Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar és Informatikai Kar

Csányi Petra - Fábián Kata - Szabó Zsanett

Hogyan építsünk számelméletet?

Matematika Tanári MA

TDK

Témavezetők:

Szabó Csaba
egyetemi tanár
Algebra és Számelmélet Tanszék

dr. Vásárhelyi Éva
egyetemi docens
Matematikatanítás és Módszertani Központ

Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A dolgozatunkban a közelmúltban és most forgalomban lévő középiskolai tankönyveket vizsgáljuk meg aszerint, hogy hogyan és milyen módon tárgyalják a számelméletet. A kutatáshoz az adta a kezdőlökést, hogy egy nagyobb felmérés keretében megállapítottuk, hogy a gimnáziumból kikerülő diákok a legalapvetőbb számelméleti fogalmakat sem tudják [9, 7]. Ennek oka nyilván sokoldalú és összetett. Az okok vizsgálatát mi az [1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18] tankönyvek számelmélet anyagrészének átnézésével és elemzésével kezdtük. Dolgozatunk a [8] angol nyelvű cikk magyar nyelvű átdolgozott változata.

Dolgozatunk elején röviden összefoglaljuk a számelmélet közoktatásbeli szerepét és előfordulását, ezek után kutatásunk előzményeire térünk ki. Dolgozatunk fő témája az említett tankönyvek elemzése néhány alapvető számelméleti fogalomra koncentrálva. Megvizsgáljuk azt, hogy a számelmélet alaptételének a tankönyvekben szereplő változata milyen hatással lehet a további számelméleti alapfogalmakra, ezen belül is a legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös kiszámolási algoritmusának meghatározására. Majd két utat mutatunk a felmerülő problémák kezelésére. A tankönyvek elemzése után felkerestünk számos tankönyvszerzőt. Négyükkel mélyinterjút készítettünk. Megkérdeztük őket szakmai-módszertani motivációjukról és elébük raktuk javaslatainkat. Mind a négyükkel megtaláltuk a *„közös nevezőt"*. Dolgozatunkat a tanulságok levonásával zárjuk.

Munkánk a számelméleti fogalmak köré szerveződik. A téma fontosságát mutatja, hogy a magyar iskolarendszerben a gyerekek korán találkoznak a számelmélettel, már óvodás korban előkerül a páros és páratlan számok fogalma. Később, 6. osztályban, amikor definiálják a racionális számokat, tulajdonképpen fejest ugranak a számelmélet közepébe. Ekkor tanulják a törtek összeadását is, amihez célszerű tudni azt, hogy hogyan lehet megtalálni a legkisebb közös nevezőt, tehát tudni kell a legkisebb közös többszörös előállításának módszerét. A törtek egyszerűsítésének megértéséhez a legnagyobb közös osztó fogalmára van szükség. Így igazán csak akkor tudunk jól dolgozni a törtekkel, ha már nem csak a legalapvetőbb számelméleti ismeretekkel rendelkezünk. Mindemellett az általános iskolát végigkíséri a számelmélet, viszont középiskolában csak 9. osztályban foglalkoznak vele. Itt, 9. osztályban tehetünk egy óriási pontot a középiskolai számelmélet tanulmányok végére, hiszen ez az anyagrész már nem kerül elő a felsőbb évfolyamokon.

