg ezért fordulhatott elő, mert a 6. osztályos tananyag csak kiegészítésként említi a prímtényezős felbontást. Ezt sok helyen csak 7. osztályban tanulják, így lehetséges, hogy a dolgozat kitöltésekor a korosztály egy része még nem hallott róla. Ezért érdekes lehet az, hogy milyen eredményeket kapunk, ha az ő eredményeiket figyelmen kívül hagyjuk, amikor a megoldások eloszlását vizsgáljuk.

A megoldók 23%-a nem tudta hibátlanul megoldani a feladatot, ami azt mutatja, hogy a diákok jelentős részének komoly gondot okoz a prímtényezős felbontás elkészítése és a jó megoldóknál sem lehetünk biztosan abban, hogy értik is, hogy mit csinálnak. (Erre a dolgozat későbbi részében még visszatérünk.) A hibás megoldások száma nem monoton változik a korral. Arányaiban a 8. osztályosok közül oldották meg a legkevesebben hibátlanul ezt a feladatot. Őket a 11., a 9. és a 13. osztályos normálosok követik. A 10. és 12. osztályos normálosok, a fakultációsok és a matematika szakos egyetemisták között pedig 20% alatti a hibás megoldók aránya. Azt figyelembe véve, hogy ezek a „jól" teljesítő korosztályok később már nem foglalkoznak a prímtényezős felbontással, ez az arány még így is rossznak mondható.

A kitöltők 1,43%-a teljesen rosszul állt neki a feladat megoldásának. Egy részük osztók, illetve osztópárok felsorolásába kezdett a prímtényezős felbontás elkészítése helyett. Ez a feladat mindkét változatánál előfordult, ott is ahol sugalltuk a vonal segítségével, hogy mit kell csinálni. Míg mások újfajta felbontást találtak ki, ami legtöbbször annyiban hasonlított az eredetihez, hogy egyaránt kerültek számok a vonal mindkét oldalára.

Voltak olyan tanulók is (0,95%), akik bár – valószínűleg – tudták, hogy mit kell csinálniuk, de megakadtak a felbontás közben, nem fejezték be, mert – mellékszámításaik alapján – nem tudták eldönteni, hogy az a szám, aminél tartanak prím-e vagy sem, mert nem találtak olyan számot, amivel osztható lenne. Ez legtöbbször egy korábbi elszámolás miatt alakult így.

Említésre méltóak az elvi és a számolási hibák is, hiszen a diákok megoldásainak 9,87% és 8,98%-a ebbe a két kategóriába került. Megdöbbentő, hogy már egy ilyen egyszerű számolási feladatnál is a tanulók 8,98%-a számolási hibát követ el.

Az elvi hibás megoldásokat főleg a 8., a 9., a 11. és a 13. osztályos normálosok írták. Az egyik tipikusan előforduló elvi hiba az volt, amikor összetett szám került a prímtényezők közé. Ezt a hibát a kitöltők 2,39%-a követte el. Ebből arra következtethetünk, hogy nem tudták, hogy mit kell csinálniuk, vagy prímnek gondolták a 4-et, 6-ot, 9-et, 10-et, 21-et, 35-öt, 42-t, 50-et és a 210-et is. Ráadásul ezek olyan összetett számok, amiknél már a 2-vel, 3-mal és 5-tel való oszthatóság ellenőrzésével kiderül, hogy nem lehet prím, ezeket ismerete pedig már 5-6. osztályban elvárás a kerettanterv (7) szerint.

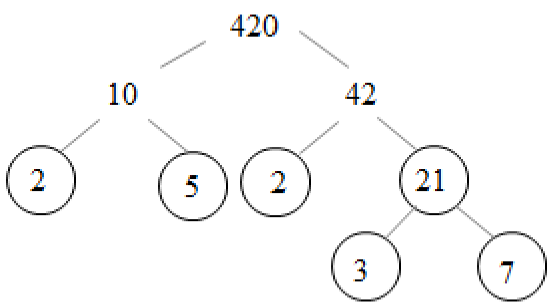
A kitöltők 2,39%-a az 1-et is prímtényezőnek vette, 0,95%-a pedig két vagy három egyessel zárta le a felbontást, így:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & 1 \\ 1 & \end{array}$$

A kitöltő 4,3%-a nullával zárta le a prímtényezős felbontást, néhányan közülük a fent említettekhez hasonlóan 1-1-0-val. Az, hogy nulla került a felbontás végére, az azt jelzi, hogy a diákok nem értik az algoritmus működését és nem értik a prímtényezős felbontást. Alapvetően a szorzással kapcsolatos tudásuk kérdőjelezhető meg. Rá kellett jönnünk, hogy nem is értik, hogy mit csinálnak, csak mechanikusan végrehajtanak egy begyakorolt lépéssorozatot, amire már nem emlékeznek pontosan. Ezt erősíti az is, hogy a kitöltők 0,47%-a a jó felbontás elvégzése után ehhez hasonlóan írta fel a megoldását: $420 = 2^2 + 3 + 5 + 7$.

Meg kell jegyeznünk azt is, hogy a feladatot jól megoldók 2%-a sem teljesen úgy készítette el a prímtényezős felbontást, ahogyan azt elvárnánk, de szorzatalakban jól írta fel a számot, ezért a 6-os kategóriába soroltuk. Voltak olyanok, akik nem zárták le egyessel a felbontást és olyanok is, akik nem hagyták abba a prímtényezős felbontást akkor, amikor először jelent meg egyes a vonal bal oldalán, hanem annak jobb oldalára is írtak még egy egyest, de ez az egyes a szorzatalakba már nem került bele.

Szót kell még ejtenünk a tanárok körében egyre népszerűbb *bináris fás* felbontásról is. Azt gondoljuk, hogy ez a fajta felbontás azért válik egyre gyakrabban alkalmazottá és tanítottá, mert ennél elegendő a számot két tetszőleges szám szorzatára bontani és csak akkor kell eldönteniük a tanulóknak azt, hogy prímszám-e az adott szám, amikor úgy érzik, hogy nem tudják szorzatra bontani. A 2. ábrán látható egy példa erre a felbontásra.

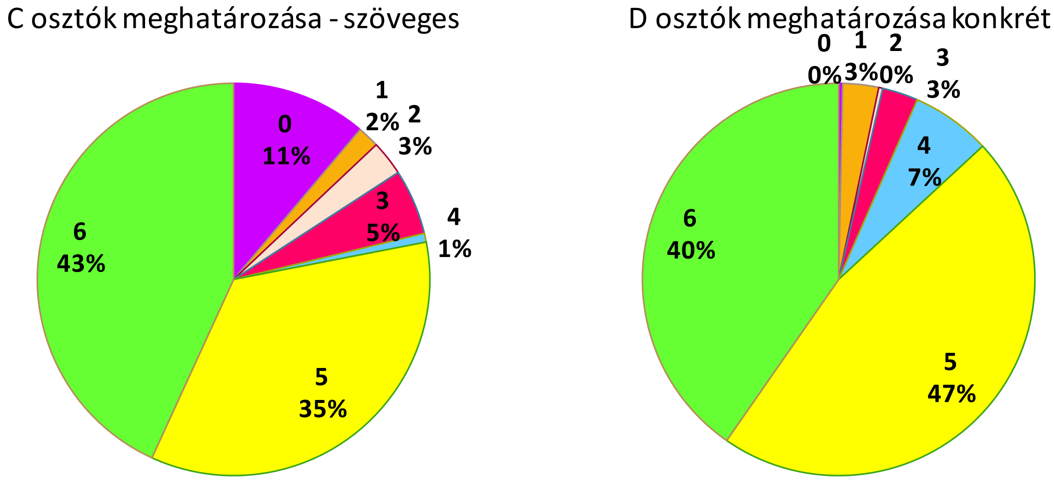


2. ábra: A 420 prímtényezős felbontása a bináris fás módszerrel

5.2. Osztók meghatározása

A dolgozat C és D változatában a 2. feladatban egy-egy szám osztóira kérdeztünk rá. Míg a D csoportban ezt konkrétan kimondtuk, addig a C csoportban szöveges feladatként megfogalmazva tettük fel a kérdést és nem mondtuk ki konkrétan, hogy a szám osztóira vagyunk kíváncsiak.

A 3. ábra kördiagramjairól leolvasható, hogy a dolgozat C, illetve a D változatát kitöltő tanulóknak hogyan sikerült megoldaniuk az osztók meghatározásával kapcsolatos feladatot.



3. ábra: Osztók meghatározásával kapcsolatos feladatokhoz tartozó kördiagramok

Itt már közel sem olyan hasonlóak a két változatot kitöltő tanulók megoldásainak arányai. Fő különbég a 0-val jelölt kategóriában van, vagyis abban, hogy hányan hagyták üresen a feladatot. Amikor konkrétan rákérdeztünk egy szám osztóira, akkor szinte senki sem hagyta üresen a feladatot (0%), de amikor szöveges tettük fel a kérdést a diákok közel 11%-a hozzá sem kezdett a feladat megoldásához. A hibátlan megoldók aránya közel azonos a szöveges és a konkrét feladatnál. Ha azonban a jó megoldásokat annak függvényében számoljuk, hogy hányan kezdtek hozzá a feladathoz, akkor a hibátlan megoldók aránya 48%. Megállapíthatjuk tehát, hogy a hosszú szöveg elriasztja a diákokat, de akik belekezdenek, azok sokkal nagyobb arányban oldják meg a feladatot.

A feladat konkrét (D) változatával foglalkozó tanulók 1,97%-ának azért volt rossz a megoldása, mert csak a szám prímtényezős felbontását készítették el. Ezeket a megoldásokat az 1-es kategóriába soroltuk, mert a prímtényezős felbontásból ugyan könnyen fel lehetett volna írni a szám osztóit, de a diákoknál ennek nyoma sem volt. Lehetséges, hogy emlékeztek rá, hogy korábban így – vagy így is – oldották meg az ilyen jellegű feladatokat, de a konkrét mechanizmust már nem tudták felidézni.

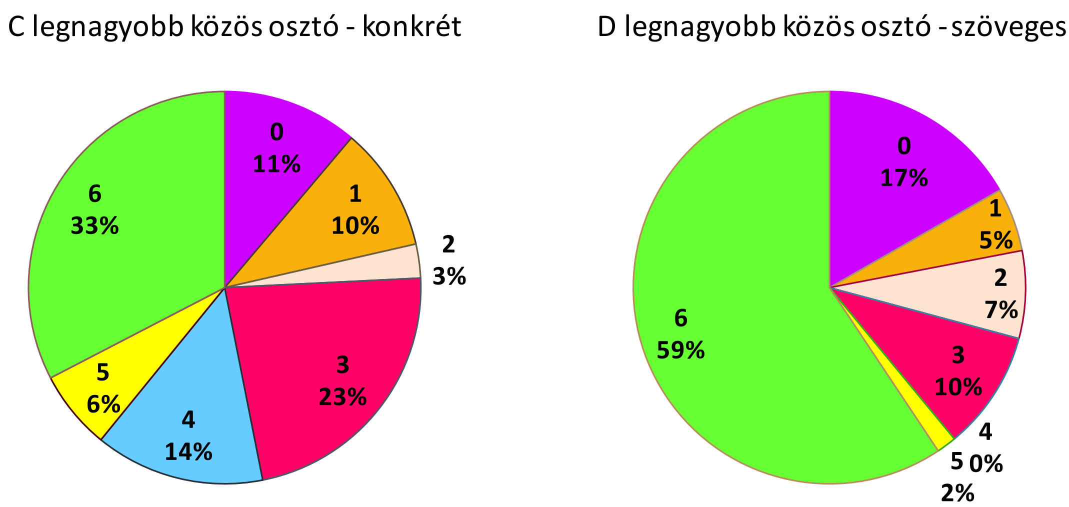
A hiányos megoldások számában (5-össel jelölt kategória) jelentős eltérés van a kétféle feladat esetén. Ennél a feladatnál azok a megoldások kerültek ebbe a kategóriába, amikor a tanulók hiányosan sorolták fel a kérdéses szám osztóit. A diákok egy részének a szöveges feladat esetén azért volt hiányos a megoldása, mert csupán a szám osztóit sorolták fel osztópárok formájában, de megoldásukat nem vezették vissza a feladat szövegére.

A hiányos megoldások esetén külön foglalkoztunk azokkal, ahol az 1 vagy maga a szám (a 45 vagy az 54) hiányzott az osztók közül. A D változat konkrét feladatánál a kitöltők több mint 10%-a hagyta ki az 54-et az osztók közül, míg a C változat szöveges feladatánál a tanulók körülbelül 5%-a hagyta ki a 45-öt annak ellenére, hogy a feladat szövegében szerepelt az, hogy *„Sorold fel az összes lehetőséget beleértve azt is, hogy nem daraboljuk fel a szalagot.”*. A kitöltők több mint 7%-ánál nem szerepelt az 1 az osztók között. Ezt azért tartjuk említésre méltónak, mert úgy gondoljuk, hogy azt, hogy minden számnak osztója az egy és önmaga minden tanulónak tudnia kellene, hiszen ennek ismerete már 5-6. osztályban elvárás. (7)

Ennél a feladatnál az elvi hibás megoldások száma nem olyan magas, mint a prímtényezős felbontás esetén, mégis meglepő és említésre méltó dolgokkal szembesültünk. A kitöltők 1,54%-a a nullát is az osztók közé sorolta. (Ilyen hiba a szövegesen megfogalmazott feladat esetén is előfordult.) Annak ellenére, hogy a feladat szövegében szerepelt, hogy egész megoldásokat keresünk, a C változatot kitöltő tanulók 4,32%-a gondolja úgy, hogy tizedestört (például 22,5 cm-es, 11,25 cm-es, 4,5 cm-es vagy 0,75 cm-es szalag) is lehet megoldás.

5.3. Legnagyobb közös osztó

Ennél a feladatnál a dolgozat C változatában a diákoknak két szám (az 1320 és az 504) legnagyobb közös osztóját kellett kiszámolniuk, míg a D változatban egy szöveges feladat keretében (fényképek rendezése egy évkönyvben) kellett meghatározni három szám (a 24, a 30 és a 36) legnagyobb közös osztóját.



4. ábra: Legnagyobb közös osztós feladatokhoz tartozó kördiagramok

Ahogy azt az 4. ábra kördiagramjai is mutatják, ezt a feladatot is meglehetősen rosszul sikerült megoldaniuk a tanulóknak. Még ha a számolási hibáktól (4-essel jelölt kategória) el is tekintünk – bár nem a feladatok megoldása során nem volt szükség bonyolult számítások elvégzésére –, akkor is a tanulók 53%, illetve 41%-a oldotta meg rosszul ezt a feladatot, pedig a legnagyobb közös osztó kiszámolása alapvető ismeretnek számít a számelmélet témakörben. Érdekes, hogy bár három szám legnagyobb közös osztójának kiszámítás nehezebb, vagy inkább szokatlanabb a diákok számára – mivel általában csak két szám legnagyobb közös osztójának kiszámítását várják el tőlük –, mégis erre a feladatra adtak kevesebb hibás megoldást. Úgy véljük, hogy ez annak köszönhető, hogy ezt a feladatot szöveges formában adtuk fel, viszont valószínűleg szintén ebből kifolyólag kevesebben álltak neki a D változat feladatának.

A feladat konkrét változatánál a tanulók 8,07%-ának a prímtényezős felbontás elkészítése jelentette a problémát. Ők ugyanazokat a típushibákat követték el, mint amiket a prímtényezős felbontással foglalkozó feladat típushibáinak elemzésekor leírtunk. A prímtényezős felbontás elkészítését a kitöltők 1,24%-a az osztók felsorolásával próbálta kikerülni, de még a legnagyobb közös osztó megtalálása előtt megunták, abbahagyták az osztók felsorolását. A szöveges feladat esetében ezek a százalékok kisebbek, mivel ott legtöbben – ez valószínűleg a kis számoknak is betudható – nem is alkalmazták a legnagyobb közös osztó számolásának módszerét. A feladat szöveges változatánál a hibátlan megoldók mindössze 14,91%-a számolt ténylegesen legnagyobb közös osztót. A tanulók 3,61%-a pedig teljesen félreértette a szöveges feladatot, és a 90 képpel (ennyi fénykép van összesen) számolgatott valamit.

A prímtényezős felbontás sikeres elkészítése után a diákoknak a következő problémát az jelentette, hogy nem tudták, hogy melyik prímtényezőket kell belevenniük a legnagyobb közös osztóba. A C változatot kitöltő tanulók 3,11%-a legkisebb közös többszöröst számolt, néhányan még a jelöléseket is összekeverték. További 4,04% a két szám legnagyobb közös prímosztóját nevezte meg legnagyobb közös osztóként. A kitöltők 1%-a pedig a számok legkisebb közös prímosztóját írta megoldásként, míg további 1% a legtöbbször előforduló prímszámot a megfelelő hatványon. A feladat szöveges változatánál a tanulók 3,61%-a követte el ezen hibák valamelyikét.

A relatív prím számpárokat kereső feladatnál előforduló elvi hibák egy része is a legnagyobb közös osztóval kapcsolatos problémákból ered. Ott ismét megjelenik az, amit már az osztók meghatározásával kapcsolatos feladatnál már említettünk, hogy a nullát a tanulók egy része osztónak gondolja.

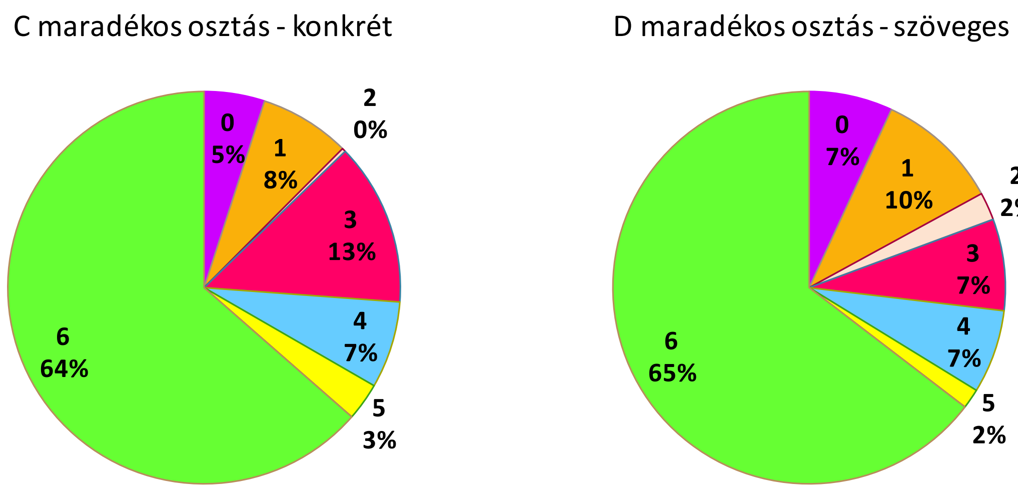
Az itteni, elvi hibás megoldások visszavezethetőek arra, hogy a tanulók nem értik a faktorizálást. Megpróbálták felidézni a korábban betanult és begyakorolt mechanizmust, de ez a felidézés a tanulók jelentős részénél nem volt sikeres.

5.4. Legkisebb közös többszörös

A legkisebb közös többszörössel kapcsolatos feladatok megoldásai a legnagyobb közös osztós feladatokéhoz hasonlóan alakultak. (Az 5. mellékletben találhatók a megoldások kategóriák szerinti arányait szemléltető kördiagramok.) Ennél a feladatpárnál is jelentős számú hibás megoldás született. A két feladatnál összesen a hibátlan megoldást adó tanulók 5,26%-a a többszörösök felsorolásával jutott jó eredményre. A diákok körülbelül 5%-a a két szám szorzatát nevezte meg legkisebb közös többszörösként, míg 5,5%-uk legnagyobb közös osztót számolt. Itt is komoly gondot okozott a tanulók körében a prímtényezős felbontások elkészítése és a megfelelő prímtényezők kiválasztása is (6,7%).

5.5. Maradékos osztás

A maradékos osztással kapcsolatos konkrét feladat (C változat) a 25-tel való oszthatósági szabály alkalmazását vagy egy 25-tel való osztás elvégzését, és a maradék megállapítását várta el a tanulóktól. Szöveges feladat formájában (D változat) egy naptárral kapcsolatos feladatot adtunk fel a diákoknak. Itt azt kellett kiszámolniuk, hogy 7-tel osztva a 30 milyen maradékot ad.



5. ábra: Maradékos osztásos feladatokhoz tartozó kördiagramok

A C változatbeli konkrét feladat esetén meglepő volt számunkra az, hogy a tanulók 12,73%-a neki sem állt a feladatnak vagy egyáltalán nem tudta megoldani azt, vagyis az első három kategória valamelyikébe sorolható megoldást adott. Az ezekbe a kategóriákba sorolható megoldások száma a feladat szöveges változata esetén is magas, itt többen (a kitöltők 4,26%-a) csak rossz végeredményt közöltek.

Ennél a feladatpárnál is jelentős számban fordultak elő elvi hibák. A feladat D-beli, szöveges változatánál a kitöltők 4,26%-a a szerdát számolta első napnak, ami a dolgozat bejelentésének napja volt, vagyis a nulladik, míg olyan tanulók is voltak, akik öt vagy hatnapos héttel számoltak. A C változatbeli konkrét feladat esetén közel kétszerannyi volt az elvi hibás megoldás (13,35%), mint a szövegesen megfogalmazott feladat esetén (7,54%). A dolgozat C változatát kitöltő tanulók 5,28%-a a nulla maradékig végezte el az osztást írásban, majd azt mondta, hogy 25-tel osztva a 12345 nulla maradékot ad. A kitöltők további 3,42%-a pedig az osztás elvégzése után azt írta megoldásként, hogy 0,8 vagy 8 vagy 493,8 az osztás maradéka. Ez onnan eredt, hogy miután elvégezték az osztást a nulla maradékig 493,8 lett a hányados. Voltak olyan tanulók is (1,86%), akik a 25: 12345 kiszámításával foglalkoztak.

Ahogyan azt korábban már említettük, a feladat szöveges, D-beli változata az eredeti B-beli változatához képest módosításra került, mert a tanulók a 30-at még elég kicsi számnak tartották ahhoz, hogy egyesével számolják ki, hogy milyen nap lesz 30 nap múlva. A módosított feladatba, már százig kellett számolniuk, de a megoldások alapján úgy látszik, hogy ezzel sem tudtuk elvenni minden tanuló kedvét attól, hogy egyesével, vagy jobb esetben hetesével számoljon el százig. A kitöltők 2,95%-a még így is emellett a megoldás mellett döntött, néhányan el is számolták.

Említésre méltó még az is, hogy a konkrét feladattal (C változat) foglalkozó, hibátlan választ adó tanulók mindössze 25,49%-a oldotta meg a feladatot a 25-tel való oszthatósági szabály segítségével.

A maradék két feladatot – a relatív prímséggel és az oszthatósági szabályokkal kapcsolatosokat – a bevezetőben már említett okokból kifolyólag nem részletezzük.

6. Mélyinterjúk a kutató oktatókkal

Amint az a korábbi munkánkban (Csányi – Pozsonyi – Szabó 2014) leírt tanárokkal készített interjúkból kiderült, ha időhiány miatt változtatni kell a tematikán, akkor a számelmélet az egyik olyan anyagrész, amire a tervezettnél kevesebb idő jut vagy teljes egészében kimarad. Kíváncsiak voltunk arra, hogy a számelmélettel foglalkozó szakemberek mit gondolnak a számelmélet oktatásának fontosságáról.

Mélyinterjút készítettünk azon magyarországi oktatókkal, akik MTA fokozattal rendelkeznek számelméletből (dr. Gaál István, Gyarmati Katalin, Hajdu Lajos, Károlyi Gyula, Pintér Ákos). Megkérdeztük őket arról, hogy mit gondolnak a számelmélet fejlődéséről és arról, hogy szerintük mit kellene tanítani középiskolában a számelmélet témakörén belül. Sokféle választ kaptunk tőlük, de pedagógiai koncepciójuk alapvetően kétfajta irányzatot követett. Az egyik irány az alkalmazhatóság felé vezetett, míg a másik a számelméleti gondolatmenetek fejlesztő hatását helyezte a középpontba.

6.1. Pintér Ákos egyetemi tanár, a Debreceni Egyetem Természettudományi és Technológiai Karának dékánja, MTA doktora

Pintér Ákos szerint a számelmélet az egyik legkönnyebben megérthető témakör a matematikában, ezért fontosnak tartja, hogy a diákok megismerkedjenek vele. Hangsúlyozta, hogy ebben a témában a fogalmak egyszerűek, sok a könnyű feladat, ezért mindenképpen érdemes időt szánni rá.

Pintér Ákos úgy gondolja, hogy a számelmélet jól kapcsolódik sok más anyagrészhez. Például a halmazelmélethez, az analízishez és a bizonyítási módszerekhez. Vegyük mondjuk az oszthatósági relációt. Ez nagyságrendi relációt von maga után, tehát jó példa a reflexív, a tranzitív és az antiszimmetrikus tulajdonság bemutatására. A prímszámok kapcsán pedig előjön a prímszámok végtelensége, így a végtelen halmaz fogalma is. Ez mind jó átvezetés a halmazelmélet témaköréhez.