Nem csak a kerettantervben, hanem az órákon sem kerül elő később a számelmélet [9]. Esetleg csak 12. osztályban érettségi előtt, egy nagyon rövid ismétlés céljából. Ennek az lehet az oka, hogy az érettségin is nagyon keveset kérnek számon ebből az anyagrészből [9]. A középszintű érettségin nagyon kevés feladat szerepel számelméletből. Ha előbukkan egy-egy ilyen, akkor általában mindössze 2 pontért, és az is a legalapvetőbb fogalmakra kérdez rá, melynek nagy részét már 6. osztályban tanulják a diákok. Általános iskolás tanulmányaik végére pedig az összes olyan számelméleti ismerettel rendelkeznek, ami előfordulhat a középszintű érettségin. Ha tovább boncolgatjuk az érettségik kérdését, akkor láthatjuk, hogy az emelt szintű érettségi feladatsoraiban (162 megvizsgált feladatból) mindössze két részfeladat található, amelyek számelméletinek mondhatók. E kettőn kívül hat olyan valószínűség-számítás témájú feladat volt az eddigi emelt szintű érettségikben, amelyek tartalmaztak számelméleti vonatkozásokat, de azok is csak oszthatósági szabályokkal kapcsolatosak voltak. Ezek alapján kijelenthetjük, hogy az emelt szintű írásbeli érettségihez nem kell közvetlen számelméleti tudás. Az emelt szintű érettségi szóbeli részén viszont az egyik tétel részeként jelen van a számelmélet. 2016-ban például a 2. tétel a következőket tartalmazta:

> *„Valós számok halmaza és részhalmazai. Véges és végtelen halmazok számossága. Számelméleti alapfogalmak és tételek."*

Látható tehát, hogy az emelt szintű érettségihez tudni kell a számelméletet, de itt is csupán az alapfogalmait és tételeit.

A számelmélet oktatását általában elhanyagolják a középiskola felsőbb osztályaiban. Ez ellentmond mind a NAT, mind a kerettanterv elvárásainak. A magyar matematikaoktatás ugyanis spiralitásra épülő, feladatcentrikus és központi súlyt kap a problémafelismerés és a problémamegoldás kompetenciáinak fejlesztése. A NAT kulcskompetenciaként kezeli a problémamegoldást, a matematika, a társadalmi, állampolgári és gazdasági ismeretek, a vizuális kultúra, a tudomány, technika, kultúra, az informatika, illetve a testnevelés és sport műveltségterületeknél külön ki is emeli [19]. A számelmélet a matematikának az a területe, ahol a legkülönbözőbb feladattípusok, legszerteágazóbb gondolatmenetek és legváltozatosabb ötletek kellenek az egészen egyszerű órai feladatoktól az olimpiai versenyfeladatokig. A számelméleti feladatokon keresztül a bizonyítási technikák és módszerek széles spektruma elsajátítható. A számelmélet pontosan az az anyagrész, amelyben könnyedén meg lehetne mutatni a különböző bizonyítási technikákat egyszerű példákon is, ez pedig segíthetné a bizonyítási igény felkeltését. Ráadásul egy versenyfeladatsort nehéz elképzelni néhány számelméleti ötlet nélkül. Tehát a számelmélet sokszor, sok helyen leegyszerűsítheti, megkönnyítheti a dolgunkat.

2. Előzmények összefoglalása

Kutatásunkat a korábbi eredményekre alapozva folytattuk. Ebben a fejezetben a [9, 7] azon részeit foglaljuk össze, amelyek ismerete szükséges mostani dolgozatunk motivációjának és céljainak megértéséhez. Először kérdőívek formájában kérdeztünk meg 10. és 12. osztályos diákokat, valamint elsőéves egyetemistákat számelméleti tudásukról. Több tanárral és diákkal készítettünk interjút. A megkérdezett tanárok és diákok válaszai, valamint a kerettantervben meghatározott tananyag, és ott előírt kompetenciák alapján állítottuk össze a kérdőívet, amely azt mérte fel, hogy számelméletből mit sajátítottak el a tanulók. A kérdőívekkel azt próbáltuk feltérképezni, hogy mi az, ami megragad a diákokban abból, amit tanítanak nekik általános- és középiskolában. A kérdőív összeállításánál törekedtünk arra, hogy a lehető legjobban lefedjük az elemi számelmélet témakörét. A kérdőíveket igyekeztünk a lehető legkülönbözőbb tanulókkal kitöltetni. A kérdőíveket különböző városokba, különböző iskolákba vittük el, így a kitöltők képesség szintjén is eltérőek voltak.