A számelmélet és az analízis kapcsolatára jó példák a diofantikus egyenletek. Pintér Ákos fontosnak tartja ennek tanítását középiskolában is, ám csak az egyszerű módszerekkel megoldhatóakat tanítaná. Így a lokalizálással és a legnagyobb közös osztóval való megoldásokat bevenné a tananyagba, de a Baker-tételt már nyilván nem. A diofantikus egyenletek kapcsán megjelenhet a függvényvizsgálat és a nagyságrendi becslés – pl. a $x^4 + y^4 = 97$ típusú egyenleteknél –, ami az analízis felé mutat.

Ezek mellett a számelmélet fontos szerepet játszik a bizonyítási módszerek tanításakor. Az iskolában tanult két fő bizonyítási módszer – a teljes indukció és az indirekt bizonyítás – mindegyikére nagyon jó példák találhatók ebben a témakörben.

A számelmélet mindennapi fogalmakkal dolgozik, melyeket mindenki könnyen elsajátíthat. Ezért elsősorban gondolkodni tanít. A feladatok nagy részének több, lényegesen eltérő megoldása van. Feladatmegoldás közben különböző gondolatmeneteket sajátíthatunk el, így a számelmélet segíthet kitörni a mechanizmusokból. Általánosságban úgy fogalmazott, hogy „a számelmélet szintetizál, gondolkodni tanít, jóra nevel”.

A dékán úr felhívta a figyelmet arra, hogy a számelmélet témaköréhez tartozó feladatanyag nem folytonos nehézségű, a feladatok között főként a két véglet található meg: a nagyon könnyű feladatok és a nagyon nehéz kérdések. Ennek tudatában kiemelt figyelmet kell fordítani annak meggondolására, hogy a különböző szinten tanuló diákokkal milyen részletességgel tárgyaljuk az anyagrészt.

Kihangsúlyozta azonban, hogy az országban már a gimnáziumok színvonala is nagyon szétszóródott, ezért az anyagot mindenképpen a közeghez kell igazítani. Mivel ő maga is évek óta rendszeresen tart szakköröket középiskolában, így tisztába van azzal, hogy mi az, amit még be tudnak fogadni a gyerekek a témakörből és mi az, amit már nem. A beszélgetésünk során három különböző szint tárgyalására tértünk ki: a hagyományos, a matematikát emelt szinten tanuló és a speciális matematika tagozatos osztályokra.

Pintér Ákos az iskolai matematikatanítás során hagyományos (nem tagozatos) osztályban az alapok tanítására szorítkozna. A számelmélet témakörben az oszthatósággal kapcsolatos feladatok közül csak a könnyebbekkel foglalkozna, és az $a^n - b^n$-re vonatkozó azonosság tanításakor csak a harmadik hatvány ismertetéséig menne el. Az anyag mennyiségének gyarapítása helyett a megértést helyezné a középpontba. Fontosnak tartja azt is, hogy amellett, hogy a gyerekek tudnak legnagyobb közös osztót és legkisebb közös többszöröst meghatározni, értsék is az eljárás lényegét. Szerinte ezek mellett a diákok nyitottságának függvényében még a kongruenciákat is be lehetne vezetni.

Vannak olyan feladatok, amelyek megoldásakor hamar felismerhetőek a jobb matematikai érzékkel rendelkező tanulók. Ilyenek például a „milyen számjegyre végződik”típusú kérdések és azok a feladatok, ahol két szám legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse adott, de a két szám nem.

Emelt szinten elvárná, hogy a gyerekek tisztában legyenek a részletekkel. Az elmélet mellett érdekesebb, nehezebb feladatokat is bevinne a matekórákra, például a $(p+1)!+1=p^m$ tétel témakörét. Úgy gondolja, hogy fel lehet adni Erdős-lemmához, illetve ikerprímekhez kapcsolódó feladatokat. Olyan kérdéseket is szívesen feltenne, mint hogy a $100!$ hány nullára végződik. A tananyag mélyebb feldolgozásakor nagyobb szabadságot adna a tanároknak a feladatok összeválogatásában, több lehetőséget adva nekik arra, hogy a témakörön belül olyan anyagrésszel foglalkozzanak, amit szívesen tanítanak.

Ezeken kívül beszélne még titkosításról és egyéb alkalmazásokról is szakkörön és speciális matematika tagozatos osztályokban. Ahogy arról már korábban is szó esett, nem folytonos a feladatok nehézsége, ezért versenyfeladatok kitűzésekor is nehéz eltalálni a megfelelő szintet. Ám a nehezebb érveléseket még szakkörön se vinné be az anyagba.

Pintér Ákos szerint alkalmazni kell a matematika oktatása során a spiralitás elvét, vagyis azt, hogy más témakörökkel való foglalkozás közben is elő kell venni a számelmélet (vagy más, korábban tanult anyagrész) feladatait, ezzel felfrissítve a korábban megszerzett tudást. Felsőbb években is jó lenne elővenni a régebbi anyagot, és lehetne próbálkozni nehezebb feladatokkal is.

A kerettanterv erre nem mindig ad lehetőséget, és a gyerekek sem terhelhetők túl, de lehet változatosabb számelmélet feladatsorokat készíteni, akár más témakörökkel vegyítve is. Alapvető, hogy ezt az anyagrészt nagyobb óraszámban kellene tanítani. Az iskolákban például rengeteget foglalkoznak egyenletekkel és újabban valószínűség-számítással, statisztikával is, de számelmélettel nem, pedig az a tanár úr szerint fontosabb lenne. Úgy gondolja, hogy két hét alatt nem lehet számelméletet tanítani. Régen kevesebb anyagot akartak megtanítani az iskolában, és így több idő jutott az egyes anyagrészekre.

Összegzésként elmondható, hogy Pintér Ákos a számelméletet alkalmas eszköznek tartja a matematikai gondolkodás fejlesztésére, ezért nagyobb figyelmet fordítana annak tanítására középiskolában.

6.2. Gaál István egyetemi tanár, a Debreceni Egyetem rektorhelyettese, a Debreceni Egyetem Algebra és Számelmélet Tanszék vezetője, MTA doktora

Gaál István először megmutatta nekünk az egyik grazi egyetem matematika kurzusainak listáját. A lista tartalmazta például a gazdasági matematika, a pénzügyi matematika és az alkalmazott matematika tárgyakat. Csupa olyan kifejezés, kurzuscím került a listára, ami a gyakorlati munkára vágyó embereket vonzza, szemben a magyarországi kurzuskínálattal. Szerinte fontos lenne vonzóbbá tenni a hazai egyetemi matematikaoktatást hasonló kurzusokkal. Emellett úgy gondolja, hogy a középiskolai oktatást is gyakorlatiasabbá kellene tenni, hogy felkészítse, ráhangolja diákokat az egyetemi tananyagra.

Gaál István utána arról beszélt, hogy az egyetemre – még matematika szakra is – sokszor gyenge matekosok kerülnek. Ez szerinte azért lehetséges, mert sokan úgy gondolják, hogy matematikus diplomával mindössze kétféle lehetősége van az embereknek, ha a végzettségüknek megfelelően szeretnének elhelyezkedni. Az egyik az, hogy az egyetemeken maradnak és kutatnak, de erre csak keveseknek van lehetőségük. A másik pedig az, hogy bankokhoz vagy biztosítókhoz mennek dolgozni, ez azonban nem eléggé vonzó.

Ő ugyan nem tanít középiskolában, ám matematikatanár felesége igen. Általa jó rálátása van a középiskolai matematikaoktatás helyzetére, érzékeli az újra és újra felmerülő nehézségeit. Szerinte olyan középiskolai oktatásra lenne szükség, ami az egyetemre vonzza a legjobbakat. Felhívta a figyelmet arra, hogy ma a matematika szakra való bekerülésnek nem feltétele az emelt szintű matematika érettségi, a középszintű pedig nevetséges. Így a diákok tudása felszínes marad. Meg kellene értetni a gyerekekkel, hogy a matematikai problémamegoldó képességre szükség van az életben, ezért a szép matematikán kívül használható matematikát is kell tanítani. Ehhez viszont szükség van pedagógus továbbképzésekre, és arra, hogy a pedagógus szakma jól meg legyen fizetve. Véleménye szerint fontos az iskolában a fogalmak, illetve az alapvető bizonyítási módszerek tanítása, ugyanakkor már a középiskolai matematikaórákon is algoritmikus irányba kellene elmenni.

A gráfelméleti algoritmusokat hozzá lehet kapcsolni a számelmélethez, ezért az iskolában a gráfelméletet, kombinatorikát, számelméletet egy kalap alá lehetne venni. Egyszerű programcsomagok használata is segíthetné a diákokat. Ösztönző erőként az alkalmazott számelméletet, a játékelméletet és a kódelméletet emlegette. Szerinte ezeket a reguláris tantervbe is bele kellene építeni, ehhez viszont szükséges a valószínűség-számítás és a statisztika ismerete.

Gaál István szerint a középiskolának feladata lenne, hogy aládolgozzon az egyetemnek, illetve hogy elhitesse a matematikai gondolkodásmód fontosságát, és megmutassa annak használhatóságát. Úgy gondolja, hogy az elméleti matematika jelentős része is a számelméleten alapul, ezért el kellene mélyíteni az iskolákban a számelmélet oktatását. Ehhez viszont az kell, hogy több ilyen témájú érettségi feladat legyen, mert amíg nem kerül az érettségibe nagyobb hangsúllyal, addig nem is fogja senki ezt komolyan venni.

Gaál István az iskolában számelméletből az alapfogalmak megtanulása mellett megtaníttatná az euklideszi algoritmust és az Euler-Fermat tételt, ami elemi dolog, és be is lehetne bizonyítani. Ezek mellett még hasznosnak tartaná, ha a titkosírásról is szó lenne, mert ez ráadásul egy olyan dolog, ami általában tetszik is a gyerekeknek. A tanár úr szerint a legfontosabb fogalmak az oszthatóság, az osztó, a maradék, a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös. Úgy gondolja, hogy kezdetben ezeket kell kiépíteni és stabillá tenni. Ha ezek megvannak, utána már van mibe kapaszkodni.

Összefoglalva Gaál István szerint a tanított matematikát alkalmazottabbá és alkalmazhatóbbá kellene tenni. A közép- és felsőfokú oktatás tananyagát a matematika minden területén az alkalmazott, és a valódi életben használt matematikához kellene igazítani.

6.3. Hajdu Lajos egyetemi tanár, a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetének intézetigazgatója, MTA doktora

Hajdu Lajos a vele készített interjú során elmondta, hogy szerinte kétféle ember van: aki középiskola után nem tanul több matematikát, és így a matematika tanulmányait az érettségivel befejezi, illetve aki matematikai irányba megy tovább egyetemre.

Úgy véli, hogy a középiskolai számelmélet egyes területei: a prímek, a faktorizáció, a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös az általános műveltség részei, de sokkal több figyelmet kellene fordítani arra, hogy alkalmazási területeket mutassunk a diákoknak, valamint szép, izgalmas, figyelemfelkeltő, kedvcsináló dolgokkal ismertessük meg őket. Úgy gondolja, hogy érdemes lenne komolyabb, akár megoldatlan problémákat megemlíteni a gyerekeknek, például a prímeknél továbbmenni a Goldbach-sejtés felé. Abban viszont már nem biztos, hogy van értelme mélyebb számelméletet tanítani a diákoknak.

Számelméletből nagyon könnyű nehezet kérdezni. Hajdu Lajos úgy véli, hogy érdemes lenne azzal a jelenséggel is szembesíteni a diákokat, hogy a feladatgyűjteményekben található feladatok nagy része nagyon könnyű. Ámde a kérdéseken picit változtatva, az adott problémán picit továbblépve már egy olyan nehéz kérdéssel találhatjuk szemben magunkat, ami olyan nehézségű lehet, hogy már senki sem tud rá válaszolni. Ezért, és más okokból Hajdu Lajos egy olyan középutat javasol, ahol bizonyos keretek között nagyobb szabadságot kapnának a tanárok. Ajánlott példák közül ők maguk választhatnák ki a tanulóknak megfelelőt, ezzel alkalmazkodva a csoport sajátosságaihoz.

Hajdu Lajos úgy fogalmazott, hogy „A matematika élő dolog.”. Úgy gondolja, hogy ez a diákok szempontjából érdekes, akár meglepő lehet. Ezért érdemes lenne a tanórákon időt fordítani arra is, hogy megmutassuk a diákoknak, hogy a matematika nem egy lezárt dolog, nincs vége, sok még a nyitott kérdés. A matematikán belül a számelmélet is egy ilyen, nem lezárt tudományterület: számos probléma létezik, amit 100, vagy akár 1000 éve senki sem tud megoldani, de ma is keresik a megoldást.

Hajdu Lajos igen meglepődött, mikor elmondtuk neki a kérdőívekből és a kitöltött feladatlapokból leszűrt eredményeket. Beismerte, hogy szomorú a helyzet, de korábban nem gondolta, hogy ennyire. Álláspontja szerint elsősorban ezen kellene változtatni. A tanítás célja nem az kell legyen, hogy bizonyos feladatokat a diákok meg tudjanak oldani, hanem sokkal inkább az, hogy lássák az összefüggéseket.

6.4. Gyarmati Katalin egyetemi docens, MTA doktora

Gyarmati Katalin a vele készített interjúban a számelmélet tanításának határait kereste. Két csoportot különített el aszerint, hogy milyen nehézségű feladatokat adna fel. Az egyik a mezei matematika órák, a másik pedig a szakkörök voltak.

Gyarmati Katalin úgy gondolja, hogy matematika órákon a legalapvetőbb számelméleti fogalmakat kellene tisztázni. Elsősorban az oszthatósági szabályokat (például 3-mal, 9-cel, 5-tel, 11-gyel) és az azokkal kapcsolatos feladatokat hangsúlyozná. Azt mondta, hogy sok elemi számelmélet feladat van, és ezek között sok olyan van, ami oszthatóságra épül, így van miből válogatni. Az oszthatóság mellett fontosnak tartja a prím fogalmának ismertetését és annak megértését, valamint ehhez kapcsolódóan a számelmélet alaptételének bemutatását. A tételt természetesen nem bizonyítaná matematika órán, de mesélne arról, hogy a bizonyítás nehéz. 12. osztályosoknál érdekességként elmondaná, hogy $\frac{x}{\log x}$ darab prímszám van x-ig. 12. osztályos fakultációsoknál akár olyan feladattal is foglalkozna, amelyben kongruencia nélkül mondanánk meg, hogy mi a maradéka egy nagy számnak valamilyen hatványon.

Gyarmati Katalin szerint amikor szakkörről beszélünk, akkor pontosabb információkra van szükségünk ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, hogy milyen szintű és jellegű feladatokat kellene bevinni. Lehet, hogy a szakkörön speciális matematika tagozatos, fakultációs vagy épp a matematikát normál szinten tanuló gyerekek ülnek, és ez természetesen nagyban befolyásolja a feladatok megválasztását. Úgy véli, hogy a felsoroltak bármelyikén feladható lenne például az a feladat, hogy *Mikor osztható négy egymást követő szám szorzata hárommal vagy nyolccal?*. Gyarmati Katalin hozzátette, hogy az ilyen jellegű feladatok közül az egyszerűbbeket matematika órákon is feladhatónak gondolja.

Gyarmati Katalin azt is elmondta, hogy szakkörön – a diákok érdeklődésétől függően – foglalkozna prímszámelmélettel, kongruenciákkal és diofantikus egyenletekkel. Bebizonyítaná a Wilson-tételt, kimondaná és szakkörtől függően akár be is bizonyítaná az Euler-Fermat tételt. Úgy véli, hogy a titkosírás alapjainak bemutatását is be lehetne vinni a szakkörökre, beszélne az egyszer használatos kulcsokról, és különösen érdeklődőknek az RSA-ról is bővebben mesélne.

Gyarmati Katalin arról is beszélt, hogy szerinte emelt szintű érettségin lehetnének olyan egyszerű oszthatósági feladatok, mint például az, hogy milyen n-ekre teljesül, hogy $6|n^3 - n$.

A teljes indukciós bizonyítások Gyarmati Katalin tudomása szerint többnyire csak fakultáción szerepelnek. Úgy véli, hogy ezen változtatni kellene, hogy normál osztályokba is eljusson ez a fontos gondolatmenet és ennek működése. A bizonyítási módszerek könnyen összekapcsolhatóak számelméleti feladatokkal, így fontosnak tartaná ennek bemutatását a számelmélet témakörén belül.

Az interjú során Gyarmati Katalin két példatárt is említett. Az egyik *Róka Sándor: 1000 feladat a matematikából* című könyve, amit egyaránt ajánl matematika órákra és szakkörökre is. Az ebben szereplő feladatok között vannak egészen egyszerűek, amikkel matematika órákon lehetne foglalkozni és bonyolultak is, amik a szakkörökön használhatóak fel. A példatárban a feladatok pontozva vannak, így a megfelelő szintű feladatok kiválasztása nem nehéz a tanárok számára. A másik feladatgyűjtemény, ami szóba került a *Jaglom* példatár volt.

Összegzésként elmondható, hogy Gyarmati Katalin fontosnak tartja a számelmélet oktatását általános- és középiskolában. A tananyagot a gyerekekhez mérten, differenciáltan határozná meg. A matematikával később nem foglalkozóknak csak az alapokat tanítaná, a matematikai irányultságú tanulókhoz viszont mélyebb matematikát is bevinne, irányt mutatva a modern kutatási területek világa felé. Véleménye szerint a matematika érdekességeit, szépségeit is lehetne számelmélettel szemléltetni.

6.5. Károlyi Gyula egyetemi tanár, MTA doktora

Károlyi Gyula az interjú elején azt mondta, hogy nem igazán követi a jelenlegi középiskolai tananyagot, így a beszélgetés során a jelenlegi tananyagtól teljesen függetlenül mondta el, hogy mi az, ami szerinte fontos lenne a középiskolában számelméletből.

Fontosnak tartja a gyökös és logaritmusos kifejezések irracionalitásának bizonyítását. Ennél a feladattípusnál tipikusan a $\sqrt{2}$ szokott előkerülni, amit meglehetősen félrevezetőnek tart, a $\sqrt{3}$, a $\sqrt{24}$, vagy a $\log_{24} 78$ jobban szemléltetné az elméletet.

Károlyi Gyula nagyon nagy hangsúlyt fektetne a számelmélet alaptételének megtanítására. Természetesen a bizonyítására nem térne ki, de a tételt a lehető legmélyebben tanítaná sok példán és feladaton keresztül. Úgy gondolja, hogy a prímek prímtulajdonságával ennél az anyagrésznél nagyon sokat kellene foglalkozni.

Kiemelte a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös tanításának fontosságát. Nyomatékosította, hogy ezeket úgy kell megtanítani, hogy a gyerekek teljesen megértsék, ne csak egy mechanikus, jól betanult sémával oldják meg a feladatot. Ehhez kapcsolódóan rávilágítana arra is, hogy a törtek egyszerűsítésénél miért jutunk ugyanahhoz a végeredményhez, ha más-más sorrendben kezdünk el leosztani a számláló és a nevező közös osztóival. Kihangsúlyozná továbbá azt is, hogy hogyan lehet, illetve kell a törteket egy lépésben a lehető legegyszerűbb alakra hozni.

Károlyi Gyula egyértelműen kijelentette, hogy a nagy hatványon lévő számok maradékának megállapítását, vagyis a moduláris hatványozást nem vezetné be középiskolában. Úgy véli, hogy ez túl nehéz lenne, de a maradékokkal való számolással mindenképpen foglalkozna az órákon. Emellett az oszthatósággal kapcsolatos feladatokat sem hagyná ki a középiskolai számelmélet anyagrészből.

Károlyi Gyula szerint fontos lenne az is, hogy középiskolában a különböző számrendszerek közötti átváltással is sokat foglalkozzanak matematika órákon. Kiemelte a kettes számrendszert, amire a számítógépek világában igen nagy szükség van. Ennek tanításakor nem sajnálná az időt és az energiát, alaposan megtanítaná. Megismertetné a diákokat a kettes számrendszerbeli összeadással és szorzással, melyet tízes számrendszerbe való átváltás nélkül végeztetne a tanulókkal. Ezt azért tarja fontosnak, mert úgy gondolja, hogy csak akkor tudjuk jól megérteni és használni a mindennapi számrendszerünket, ha már láttunk másik számrendszert.

Károlyi Gyula a szerinte fontos számelméleti anyagrészek után a becslések fontosságáról beszélt. Véleménye szerint fontos lenne, hogy a becslésekkel is sokat foglalkozzanak a tanulók középiskolában. Tanítaná például azt, hogy két szám szorzata körülbelül mennyi lehet, vagy egyáltalán hány jegyű lesz az eredmény, amit várunk. Azt mondta, hogy az ilyen jellegű feladatok nagyban hozzájárulnak a gyerekek számolási érzékének fejlődéséhez.

Összegzésként elmondható, hogy Károlyi Gyula - annak ellenére, hogy nem kíséri figyelemmel a középiskolai matematikaoktatást - több olyan anyagrészt is kiemelt a számelmélet témaköréből, amivel foglalkoznak a matematika órákon. Véleménye és a jelenlegi középiskolai tananyag közötti különbség főként a témakörök feldolgozásának mélységében van. Fontosnak tartja, hogy a számelméletet is alaposan megértve, ne csak felületesen tárgyalják az iskolában. Ehhez a kettes számrendszer és a maradékokkal való számolás is szerepet játszhat, így ezek oktatását is jobban hangsúlyozná.

7. Spiralitás

Vizsgálni kezdtük, hogy hogyan lehetne az iskolai számelmélet oktatást hatékonyabbá tenni. Ahogy a számelmélettel foglalkozó oktatók is hangsúlyozták, fontos a spiralitás elvét szem előtt tartva tanítani. Ennek megfelelően olyan feladatokat készítettünk, amelyekhez korábban tanult fogalmakat kell feleleveníteni a számelmélet tanulása közben, illetve amelyek a számelméleti fogalmak átismétlését igénylik más anyagrészek tanulása közben. Az algoritmusok, titkosírás irányába mutató feladatokat is megfogalmaztunk.

Spirálisan felépített tantervben rendszeresen ismétlődnek azok a struktúrák (alapelvek, kulcsfogalmak, összefüggések), amelyek a tananyag legfőbb mondanivalóját hordozzák. Ezek a struktúrák az a tanulmányok előrehaladtával egyre magasabb szinten, egyre gazdagabb tartalommal ismétlődnek. (Az ilyen alapokon összeállított spirális tanterv fogalma Bruner nevéhez fűződik.) Ez a fajta tanterv nem alternatívája a lineárisan vagy modulárisan felépített tantervnek, inkább annak egy másfajta, mélyebb átgondolása. Spirális szerkesztés esetén ugyanis nem elegendő pusztán a témakörök egymásutánját megtervezni, hanem azt is figyelembe kell venni, hogy melyik témakörben mely alapvető struktúrák kerülhetnek elő felelevenítés vagy előkészítés szempontjából. (Knausz 2001, 121)

Ambrus András a következőképp fogalmaz a spiralitásról:

„A spiralitás elvének lényege az, hogy bizonyos oktatási témák különböző életkorokban, különböző feldolgozási szinteken újra és újra előfordulnak. Bruner szerint különböző szinteknek különböző reprezentációmódok felelnek meg. (enaktív – ikonikus – szimbolikus)." (Ambrus 2004, 135)

A spirális felépítés fontosságáról a Kerettantervben is szó esik:

„A fogalmak, összefüggések érlelése és a matematikai gondolkodásmód kialakítása egyre emelkedő szintű spirális felépítést indokol – az életkori, egyéni fejlődési és érdeklődési sajátosságoknak, a bonyolódó ismereteknek, a fejlődő absztrakciós képességnek megfelelően. Ez a felépítés egyaránt lehetővé teszi a lassabban haladókkal való foglalkozást és a tehetség kibontakoztatását." (7)

Megnéztük, hogy hogyan valósul meg a spirális felépítés a jelenleg használatos középiskolai tankönyvekben. Természetesen a megvizsgált tankönyvekben találtunk olyan feladatokat, amik a spirális felépítés szellemében készültek, de azt gondoljuk, hogy a spiralitás elvének intenzívebb, tudatosabb alkalmazására lenne szükség a számelmélet és valójában az egész matematikaoktatása során. Ezekben a tankönyvekben a spiralitás elvét alkalmazó feladatok a számelmélet témakörből leginkább csak a prímszámok fogalmát és az oszthatósági szabályokat elevenítik fel. Ahogy arról már korábbi munkánkban (Csányi – Pozsonyi – Szabó 2014) írtunk, a középszintű érettségin is általában csak ezek a számelméleti anyagrészek kerülnek elő kombinatorikai, a valószínűség-számítási és a halmazműveleti feladatok részeként.

A tankönyvek átnézése után azon kezdtünk el gondolkozni, hogy a számelmélet témakört hol és hogyan lehetne a jelenleginél tudatosabban feleleveníteni a későbbi középiskolai matematika tanulmányok során, hogy ezáltal jobban tudatosodjon a diákokban a tananyag, és ne felejtsék el a korábban megszerzett ismereteiket. Ambrus András így írt ennek fontosságáról: *„Ahhoz, hogy egy séma, koncepció a tanuló kognitív struktúrájának stabil része legyen, szükséges, hogy időről időre új kontextusokban gyakorolja és alkalmazza, amely ezáltal általánossá válik, diszkriminálódik és a többi sémával kapcsolatba kerül."* (Ambrus 2004, 145)

Olyan óraterv és feladatsorok összeállítását tűztük ki célul, amik spiralitás elvére a jelenleginél jobban koncentrálnak. Természetesen nem csak azt tartjuk fontosnak, hogy a középiskolából kikerülő diákok jól emlékezzenek arra, amit számelméletből tanultak. Ezért két irányból nem csak olyan feladatok kidolgozásával foglalkoztunk, amik segítségével a számelmélet beépíthető más anyagrészekbe, hanem olyan feladatokat is készítettünk, amik segítségével más anyagrészek feleleveníthetőek a számelmélet témakörön belül. A dolgozat fizikai kereteit figyelembe véve most csak néhány feladatot szeretnénk bemutatni azok közül, amelyeket a spiralitás szellemében készítettünk.