A következő hipotézisekkel álltunk neki az eredmények kiértékelésének: Arra számítottunk, hogy a 10. osztályosok tudása még friss, és jól fognak emlékezni a kérdésekben szereplő fogalmakra, tételekre és alkalmazásokra. A 12. osztályosok válaszaira azért voltunk kíváncsiak, mert ez a korosztály az érettségire készül, így a teljes középiskolai matematika tananyaggal tisztában kellene lenniük. Az előzetes felmérések alapján viszont 9. osztályban foglalkoznak utoljára ezzel az anyagrésszel, később maximum csak rövid ismétlés formájában kerül elő a témakör. Ezért úgy gondoljuk, hogy a diákok 12. osztályban – az érettségire való ismétlés előtt – már nem emlékeznek a tanultakra, így az egyetemre bekerülve még inkább megkopik a számelméleti tudásuk. Az elsőéves hallgatók az egyetemi szintfelmérőn már nem emlékeznek mindenre, amit az érettségi megírásakor még tudtak. Egy nyár alatt elfelejtik a tanultakat, mert nem foglalkoznak vele. Ezek alapján a számelméletet valószínűleg már jóval korábban elfelejtik, ha 9. osztályban foglalkoznak vele utoljára. Ez egybevágna azzal, hogy az elsőéves egyetemi hallgatók saját bevallásuk szerint nem ismerik még a legalapvetőbb számelméleti fogalmakat sem.

A kérdőív első változatát 649 diák töltötte ki. Ezek eredményeiből rájöttünk arra, hogy néhány kérdést meg kellene változtatni. Például volt olyan kérdés, ami túl egyszerű volt, és olyan is, ami túl nehéz, illetve olyan is akadt, ami összezavarta a gyerekeket. Így a nem megfelelőnek ítélt kérdéseket átírtuk. Az így elkészült tesztet további 582 diák töltötte ki. A kitöltők közül a legtöbben matematikát „normál” szinten tanuló gimnazisták, volt gimnazisták (849-en), de kitöltők között voltak szakközépiskolások és szakiskolások (194 fő), illetve matematikát emelt szinten tanuló gimnazisták és volt gimnazisták is (188 fő).

A megkérdezettek korosztály szerinti eloszlása százalékosan: 25% 10. osztályos, 24% 12. osztályos, 48% elsőéves egyetemista, a maradék 3% pedig más évfolyamokon tanul. Célunk az volt, hogy lefedjük a különböző iskolatípusokat és ismeretségeinken keresztül minél többfajta iskolába eljuttassuk kérdőíveinket, és nem pedig az, hogy regionálisan lefedjük az ország minden területét. A mi szempontrendszerünkben ez nem jelentett volna valódi reprezentativitást.

A kérdőívek statisztikai kiértékelése arra engedett következtetni, hogy

- a diákok a fogalmakat nem kapcsolják össze a tartalmukkal.
- ha két klaszterbe szeretnénk sorolni a korosztályokat, akkor az egyikbe a 10. és 12. osztályos normál szinten tanulók, illetve felsőoktatásbeli normálosok és a matekos normálosok kerülnek. A másik klaszterbe pedig ennél a felosztásnál a 12. osztályos fakultációsok, a felsőoktatásban tanuló fakultációsok, valamint a matekos fakultációsok tartoznak.
- ha a matematika szakos egyetemistákat kivesszük a válaszadók közül, akkor a két klaszter a következő: 10. osztályos normálosok, felsőoktatásbeli normálosok és 12. osztályos normálosok, valamint 12. osztályos fakultációsok és felsőoktatásbeli fakultációsok.
- a 12. osztályos normál szinten tanulók tudásszintje rosszabb, mint a többi korosztálybeli tanulóé. [9]

A kérdőívek alapján levonható következtetések után érdekessé vált számunka az is, hogy a diákok saját számelméleti tudásukról alkotott véleménye vajon helytálló-e. Ezért dolgozatokat is írattunk velük, amiben már nem csak ikszelgetniük kellett, hanem konkrét feladatmegoldást vártunk el. Az első tapasztalatok után a dolgozatokból elkészítettünk egy javított, második verziót, és a továbbiakban ezeket írattuk meg a diákokkal.