7.1. Más anyagrészek beépítése a számelméletbe

A számelmélet témakör feldolgozása során számos olyan feladat adható fel, a diákoknak, amelyek más témakörhöz tartozó korábbi ismereteikre építenek. Az ilyen jellegű feladatok megoldása jelentősen hozzájárul ahhoz, hogy a tanulók a korábbi ismereteiket más kontextusban is alkalmazni tudják a későbbiekben, és az iskolában elsajátított matematika tananyag egy egészet alkosson a fejükben.

A számelmélet témakörében felidézhető például a kerület és terület, illetve a háromszög-egyenlőtlenség is. A következőekben ezekhez kapcsolódóan írunk le egy-egy feladatot.

Oszthatósági feladatok között feladható például ez a kerülettel kapcsolatos feladat:

Egy szabályos sokszög kerülete 45 cm. Hány szögű lehet ez a szabályos sokszög?

A területet ehhez hasonló feladatokkal idéznénk fel az oszthatóság tanításakor:

Jancsinak van néhány 1x1 cm-es papírnégyzete. Ezekből kirakott egy téglalapot úgy, hogy egy kis négyzet sem maradt. (Majd összekeverte, és egy másik téglalapot rakott ki belőlük.) Megállapította, hogy az összes kisnégyzet felhasználásával páratlan számú egymástól különböző téglalapot tud kitenni. Jancsi úgy emlékszik, hogy a kisnégyzetek száma 20 és 30 között van. Hány kisnégyzete van Jancsinak?

A téglalap kerülete és területe egyszerre is felidézhető például a következő feladattal az oszthatóság kapcsán:

Bizonyítsuk be, hogy ha egy téglalap területe 2-nél nagyobb prím, akkor a kerülete osztható 4-gyel.

A számelmélet tanításakor nem csupán a kerület és a terület témakörök hozhatóak elő. A háromszög-egyenlőtlenséget például így idéznénk fel a prímszámokhoz kötődő feladatok között:

Egy háromszög két oldala 8 cm és 10 cm. Mekkora lehet a harmadik oldal, ha tudjuk, hogy prím?

Ennek a feladatnak egy módosított változata a jó példa a valószínűség, a háromszög-egyenlőtlenség és a prímszámok témakörök összekapcsolására:

Egy háromszög két oldala 8 cm és 10 cm. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a harmadik oldal prím?

7.2. Számelmélet beépítése más anyagrészekbe

Ahogy a számelmélet témakörbe beépíthetőek más anyagrészek, úgy a számelméletből tanultak is felidézhetőek más anyagrészek tárgyalásakor. A témakör felelevenítésére leginkább a 10., 11. és 12. évfolyamokon van szükség, hiszen ekkor a kerettanterv szerint már nem találkoznak új számelméleti ismeretekkel a tanulók. (8) A továbbiakban néhány, az említett évfolyamok matematika anyagrészeihez és a számelmélethez egyaránt kapcsolódó feladatot mutatunk be.

A következő trigonometriához kapcsolódó feladatban például a 16 és a 24 közös többszöröseit kell megkeresnünk, így ehhez kapcsolódóan feleleveníthető a legkisebb közös többszörös.

Melyek a sin $\left(\frac{x}{16}\right)$*és a sin* $\left(\frac{x}{24}\right)$ *közös gyökei?*

Az exponenciális egyenletek tárgyalásakor a számelmélet alaptételét frissíthetjük fel az alábbi feladattal:

Mely x, y *egészek esetén teljesül* $2^{x-y} \cdot 3^{4y-x} = 2^{2x-4y} \cdot 3^{x-4}$*?*

Koordinátageometria témakörében az egyenes egyenleténél a következő számelmélettel kapcsolatos feladatot adnánk fel:

Az $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ *pontokon átmenő egyenes mely* x_1, y_1, x_2, y_2 *esetén megy át az origón? Mit mondhatunk a pontok koordinátáinak arányáról?*

A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakjának használatát is összekapcsolhatjuk a prímfogalom elmélyítésével:

Az $f(x) = x^2 - x + 3$ *függvény milyen* x*-ek esetén vesz fel prímszámot?*

A következő feladat a számelmélet alaptételét eleveníti fel egy logaritmikus egyenlettel. Ennek részletezésével később foglalkozunk.

Igaz-e, hogy $3 \cdot lg\, 3 + lg\, 7 + lg\, 11 + lg\, 13 + lg\, 37 + lg\, 101 + lg\, 9901 = 12$*?*

Az utolsó példánk a számelmélet alaptételét kapcsolja össze az irracionálissal.

Bizonyítsd be, hogy $\sqrt[5]{24}$ *irracionális!*

7.3. A Bloom-féle céltaxonómia újragondolása

Továbbiakban az imént említett logaritmikus egyenlet megoldásának elemzésével foglalkozunk. A feladat segítségével rávilágíthatunk arra, hogy megoldója mely értelmi fejlődési szinten sajátította el a logaritmus és a számelmélet témaköréhez kapcsolódó megfelelő részeket. Itt a bevezetőben említett Bloom-féle céltaxonómiára gondolunk.

Már a (Falus, 2003: 153)-ban is említik, hogy a rendszerben értelmezett részcélok hierarchiája kérdéses, az egyes szintek a valóságban nehezen szétválaszthatók. Bloom taxonómiája nem húzható rá egyértelműen a matematikai fogalmakra, tételekre, az általa említett kognitív (értelmi) fejlődés szintjei itt másképp épülnek fel. Esetünkben például láthattuk azt, hogy sok diák hibátlanul alkalmazza a számelmélet alaptételét úgy, hogy még nem érti azt. Ez szemben áll azzal, hogy Bloom szerint az alkalmazás csak a megértés után következik. Szükség van arra, hogy újragondoljuk ezt a rendszert, amit a több mint 1200 dolgozat kielemzésére, és számos személyes megfigyelésre alapozva tettünk meg.

A taxonómia újragondolásakor a logaritmusos feladatunkból indultunk ki, így elsősorban az ehhez kapcsolódó ismeretekhez – a számelmélet alaptételéhez és a logaritmus azonosságaihoz – köthető értelmi fejlődési rendszert gondoltuk újra. További kérdéseket vet fel annak meggondolása, hogy az általunk létrehozott szinteket mennyire kell árnyalni, amikor kiterjesztjük a matematika más területeire.

A rendszer újraértelmezését, pontosítását és tisztázását a számelmélet alaptételéhez tartozó értelmi fejlődési szinteken keresztül mutatjuk be.

Az **ismeret** szintje az, amikor a diák emlékszik arra, hogy egy szám felbontható prímek szorzatára, de nem biztos, hogy fel is tudná bontani.

Az **végrehajtás** szintjén a tanuló a felbontást már el is tudja készíteni. Például ha konkrétan az a feladat, hogy fel kell bontani egy számot prímek szorzatára, akkor meg tudja csinálni.

A következő szint két fokozatból áll: a begyakorolt alkalmazás és tudatosítás kategóriákból. Ezt a két szintet, kategóriát nem lehet hierarchikusan felépíteni, hiszen néha az alkalmazást követi csak a megértés, néha pedig fordítva is lehetséges. Ezért ezeket egy szinten, párhuzamosan képzeljük el.

A **begyakorolt alkalmazás** szintjén a tanuló a felbontást egy ismert környezeten belül már el is tudja készíteni. Például tudja, a legkisebb közös többszörös kiszámolása magával hozza a prímtényezős felbontás használatát, és ki is tudja számolni ennek segítségével a legkisebb közös többszöröst.

A **tudatosítás** szintjén a diák úgy gondolja, hogy érti és vissza tudja adni a tételt, ami így belsővé válik. Például ekkor már nem jut eszébe a tanulónak, hogy megkérdezze azt, hogy a felbontást a legkisebb prímmel kell-e kezdeni. (Ebből a kérdésből az derülne ki, hogy a diák még nem érti a tétel sorrendiségre vonatkozó részét.)

Az **új környezetben való alkalmazás** szintjén lévő diák már egy teljesen új környezetben is felismeri, és használni tudja a számelmélet alaptételét. Például a *Számelmélet beépítése más anyagrészekbe* című fejezet exponenciális egyenlettel kapcsolatos feladatánál és a most tárgyalt logaritmikus egyenletes feladat esetén is. Mivel ez egy teljesen új környezet, ezért itt nem beszélhetünk begyakorolt mechanizmusról.

A **teljes elemzőképesség** szintjén a tanuló meg tud magyarázni minden, a tétellel kapcsolatos kérdést, a tételt beépítette a már meglévő tudásbázisába. Ebben az esetben például érti a számelmélet alaptételének bizonyítását, és saját szavaival vissza is tudja adni azt. Ekkor a tanuló már több irányból is meg tudja közelíteni a tételt, például tud ellenpéldát adni rá.

A számelmélet alaptételéhez kapcsolódóan meghatározott értelmi fejlődési szintek közötti minőségi ugrás egyáltalán nem egyenletes. Gondoljunk például arra, hogy az első két szintet általában közel egyszerre sajátítják el a diákok, míg az utolsó már egyetemi szintű, így középiskolai tanulmányaik során a diákoknak nem kell az utolsó szintig eljutniuk.

Félrevezető lehet az, hogy nehéz eldönteni, hogy valaki mechanikusan old-e meg egy feladatot, vagy ténylegesen érti az egyes lépések mögöttes tartalmát. Például ha egy ismert környezeten belül a tanuló érti egy feladat megoldását, és meg is tudja magyarázni annak a mögöttes tartalmát, akkor mind a begyakorolt alkalmazás, mind a tudatosítás kategóriát elérte. Viszont abban az esetben, amikor a diák korábban már látott hasonló példát, és mechanikusan alkalmazza annak megoldását ennél a feladatnál is, akkor értelmi fejlődési szintje látszólag van csak a tudatosítás szintjén, de valójában nem éri el azt, hiszen nem tudja megmagyarázni a megoldását.

Az értelmi fejlődési szintjei hasonlóan alakulnak a logaritmusazonosságai esetén is. Például az ismeret szintjén állnak azok a tanulók, akik csupán felismerik az azonosságok használhatóságát, de nem tudják azok segítségével átalakítani az adott kifejezést. Akik viszont már továbbléptek a végrehajtás szintjére, azok egy egyszerű kifejezésre helyesen tudják alkalmazni a logaritmus azonosságot. A begyakorolt alkalmazás jelenti azt, amikor már rutinszerűen, több azonosságot is tudnak alkalmazni egy kombinált kifejezésre egy ismert környezetben. Amikor a diákok már nem csak mechanikusan végzik az átalakításokat, hanem értik az azonosságok közti összefüggéseket, akkor a tudatosítás kategóriát is elérik.

A továbbiakban azt fejtjük ki, hogy az egyes megoldási stratégiákból, módszerekből mely értelmi fejlődési szintre következtethetünk az adott ismerettel kapcsolatosan.

A logaritmikus egyenlet helyességének csupán számológéppel történő belátása arra utalhat, hogy a megoldó a logaritmus azonosságainál még nem áll a végrehajtás szintjén, tehát vagy az ismeret szintjén áll, vagy még addig sem jutott el. Ekkor a tanuló könnyen hibás eredményre juthat számológépe pontatlansága miatt, hiszen a legtöbb számológép 10-12 számjegy pontossággal számol, ami a mi esetünkben azt jelenti, hogy az egyenlőség teljesül. Ezen megoldási stratégia esetén még nem állapítható meg az, hogy a számelmélet alaptételének értelmi fejlődési rendszerében melyik szintjén áll, hiszen a logaritmikus egyenlet átalakításának hiányában nem jöhetett létre a kapcsolat a számelmélet alaptételével.

Egy külön kategóriába tartoznak azok a diákok, akik megkérdőjelezik számológépük pontosságát, továbbgondolkoznak, és eszükbe jut, hogy ennél a feladatnál a korábban már tanult, logaritmusra vonatkozó azonosságokat kellene alkalmazni. Ha a diákban csak felmerül ez a gondolat, de nem tudja alkalmazni az azonosságokat, akkor csupán az ismeret szintjén áll. A logaritmus azonosságainak helyes alkalmazása esetén már mondhatjuk, hogy a tanuló eljutott a begyakorolt alkalmazás szintjére. Ez viszont még korántsem jelenti azt, hogy a tudatosítás szintjére is átlépett. Természetesen igaz az, hogy a begyakorolt alkalmazás szintjén állók nem feltétlenül ezeken a lépéseken keresztül jutottak el erre a szintre, hiszen a számológép használatának gondolata nem kell, hogy felmerüljön bennük.