A dolgozatokat igyekeztünk úgy összeállítani, hogy a feladatok könnyűek legyenek. Ez alatt azt értjük, hogy lecsupaszítva, minden feladat egy nagyon egyszerű alkalmazása az adott számelméleti fogalomnak, vagy konkrétan a fogalomra kérdez rá. Szempont volt, hogy csak egy egyszerű lépésre legyen szükség a feladat megoldásához. Ezzel azt akartuk elérni, hogy a megoldásokból pontosan az derüljön ki, hogy azzal az adott fogalommal tisztában van-e a diák, vagy sem, illetve, hogy tudja-e használni, alkalmazni a tanult fogalmat. (Minden témakörhöz két feladatot állítottunk össze. Az egyik a fogalomra rákérdező, a másik a fogalmat alkalmazó vagy szöveges típusú feladat volt.)

A dolgozatokat több irányból megközelítve is kiértékeltük. Több fajta statisztikát készítettünk, valamint kigyűjtésre kerültek a típushibák, megoldási módszerek is. Az eredmények elemzése azt mutatta, hogy változtatásra van szükség a számelmélet tanítását illetően. Ezért vizsgálni kezdtük, hogy hogyan lehetne az iskolai számelmélet oktatást hatékonyabbá tenni.

A dolgozatok kiértékelése után céljaink között szerepelt az is, hogy a kérdőívek és a dolgozatok eredményeit összevessük. Kíváncsiak voltunk arra, hogy mennyire térnek el a (vélt és való tudás közötti) eredmények. Mekkora különbség van a saját bevallás alapján ikszelt kérdőív és a tényleges feladatmegoldás között? Vajon a diákok alulbecsülték a tudásukat, vagy épp ellenkezőleg?

Három feladaton keresztül szeretnénk bemutatni a bevallott és a valós tudás közötti különbségeket.

	saját bevallás	**dolgozatok eredményei**
Bontsd fel prímek szorzatára a következő számot: 420	78%	72%
Mennyi 1320 és 504 legnagyobb közös osztója?	91%	46%
Mennyi 8 és 12 legkisebb közös többszöröse?	97%	54%

1. táblázat. A kérdőívek és a dolgozatok eredményeinek összehasonlítása

Az 1. táblázatban ez a három feladat a három legalapvetőbb számelméleti fogalomra kérdez rá: a számelmélet alaptételére (prímfaktorizációra), a legnagyobb közös osztóra, és a legkisebb közös többszörösre. A százalékok mindhárom feladat esetén tragikusak, az utolsó kettő esetén felettébb. Érdekes és egyben rettenetes is, hogy a harmadik feladat esetén a 8 és a 12 legkisebb közös többszörösét kellett meghatározni, és a kis számok ellenére is ez csupán a kitöltők 54%-ának sikerült.

3. Számelmélet a tankönyvekben

A kérdőívek és dolgozatok eredményeinek összevetése után arra voltunk kíváncsiak, hogy mi lehet a rossz eredmények oka. A válasz keresése közben egyebek mellett megnéztük a matematika tankönyveket, hiszen azok a tanulók és a tanárok rendelkezésére is állnak. Tíz tankönyvben [1, 2, 3, 4, 10, 11, 14, 16, 17, 18] és két érettségire készítő összefoglaló könyvben [12, 15] vizsgáltuk meg a számelmélettel foglalkozó oldalakat.