A helyes átalakítások után is többféle megoldási módszer merülhet fel. Az egyik lehetőség az, hogy a tanuló hosszas számításokba bocsátkozik, és úgy jut ellentmondásra. Ekkor a tanuló a számelmélet alaptételének értelmi fejlődési rendszerében még nem jutott el az új környezetben való alkalmazás szintjére. Azok a diákok viszont, akik ebben a rendszerben már legalább az új környezetben való alkalmazás szintjén állnak, azok a számelmélet alaptételére hivatkozva azonnal, számolás nélküli megoldásra jutnak.

A 1. táblázatban foglaljuk össze azt, hogy a logaritmikus egyenlettel kapcsolatos feladat egyes megoldási módszereiből mely értelmi fejlődési szintekre következtethetünk a logaritmus azonosságaival, illetve a számelmélet alaptételével kapcsolatosan.

megoldási módszer	logaritmus azonosságai	számelmélet alaptétele
csak számológép	< begyakorolt alkalmazás szintje	nem állapítható meg
helyes átalakítás + hosszas számolás	≥ begyakorolt alkalmazás szintje	< új környezetben való alkalmazás
helyes átalakítás + számelmélet alaptétele	≥ begyakorolt alkalmazás szintje	≥ új környezetben való alkalmazás

1. táblázat: A logaritmus azonosságainak és a számelmélet alaptételének értelmi fejlődési szintjei a megoldási módszerek függvényében

7.4. Észrevételek egy számelmélettel kapcsolatos bizonyításhoz

Kutatásunk során több olyan témába is belebotlottunk, amiről úgy gondoljuk, hogy érdemes hosszabban kifejtenünk, és mélyebben foglalkoznunk annak tartalmával, illetve fejleszthetőségével. Az egyik ilyen téma a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása. Az emelt szintű érettségi szóbeli tételek között szereplő algebra és számelmélet tétel tanárok és diákok körében egyaránt népszerű bizonyítása ez. Ennek a tételnek több fajta bizonyítása ismert, de középiskolában való taníthatóság szempontjából nem mindegyikkel értünk egyet. Például az egyik gimnázium honlapján is az alábbi bizonyítás szerepel:

„Tételezzük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális, azaz $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, ahol a, b egész számok, és b nem nulla. Azt is feltételezhetjük, hogy $(a, b)=1$, azaz egymáshoz képest relatív prímek, azaz a tört tovább nem egyszerűsíthető.

$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ egyenlőség mindkét oldalát négyzetre emelve $2=\frac{a^2}{b^2}$ Az egyenlőséget b^2-tel szorozva $2b^2=a^2$

Tehát a^2 osztható 2-vel, azaz páros szám, de akkor a is az, így $a=2c$, így $a^2=4c^2$. Ebből: $2b^2=4c^2$, azaz $b^2=2c^2$ Azaz b^2 is páros szám lenne, ami nem lehetséges, hiszen feltételeztük, hogy a és b egymáshoz képest relatív prímek. Ellenmondásra jutottunk, a kiinduló feltételezésünk hibás, $\sqrt{2}$ nem lehet racionális szám."

Más, ehhez hasonló bizonyításokat is találtunk, melyek alapvetően ugyanerre a gondolatmenetre épülnek. A továbbiakban ezen a példán keresztül mutatjuk be a bizonyítással szemben állított észrevételeinket.

A fő meglátásunk az, hogy ez a bizonyítás eltusol egy lényeges, bizonyítandó részletet. Honnan tudjuk azt, hogy abból, hogy $2|a^2$-ből következik az, hogy $2|a$-t? Ennek bizonyításához hivatkoznunk kell a számelmélet alaptételére. Viszont ha már alkalmazzuk a számelmélet alaptételét, akkor a fent említett bizonyításban sok lépés feleslegessé válik, és így egy sokkal egyszerűbb bizonyítás is adódik. Például az alábbi:

> Tegyük fel indirekt, hogy a $\sqrt{2}$ racionális szám, azaz felírható két egész szám hányadosaként. Legyen $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
>
> Emeljük négyzetre: $2 = \frac{p^2}{q^2}$
>
> Szorozzunk be a nevezővel: $2 \cdot q^2 = p^2$
>
> Ekkor az egyenlet bal oldalán a 2 páratlan kitevőn szerepel, míg a jobb oldalán páros kitevőn. Ez nem lehetséges a számelmélet alaptétele szerint. Abból a feltételezésből, hogy a $\sqrt{2}$ racionális szám, logikailag helyes lépéseken keresztül ellentmondáshoz jutottunk, ami azt jelenti, hogy az indirekt feltétel hamis. Tehát a $\sqrt{2}$ nem racionális, azaz irracionális szám.

A számelmélet alaptételére való hivatkozással könnyebben átlátható és általánosabb bizonyítást kapunk, hiszen ez a fajta bizonyítás könnyen átírható lenne más gyökös kifejezésekre, például az $\sqrt[5]{24}$-re is. Véleményünk szerint fontos lenne, hogy a diáknak más összetettebb példákat is lássanak, hogy megértsék a bizonyítás lényegét. Erre utalt Károlyi Gyula is a vele készített interjú során.

8. Titkosíráshoz vezető feladatsor

Az egyik legfontosabb alkalmazása a számelméletnek a titkosírás. Az RSA titkosítás (Ronald L. Rivest, Adi Shamir, Leonard Adelman) szabadalmaztatta 1977-ben. Az egyetemeken 1980 óta tananyag minden elsőéves számelmélet vagy diszkrét matematika kurzuson. A titkosírás matematikai hátterét az Euler-Fermat-tétel adja, a biztonságát pedig az a bizonytalan tény, hogy nem lehet gyorsan számokat prímtényezőkre bontani. Ez utóbbi azt jelenti, hogy nem ismert olyan módszer, algoritmus, amely alkalmas lenne arra, hogy a leggyorsabb számítógépek ezen algoritmus segítségével egy nagy számot prímtényezőkre bontsanak. A titkosítás biztonsága tehát azon múlik, hogy feltételezzük, hogy nincs faktorizáló algoritmus.

A titkosítás alapjait középiskolában az általános osztályokban csak megemlítenénk, viszont a fakultációs osztályokban 20-25 perc alatt könnyen elmagyarázható lenne.

A titkosítás alapjaira rávezető feladatsoroknál azt szeretnénk elérni, hogy tudjanak egész számokat hatványozni modulo n. A modulo n hatványozás kulcsa, hogy magát az egész számot (hatványt) nem kell kiszámolni, elég csak a maradékot modulo n. Amikor maradékokkal számolunk, akkor már a részszámításoknál is elég csak a maradékokat venni. Ez a kongruencia, de ezt a szót nem vezetnénk be középiskolában. Természetesen tagozaton, fakultáción vagy szakkörön előkerülhet.

Ami a legelérhetőbb feladat, és amivel eddig is találkoztak a diákok, az a hatványoknak az utolsó vagy utolsó két számjegye. Több füzetben, tankönyvben találkoztunk például a következő típusú feladattal:

„$Mi\ a\ 19^{100}\ utolsó\ számjegye$?"

„$5|136^{11} - 21^{83}$?"

Az utolsó számjegy vizsgálata burkoltan a modulo 10 számolás, a második feladat pedig arra mutat rá, hogy ha egy szám öttel osztva egyet ad maradékul, akkor minden hatványa egyet ad.

Mi az alábbi feladatsorokkal vezetnénk be a hatványozást modulo n.

1. feladat:

a) Számold ki zsebszámológéppel a 3 egész kitevőjű hatványait 0-tól 8-ig!
b) Írd le a hatványok utolsó számjegyeiből képzett sorozatot!
c) Írd le a hatványok első számjegyeiből képzett sorozatot!

Mit veszel észre?

d) Számold ki zsebszámológéppel a 13 egész kitevőjű hatványait 0-tól 8-ig!
e) Írd le a hatványok utolsó számjegyeiből képzett sorozatot!
f) Írd le a hatványok első számjegyeiből képzett sorozatot!

Mit veszel észre?

2. feladat:

a) Állapítsd meg (anélkül, hogy kiszámolnád), hogy mennyi lehet a 3^9 és a 13^9 utolsó számjegye!
b) A 3-nak és a 13-nak melyik következő hatványa fog 1-re végződni?
c) Állapítsd meg, hogy 13 melyik hatványai fognak 1-re végződni!

d) Mire végződik 3^{101}, 13^{2015}?

3. feladat:

a) Számold ki a 21 egész kitevőjű hatványait 0-tól 7-ig, írd le a tagok utolsó két számjegyét!

b) Mi lesz a 21^8, 21^{101}, 21^{2014} utolsó két számjegye?

c) Mi lesz a 21^{101} utolsó két számjegye?

d) Mi lesz a periódus?

Az utolsó két számjegy megkeresése az alábbi módon is elvégezhető: $21^2 = 441$, de mi abból csak az utolsó két számjegyet tarjuk meg és azt hatványozzuk tovább. Tehát $41 \cdot 21 = 861$, megtartjuk a 61-et és azt szorozzuk csak tovább, stb.

4. feladat:

a) Mi lesz 47 hatványainak utolsó két számjegyéből álló sorozat legkisebb periódusa?

b) Mi lesz a 47^{122} utolsó két számjegye?

c) Mi lesz a 47^{401} utolsó két számjegye?

5. feladat:

Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 hatványainak 7-tel vett maradékaiból képezzünk egy-egy sorozatot. Mennyi lesz a periódus a különböző sorozatoknál?

A feladatsor mellett óratervet is készítettünk arról, hogy hogyan vezetnénk be a modulo n hatványozást, illetve az Euler-Fermat-tételt egy 11. osztályos fakultációs csoportban. Az óraterv kicsit feszített, de egy jobb képességű csoporttal egy tanóra alatt kivitelezhető. Az óraterv a 6. mellékletben tekinthető meg.

9. Irodalomjegyzék

Ambrus András 2004. *Bevezetés a matematika-didaktikába.* ELTE Eötvös Kiadó. Budapest.

Ball, D. L. 1990. Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21, 132-144.*

Banikowski, Alison K. 1999. STRATEGIES TO ENHANCE MEMORY BASED ON BRAIN-RESEARCH *Focus on Exceptional Children*, 0015511X, Oct99, Vol. 32, Issue 2

Csányi Petra – Pozsonyi Enikő – Szabó Zsanett 2014. *A számelmélet tanításának hatékonysága általános- és középiskolában*

Falus Iván (szerk.) 2003. *Didaktika: elméleti alapok a tanítás tanulásához*. Budapest: Tankönyvkiadó.

Knausz Imre 2001. *A tanítás mestersége.* http://mek.oszk.hu/01800/01817/01817.pdf (2014.11.29.)

Pintér Kálra. Számelmélet - Közös osztók, közös többszörösök 0644.MODUL http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/3_modulleirasok-tanar-tanulo-eszkoz/2_a_tipus/6-evfolyam/2_tanari_modulok/064-temakor/amat_0644__tanar.pdf (2015.01.06.)

Tóthné Szalontay Anna 2014. *Matematika 9 Második kötet* Kísérleti Tankönyv

Tall, David 2013. *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics* Publisher: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 484 pages

Van Hiele, P.M. 2002. "Similarities and differences between the theory of learning and teaching of Skemp and the Van Hiele levels of thinking", p27-47 *Mathematics Education Research Joinhal*

Van Hiele, P. M. 1986. *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education* Orlando, FL: Academic Press.

Leron, U. 1985. A direct approach indirekt proofs. *Educational Studies in Mathematics 16, 312-325*

Movshovitz-Hadar, N., and Hadass, R. 1990., "Preservice Education of Math Teachers Using Paradoxes," *Educational Studies in Mathematics, 21, 265-287*.

Pólya György 2000. *A gondolkodás iskolája - Hogyan oldjunk meg feladatokat?* Akkord Kiadó, 226 oldal

Rina Zazkis and Stephen Campbell 1996b Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers: Preservice Teachers'Understanding *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 27, No. 5 pp. 540-563

Steffe, L. 1990. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36

Tall 2012 D.O. Tall & M.O.J. Thomas (eds.) (2002), *"Intelligence, learning and understanding - A tribute to Richard Skemp"*, Flaxton Australia: Post Pressed. NB.

Thomas Colignatus 2014. Pierre van Hiele and David Tall: Getting the facts right http://thomascool.eu (2015.01.06.)