A bevezetőben említett elszomorító eredmények alapján különös tekintettel voltunk a számelmélet alaptételét, a legnagyobb közös osztót és a legkisebb közös többszöröst tartalmazó részekre. Mint látni fogjuk, ezek között a könyvek között két olyan van (ugyanannak a könyvnek kétféle kiadása) [2, 3], amelyikben helyesen van kimondva a számelmélet alaptétele, és egy olyan [1], amiben helyesen szerepel a legnagyobb közös osztó meghatározásának módszere.

3.1. Az osztók és az oszthatóság

A számelmélet témakörben az egyik legfontosabb fogalom a prímszám. Az általunk megvizsgált tankönyvek többségében a prímszám definíciója a következő:

> **Definíció:** *Azokat a számokat, amiknek pontosan két osztója van, prímszámoknak nevezzük.*

Ezek valójában a felbonthatatlan (irreducibilis) számok, de középiskolában ez egy elfogadható prímszám definíció, ha nem beszélünk negatív osztókról. A tankönyvekben általában természetes számokra definiálják az oszthatóságot, így a prímszámok esetében valóban beszélhetünk pontosan két osztóról. Viszont úgy gondoljuk, hogy nem ez a legmegfelelőbb definíció, mert nem elég beszédes, hiszen nem az a fontos, hogy hány darab osztója van egy prímszámnak, hanem az, hogy ezeknek a számoknak nincs valódi osztójuk. A prímszám legmegfelelőbb definíciójának kérdésével most a dolgozatunkban nem foglalkozunk.

Az osztók kapcsán viszont egy újabb hibával találhatjuk szemben magunkat. A legtöbb tankönyvben az oszthatóságot pozitív egész számokra definiálták, viszont utána a következő oszthatósági szabály kikötés nélkül szerepel:

> *Ha $a|b$ és $a|c$, akkor $a|b-c$.*

A kikötés hiánya akkor okoz problémát, ha a $b-c$ negatív. Ez pedig nem csupán egy-két esetben fordulhat elő, hanem különböző b és c esetén az esetek felében, ami nem csak a matematikában jelent nem elhanyagolható százalékot.

Volt olyan tankönyv, ahol szerepeltették a $b>c$ kikötést az oszthatósági tulajdonság mellett, de ilyenkor a következőhöz hasonló feladat megoldásakor ütközünk problémába:

Milyen x esetén lesz egész az $\frac{x^2-7}{x-2}$ értéke?

A feladat megoldása a tankönyvekben szereplő mintapélda alapján így történhet:

$$\frac{x^2-7}{x-2} = x+2-\frac{3}{x-2}$$

Ha a tört értéke egész, akkor $x-2 \mid 3$, amiből az következik, hogy $x-2=1$ vagy $x-2=3$, vagyis x értéke 3, illetve 5 lehet.

Ekkor a tankönyvi oszthatósági definíciónak megfelelően jártunk el, és a feladat megoldásának idejére figyelmen kívül hagytuk a negatív osztók létezésének tényét.

Gondoljunk bele abba, hogy milyen megoldáshoz jutnánk, ha próbálgatással kezdenénk el megoldani a feladatot. Az $x=0$ esetet könnyen leellenőrizhetjük és ki is zárhatjuk, hiszen $\frac{-7}{-2}$ nem egész. Az $x=1$ eset kipróbálásával azonban már nem erre az eredményre jutunk, mert $\frac{1^2-7}{1-2}=\frac{-6}{-1}=6$, ami egész. Kitartó próbálkozás segítségével kideríthető az is, hogy az $x=1$, $x=3$ és $x=5$ megoldások mellett az $x=-1$ is jó megoldás lesz.

Az előző, oszthatósággal történő megoldásnál viszont különös módon az $x=1$ és az $x=-1$ sem szerepelt a feladat megoldásai között. Ennek oka, hogy annál a megoldásnál nem foglalkoztunk a negatív osztókkal, ezért veszítettük el ezt a két jó megoldást.

Ezek alapján ennél a feladatnál (kitartó és szisztematikus) próbálgatással több jó megoldáshoz juthatunk mint akkor, amikor a definíció ismeretében állunk neki a feladat megoldásnak.