(1) Elementary Integrated Curriculum Framework Montgomery County Public Schools September, 2010

https://www.montgomeryschoolsmd.org/uploadedFiles/curriculum/integrated/EIC-Framework.pdf (2015. 01. 06.)

(2) Mathematics programmes of study: key stage 3 National curriculum in England, September 2013
https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/239058/SECONDARY_national_curriculum_-_Mathematics.pdf (2015. 01. 06.)

(3) Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich, 15.10.2004.
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (2015. 01. 06.)

(4) Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss, 4.12.2003
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (2015. 01. 06.)

(5) Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife, 18.10.2012.
http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf (2015. 01. 06.)

(6) Math Teacher' Cicle Network
http://www.mathteacherscircle.org/upcoming-workshops/for-teachers/ (2015. 01. 06.)

7. *Kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára.*
http://kerettanterv.ofi.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html (2014.12.29.)

8. *Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára.*
http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html (2014.12.29.)

10. Mellékletek

1. melléklet:

Dolgozat A változat

A csoport

Név:

Osztály:

A feladatok megoldásához számológép nem használható. Minden számítást a lapon végezzetek.

1. Feladat. Készítsd el a 280 prímtényezős felbontását!

2. Feladat. Csilla talált egy 180 cm hosszú, 1 cm széles szalagot. Olyan 1 cm szélességű, egyforma téglalapokra akarja szétdarabolni, amelyek másik oldala is egész cm hosszúságú. Sorold fel az összes lehetőséget (beleértve azt is, hogy Csilla mégsem darabolja fel a szalagot)!

3. Feladat. Válaszd ki az alábbi számok közül azokat a számpárokat, amelyeknek a legnagyobb közös osztója 1.
36, 49, 32

4. Feladat. Milyen maradékot ad 25-tel osztva a 12345?

5. Feladat. Karikázd be azokat a számokat, amik oszthatók

a. 3-mal

   283, 96, 1176

b. 6-tal

   72, 76, 84

c. 4-gyel

   48, 154, 228

6. Feladat. Zsoltinak az első 5 éves érettségi találkozója 2012-ben volt, ami szökőév. Ha 5 évente találkoznak, mikor lesz legközelebb szökőévben érettségi találkozó? (Négyévente van szökőév.)

7. Feladat. Mennyi 1320 és 504 legnagyobb közös osztója?

2. melléklet:

Dolgozat B változat

B csoport

Név:

Osztály:

A feladatok megoldásához számológép nem használható. Minden számítást a lapon végezzetek.

1. Feladat. Írd le az alábbi oszthatósági szabályokat!

a. 8-cal:

b. 12-vel:

c. 3-mal:

2. Feladat. Sorold fel az 54 összes osztóját!

3. Feladat. Egy szerdai matekórán a tanárnő bejelentette, hogy 30 nap múlva dolgozatírás lesz. Julcsi jelentkezett, hogy 30 nap múlva szombat lesz. Igaza van-e Julcsinak? Milyen napon lesz a dolgozatírás?

4. Feladat. Az alábbi számok közül melyek relatív prímek?
21, 45, 32

5. Feladat. Bontsd fel prímek szorzatára a következő számot:

$$420 \,\Big|$$

6. Feladat. Az iskolai évkönyvbe a végzős osztályok minden tanulójáról raknak egy képet. Az egyes osztályok tanulóinak képei külön oldalra kerülnek. A képeket egymás mellé, sorokba rendezve ragasztják az évkönyvbe. Maximum hány képet rakhatunk egy sorba, ha azt szeretnénk, hogy minden oldalon mindegyik sorban ugyanannyi kép legyen és a végzős osztályokba 30, 24, illetve 36 tanuló jár?

7. Feladat. Mennyi 8 és 12 legkisebb közös többszöröse?

3. melléklet:

Dolgozat C változat

C csoport

Név:

Osztály:

Milyen formában tanulod a matematikát? (Húzd alá!) normál/fakultáció/tagozat

A feladatok megoldásához számológép nem használható. Minden számítást a lapon végezzetek.

1. Feladat. Készítsd el a 280 prímtényezős felbontását!

2. Feladat. Egy 45 cm hosszú szalagot szeretnénk feldarabolni kisebb, egyforma, egész cm hosszúságú szalagokra. Milyen hosszú darabokat kaphatunk? Sorold fel az összes lehetőséget beleértve azt is, hogy nem daraboljuk fel a szalagot.

3. Feladat. Adjuk meg az alábbi számok közül azokat a számpárokat, amelyek legnagyobb közös osztója 1. Sorold fel az összes ilyen számpárt!

36, 49, 32

4. Feladat. Milyen maradékot ad 25-tel osztva a 12345?

5. Feladat. Karikázd be azokat a számokat, amik oszthatók

a. 3-mal.
283, 9672, 1176, 111111, 111112

b. 6-tal.
283, 9672, 1176, 111111, 111112

c. 4-gyel.
2345, 1234, 48148, 32100, 76432

6. Feladat. Egy uszodában két medence van. Az egyikben 24 naponta, a másikban 28 naponta cserélik le a vizet. Az uszoda zárva van azon a napon, amikor mindkettőben vizet kell cserélni. Ma zárva van az uszoda. Mikor lesz zárva legközelebb?

7. Feladat. Mennyi 1320 és 504 legnagyobb közös osztója?

4. melléklet:

Dolgozat D változat

D csoport

Név:

Osztály:

Milyen formában tanulod a matematikát? (Húzd alá!) normál/fakultáció/tagozat

A feladatok megoldásához számológép nem használható. Minden számítást a lapon végezzetek.

1. Feladat. Írd le az alábbi oszthatósági szabályokat!

a. 8-cal:

b. 12-vel:

c. 3-mal:

2. Feladat. Sorold fel az 54 összes osztóját!

3. Feladat. Egy szerdai matekórán a tanárnő bejelentette, hogy 100 nap múlva lesz az utolsó tanórájuk együtt. Julcsi jelentkezett, hogy 100 nap múlva szombat lesz. Igaza van-e Julcsinak? Milyen napon lesz az utolsó matekóra?

4. Feladat. Az alábbi számok közül mely párok relatív prímek? Soroljuk fel az összes lehetőséget!
21, 45, 32

5. Feladat. Bontsd fel prímek szorzatára a következő számot:

$$420 \,\Big|$$

6. Feladat. Az iskolai évkönyvbe a végzős osztályok minden tanulójáról raknak egy képet. Az egyes osztályok tanulóinak képei külön oldalra kerülnek. A képeket egymás mellé, sorokba rendezve ragasztják az évkönyvbe. Maximum hány képet rakhatunk egy sorba, ha azt szeretnénk, hogy minden oldalon mindegyik sorban ugyanannyi kép legyen és a végzős osztályokba 30, 24, illetve 36 tanuló jár?

7. Feladat. Mennyi 8 és 12 legkisebb közös többszöröse?

5. melléklet

Az egyes feladatokhoz tartozó kördiagramok

Kategóriák jelentése:

0: hozzá sem kezdett a feladathoz

1: írt valami kezdetlegeset, olvasta a feladatot, de nem tudta megoldani (pl. lerajzolta a szalagot)

2: elkezdte, de rosszul kezdte el

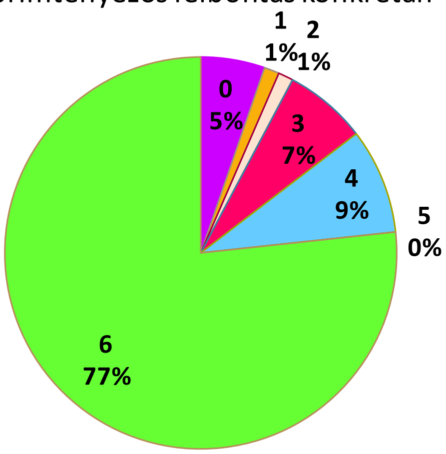
3: jól kezdte, de később elvi hiba (C oszthatósági szabályoknál: jót és rosszat is karikázott)

4: elvileg jó, de számolási hibát követett el (C oszthatósági szabályoknál: rosszat is karikázott)

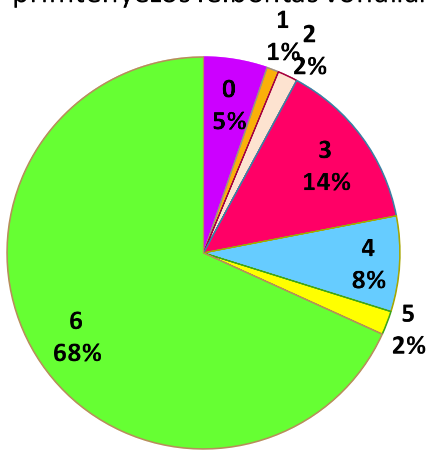
5: jól kezdte, de nem fejezte be vagy nem teljes a megoldás (C oszthatósági szabályoknál: kimaradt)

6: hibátlan megoldás

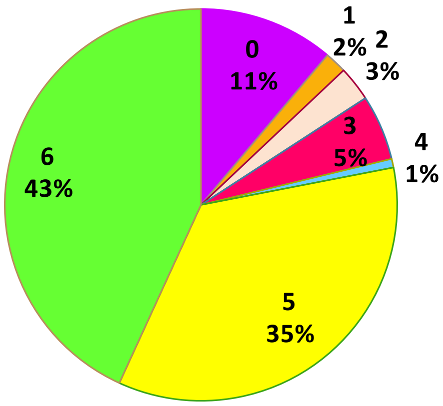
C prímtényezős felbontás konkrétan



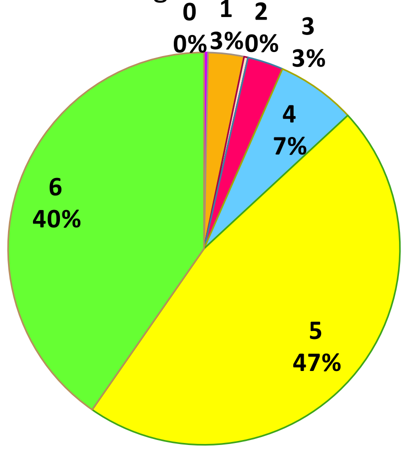
D prímtényezős felbontás vonallal



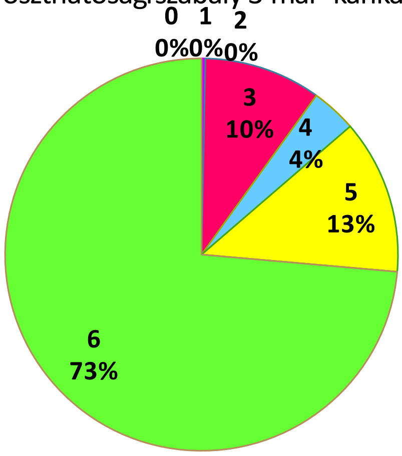
C osztók meghatározása - szöveges



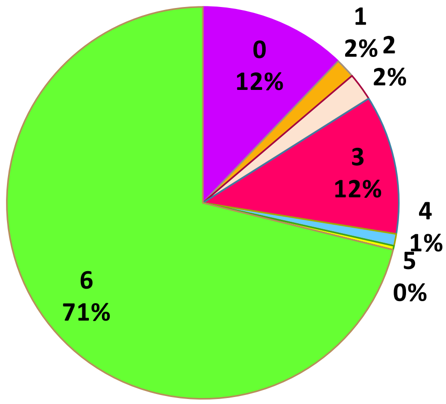
D osztók meghatározása konkrét



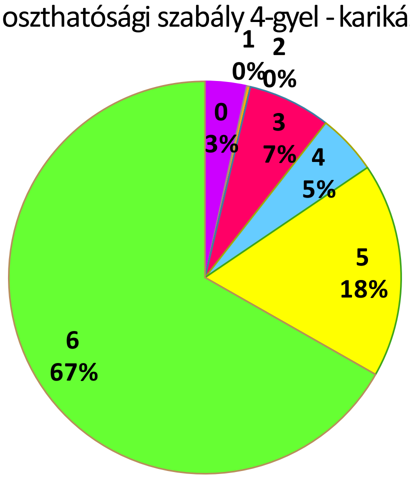
C oszthatósági szabály 3-mal - karikázós



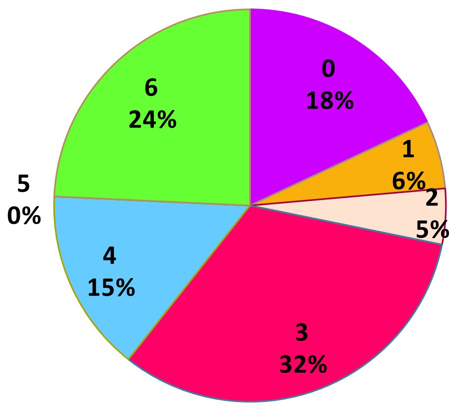
D osztatósági szabály 3-mal - szöveges



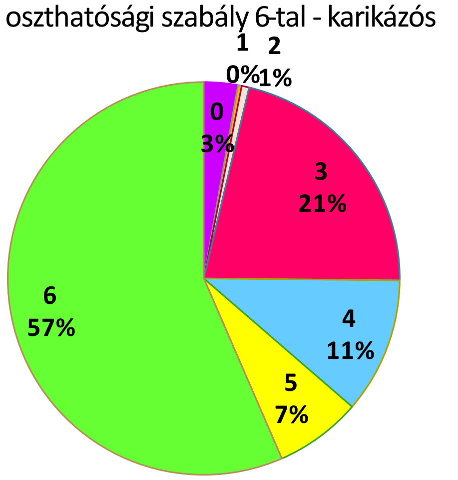
C oszthatósági szabály 4-gyel - karikázós



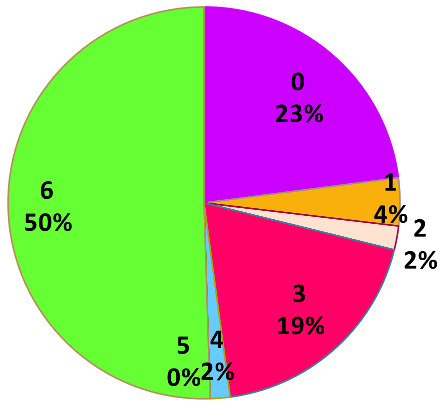
D osztatósági szabály 8-cal - szöveges



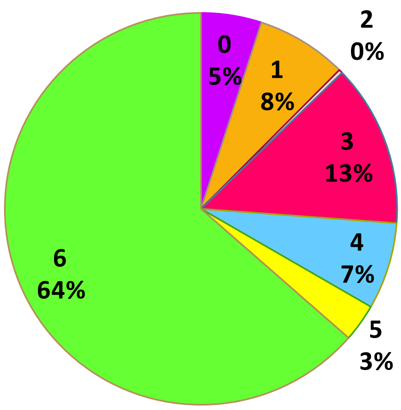
C oszthatósági szabály 6-tal - karikázós



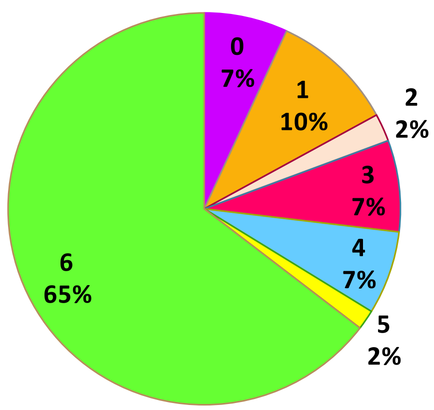
D oszthatósági szabály 12-vel - szöveges



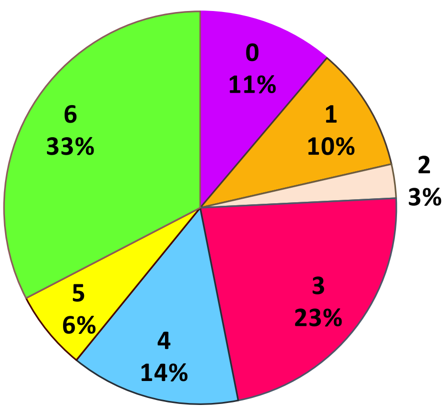
C maradékos osztás - konkrét



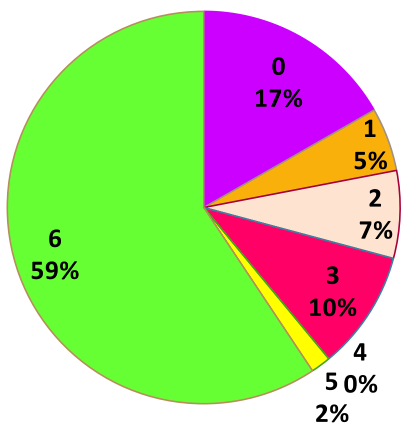
D maradékos osztás - szöveges



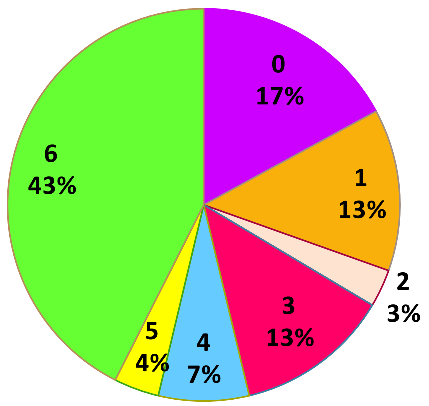
C legnagyobb közös osztó - konkrét



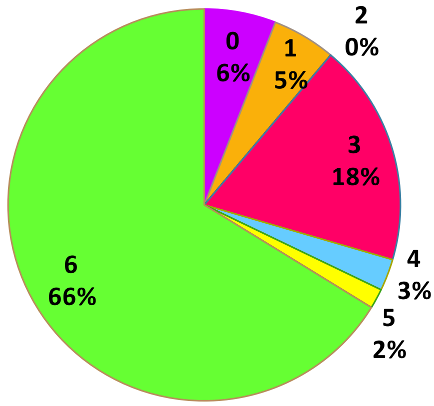
D legnagyobb közös osztó - szöveges



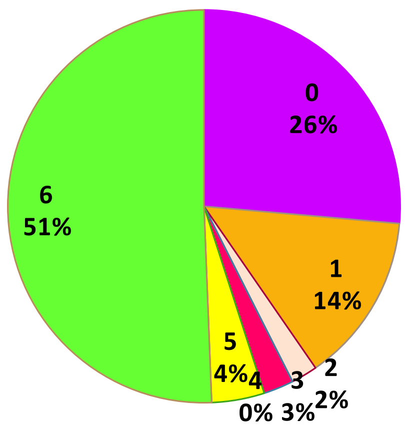
C legkisebb közös többszörös - szöveges



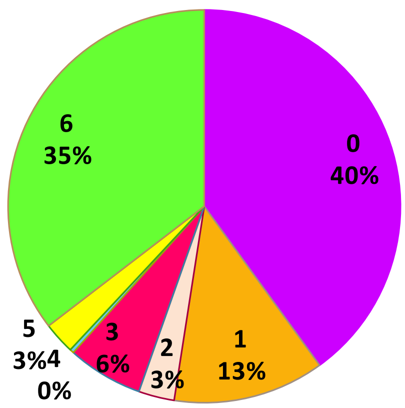
D legkisebb közös többszörös - konkrét



C legnagyobb közös osztó 1



D relatív prím



6. melléklet

Óraterv az Euler-Fermat-tétel középiskolai bevezetéséhez

Óraterv

Tantárgy: matematika

Osztály: 11. évfolyam

Az óra témája: Hatványozás modulo n

Az óra cél- és feladatrendszere: a tanítandó ismeretek (fogalmak, szabályok stb.) és az elérendő fejlesztési szint, tudásszint megnevezése, a fejlesztendő attitűd, készségek, képességek:

- A tanulók szerezzenek tapasztalatot a hatványok végződéseinek szabályszerűségeiről
- Tudjanak levonni következtetéseket tapasztalataikból
- Tudjanak általánosításokat megfogalmazni tapasztalataik alapján
- Tudják alkalmazni a megfogalmazott ismereteket
- a problémamegoldó gondolkodás fejlesztése

A tanítandó ismeretek:

- hatványok végződésének vizsgálata
- periódus felismerése
- $\varphi(n)$ függvény fogalma, meghatározás speciális esetekben
- Euler-Fermat tétel
- Euler-Fermat tétel alkalmazása a hatványozás során, n speciális

Időkeret	A tanulók tevékenysége	A pedagógus tevékenysége	Célok és feladatok	Módszerek	Tanulói munkaformák	Eszközök	Megjegyzések
3 perc	Tanult fogalmak felelevenítése	Kérdések felvetése, rendszerezés	Ismétlés: maradék, maradékos osztás, prímszám, legnagyobb közös osztó, relatív prím fogalma	Megbeszélés	frontális munka		Ügyelni kell a precíz fogalom használatra
2 perc	Sorsolás után a csoporttagok egy asztalnál helyezkednek el	Sorsol a jelenlévő tanulókból	Csoportok kialakítása		frontális munka	számítógép, Teamup csoportsorsoló	Csoportnév, azon belül a tanulók betűkkel történő megkülönböztetése
5 perc	Kitöltik a megosztott google táblázatot számológép segítségével	Segítségnyújtás a feladat értelmezésében, az eszköz használatában	Az adott számok első 10 hatványának utolsó, ill. utolsó két jegyének meghatározása. Eredmények megfigyelése, következtetések megfogalmazása	Számológép használata	csoportmunka, közös dokumentum-szerkesztés	csoportonként számítógép, internet (esetleg mobiltelefon) a feladat nyomtatásban	a közös táblázatba gyorsan kerülhet sok adat; a táblázat adatai áttekinthetőek, könnyen vonhatók le belőlük következtetések
4 perc	Tapasztalatok megfogalmazás, általánosítás	Tapasztalatok rendszerezése, rögzíttetése a füzetben	a periódus felismerése a táblázat alapján, a táblázat hiányzó adatainak kitöltése számológép használata nélkül	Megfigyelés	Rendszerezés, rögzítés a füzetben	kitöltött táblázat	a jobb érthetőség érdekében célszerű a táblázatban a periódusokat színezéssel is kiemelni
5 perc	A tanulók csoportban megoldják a kapott feladatokat	Segítségnyújtás a feladat értelmezésében	Feladatok: Milyen számra végződik 16^{2014}? Milyen számra végződik 13^{2345}? Határozd meg 25^{2345} utolsó két számjegyét!	Tapasztalatok alkalmazása	Csoportmunka	nyomtatott feladatlap	

			A megoldás megadása a felismert periódus alapján; A feladat és a 10-zel, 100-zal való oszthatóság kapcsolata				
4 perc	A kisorsolt tanuló ismerteti a csoportja megoldását, többiek figyelnek	Pontosít, kiegészít, ha szükséges	A megoldások ellenőrzése	Ellenőrzés	Frontális munka	Teamup, csoport, majd csoporton belül tanuló sorsolása	a csoport minden tagjának el kell tudni magyarázni a csoport megoldását, hiszen bárki sorsolásra kerülhet
5 perc	Kitöltik a második megosztott google táblázatot számológép segítségével	Segítségnyújtás a feladat értelmezésében, az eszköz használatában	a φ(n) függvény bevezetése	Számológép használata	Csoportmunka, közös dokumentum-szerkesztés	számítógép, internet (telefon) a feladat nyomtatásban	a közös táblázatba gyorsan kerülhet sok adat; a táblázat adatai áttekinthetőek, könnyen vonhatók le belőlük következtetések
4 perc	Kérdésekre válaszolnak a táblázat alapján	Rávezető kérdéseket tesz fel, megerősít	Következtetések φ(n)-nel kapcsolatban (φ(n)=n-1, ha n prím, φ(ab)= φ(a) φ(b), ha (a,b)=1)	Ismeretszerzés	Rendszerezés, rögzítés a füzetben		
5 perc	Tanári magyarázat figyelemmel kísérése	Tétel ismertetése	Euler-Fermat tétel: ha (a,n)=1, akkor $a^{\varphi(n)}$ n-nel osztva 1 maradékot ad Példafeladat: Mennyi maradékot ad 109^{355} 14-gyel osztva?	Ismeretszerzés	Rendszerezés, rögzítés a füzetben		

4 perc	Alkalmazni a tanult tételt	Segítségnyújtás a feladat értelmezésében	Feladat: Milyen nap lesz 15^{2015} nap múlva?	Tanultak alkalmazása	Csoport munka		
2 perc	A keresett napot a csoportok ráírják egy lapra	Indoklást kér, pontosít, kiegészít, ha szükséges	A megoldások ellenőrzése	Ellenőrzés	Frontális munka	A csoportok képviselői egyszerre mutatják fel megoldásukat	Azonnal látható minden csoport megoldása
2 perc	Összegzés Házi feladat: Mennyit ad maradékul 44^{1354}, ha 41-gyel elosztjuk? Mi 303^{404} utolsó két jegye?						

1. táblázat:

szám (a):	3	16	13	25	15			
kitevő (n)	hatvány (a^n) utolsó számjegye	hatvány (a^n) utolsó számjegye	hatvány (a^n) utolsó számjegye	hatvány (a^n) utolsó két számjegye	hatvány (a^n) utolsó két számjegye	hatvány (a^n) utolsó számjegye	hatvány (a^n) utolsó számjegye	hatvány (a^n) utolsó számjegye
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
Periódus								

2. táblázat:

n	n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek	φ(n) n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma
1	1	1
2	1	1
3	1;2	2
4	1;3	2
5	1;2;3;4	4
6		2
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		