3.2. A számelmélet alaptétele

A számelmélet alaptétele az általunk fellapozott tankönyvekben két kivétellel [2, 3] a következő módon szerepel:

> **Tétel:** *Bármely összetett szám felbontható prímszámok szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.*

Ez igaz, viszont ez nem a számelmélet alaptétele. A számelmélet alaptétele helyesen a következő lenne:

> **Tétel:** *Minden 0-tól és egységtől különböző egész szám felírható prímtényezők szorzataként, és ez a felbontás egységszerestől és a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.*

Az első, a tankönyvekben többségében szereplő tételt olvasva a tanulókban joggal merülhet fel a kérdés, hogy mi történik a prímszámokkal? Azoknak nincs prímtényezős felbontásuk? És mi van az 1-gyel? Annak sincs? A tankönyvek ezekre a kérdésre jellemzően nem adnak választ, ezzel bizonytalanságban hagyják tanulókat. A számelmélet alaptételének *„rendes”* kimondása tisztázza ezeket a kérdéseket, így nem hagyja nyitva azokat. A második megfogalmazásból egyértelműen kiderül, hogy a 0-nak és az 1-nek nincs, a prímszámoknak pedig van prímtényezős felbontásuk.

Mivel magyarázhatjuk, hogy a tankönyvek többségében mégis az első megfogalmazással szerepel ez a tétel, milyen érveket lehet emellett felhozni? Erről tanárokat és tankönyvszerzőket kérdeztünk meg. Az egyik érvük az volt, hogy a tanulók így is értik, így is tudják, hogy mi a prímszámok prímtényezős felbontása, vagy ha mégsem, akkor a tanár úgyis hozzámondja, kiegészíti a tételt, amikor tanítja. Egy másik érv az volt, hogy a diákok nem tudják megjegyezni azt, hogy kivéve az 1.

Bennünk az a kérdés merült fel ennek hallatán, hogy miért lehet könnyebben megjegyezni azt, hogy összetett szám, mint azt, hogy kivéve az 1 és a 0. Az összetett szám fogalma más témakörnél gyakorlatilag nem kerül elő. A 10., 11. és 12. osztályos tankönyvekben alig szerepel ez a kifejezés, például a 10. és 11. osztályos kísérleti tankönyvben [5, 6] mindössze egyszer. A számelmélet témakörre pedig nagyon kevés idő szokott jutni, ahogy erről korábban már hosszabban írtunk [9]-ban. A 9. évfolyam után már gyakorlatilag csak az érettségi előtti ismétlésnél kerül elő a számelmélet témakör, viszont az itt tanultakra, az oszthatósági szabályokra és a számelmélet alaptételére más témaköröknél is szükség van. Az összetett szám fogalma viszont legfeljebb a statisztika feladatoknál szokott előkerülni. Így számunkra kérdéses, hogy mennyire szerencsés ha, a tanulók összetett számokra kimondva tanulják meg a számelmélet alaptételét.

Egy harmadik, az előzőeknél jobban átgondolt érvük az volt, hogy középiskolában nem létezik egytényezős szorzat. A szorzás a tanulók számára egy kétváltozós művelet, így összezavarná őket, ha egytényezős szorzatokról beszélnénk. Az érv hallatán elgondolkoztunk azon, hogy mi a helyzet az a^1, az 1!, illetve a p^α esetével, amikor a számok prímtényezős felbontásában megengedjük az 1 kitevőt? Erre a kérdésre azt a választ kaptuk, hogy ezek a permanencia-elv miatt kerülhetnek fel a táblára egy középiskolában, és az a^1, illetve az 1! külön kerülnek definiálásra. Ezek után már csak az a kérdés, hogy a számelmélet alaptételénél miért nem alkalmazzuk a permanencia-elvet?

Adódhat a kérdés, hogy miért van egyáltalán szükség arra, hogy a prímszámok prímtényezős felbontásával is foglalkozzunk. Mielőtt erre válaszolnánk, nézzük meg, hogy mivel folytatódik a számelmélet anyagrész. A számelmélet alaptétele után a tankönyvek a legnagyobb közös osztó fogalmával és annak meghatározási módszerével kezdenek el foglalkozni. Ennél pedig, ahogyan azt nemsokára látni fogjuk nagy szükség lenne arra, hogy a prímszámokról és az 1-ről is szót ejtsünk a számelmélet alaptételénél.

3.3. A legnagyobb közös osztó

Az általunk vizsgált tankönyvekben egy kivételével [1] mindegyikben a következőképp szerepel a legnagyobb közös osztó meghatározásának módszere:

A legnagyobb közös osztó a prímtényezős felbontásból előállítható, ha a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk.

Tehát például két szám legnagyobb közös osztójának meghatározásakor vennünk kell a két szám prímtényezős felbontását, majd a prímfelbontásokban szereplő közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon, és ezeket kell összeszoroznunk.

A következőekben azt fogjuk megnézni, hogy ez a tankönyvi recept hogyan használható a gyakorlatban, és hogy illeszkedik-e, illetve mennyiben illeszkedik a tankönyvekben szereplő legnagyobb közös osztó definícióhoz. Először nézzünk néhány feladatot a legnagyobb közös osztó meghatározására az előbbi, a tankönyvek többségében szereplő meghatározási módszert követve úgy, hogy az összetett számokra kimondott számelmélet alaptételét fogadjuk el számelmélet alaptételeként.

1. **Határozzuk meg a 60 és a 18 legnagyobb közös osztóját!**

   A 60 prímtényezős felbontása: $2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

   A 18 prímtényezős felbontása: $2 \cdot 3^2$.

   A két prímtényezős felbontásban közös tényező a 2 és a 3. Mindegyiknek az 1 az előforduló legkisebb hatványa, így a legnagyobb közös osztó: $(60; 18) = 2 \cdot 3 = 6$.

2. **Határozzuk meg a 10 és a 33 legnagyobb közös osztóját!**

   A 10 prímtényezős felbontása: $2 \cdot 5$.

   A 33 prímtényezős felbontása: $3 \cdot 11$.

   A két prímtényezős felbontásban nincsenek közös tényezők, ezért a 10-nek és a 33-nak nincs legnagyobb közös osztója. (Természetesen továbbra a fenti módszer szerint járunk el, ahogyan ezt a további példákban is tesszük majd.)

3. **Határozzuk meg a 21 és a 7 legnagyobb közös osztóját!**

   A 21 prímtényezős felbontása: $3 \cdot 7$.

   A 7 nem összetett szám, ezért nincs prímtényezős felbontása.

   Így a 21-nek és a 7-nak nincs legnagyobb közös osztója.

4. **Határozzuk meg a 10 és az 1 legnagyobb közös osztóját!**

   A 10 prímtényezős felbontása: $2 \cdot 5$.

   Az 1 nem összetett szám, ezért nincs prímtényezős felbontása.

   Így a 10-nek és az 1-nek nincs legnagyobb közös osztója.

A feladatok eredményi eléggé meglepőek voltak számunkra, mert mi nem mindegyiknél ezekre az eredményekre emlékeztünk. Úgy gondoltuk, hogy jobb lesz, ha visszatérünk az alapokhoz, és megnézzük a tankönyvekben a legnagyobb közös osztó definícióját is. Ez a definíció szerepel az általunk vizsgált tankönyvekben:

Definíció: *Két pozitív egész szám esetén a közös osztók közül a legnagyobbat a két szám legnagyobb közös osztójának nevezzük. Az a és b legnagyobb közös osztójának jele $(a;b)$.*

Oldjuk meg újból az előbbi feladatokat a legnagyobb közös osztó definíciójának segítségével.

1. **Határozzuk meg a 60 és a 18 legnagyobb közös osztóját!**

   A 60 osztói: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

   A 18 osztói: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

   A közös osztók az 1, 2, 3 és a 6. Ezek közül a 6 a legnagyobb, így a két szám legnagyobb közös osztója $(60;18) = 6$.

2. **Határozzuk meg a 10 és a 33 legnagyobb közös osztóját!**

   A 10 osztói: 1, 2, 5, 10.

   A 33 osztói: 1, 3, 11, 33.

   Csak az 1 a közös osztó, így $(10;33) = 1$ a két szám legnagyobb közös osztója.

3. **Határozzuk meg a 21 és a 7 legnagyobb közös osztóját!**

   A 21 osztói: 1, 3, 7, 21.

   A 7 osztói: 1, 7.

   A közös osztók az 1 és a 7, így a két szám legnagyobb közös osztója a $(21;7) = 7$.

4. **Határozzuk meg a 10 és az 1 legnagyobb közös osztóját!**

   A 10 osztói: 1, 2, 5, 10.

   Az 1 osztói: 1.

   Csak az 1 a közös osztó, így $(10;1) = 1$ a két szám legnagyobb közös osztója.

A 2., 3. illetve a 4. feladatnál más eredményt kaptunk akkor, amikor a legnagyobb közös osztó definíciója segítségével oldottuk meg a feladatot, mint amikor a legnagyobb közös osztó meghatározási módszerét követtük.

Nézzük meg, hogy ha az általunk vizsgált tankönyvek többségében szereplő számelmélet alaptételét használjuk, vagyis azt, hogy *bármely összetett szám felbontható prímszámok szorzatára és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű*, akkor hogyan lehetne kiküszöbölni a feladatok során felszínre került hibákat, vagyis azt, hogy hogyan lehetne helyesen leírni két szám esetén a legnagyobb közös osztó meghatározásának módszerét.

1. Ha $a = 1$, akkor $(a; b) = 1$.
2. Ha $b = 1$, akkor $(a; b) = 1$.
3. Ha a prím és $a \mid b$, akkor $(a; b) = a$.
4. Ha a prím és $a \nmid b$, akkor $(a; b) = 1$.
5. Ha b prím és $b \mid a$, akkor $(a; b) = b$.
6. Ha b prím és $b \nmid a$, akkor $(a; b) = 1$.
7. Ha a és b is összetett szám, akkor vegyük a két szám prímtényezős felbontását:
   a) ha nincs közös prímtényezőjük, akkor $(a; b) = 1$.
   b) ha van legalább egy közös prímtényezőjük, akkor a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk és a szorzat lesz az $(a; b)$.

Tehát külön kellene kezelnünk azokat az eseteket, amikor valamelyik szám 1, hiszen az 1 nem összetett szám és nem is prím, így a tétel szerint nincs prímtényezős felbontása. Ez a fenti 1. és 2. eset. Külön kellene beszélnünk arról az esetről, amikor valamelyik szám prím, mert a tétel szerint a prímeknek sincs prímtényezős felbontásuk. Itt újabb két-két esetet kellene megkülönböztetnünk aszerint, hogy a prím osztja-e a másik számot vagy sem. Ez így összesen négy esetet jelentene, aminek a fenti 3., 4., 5. és 6. esetek felelnek meg. Miután ezt a hat esetet tisztáztuk, eljuthatunk oda, hogy mindkét szám összetett szám, így meg tudjuk tenni az általunk vizsgált tankönyvek többségében szereplő legnagyobb közös osztót meghatározó módszer első lépését, és el tudjuk készíteni a két szám prímtényezős felbontását. Viszont ennek az esetnek is két része van aszerint, hogy a két szám prímtényezős felbontásában van-e közös prímtényező. Az egyik eset az, amikor nincs közös tényező. Erről a 7. a) esetről sem mond semmit a tankönyvekben szereplő módszer. A másik eset pedig az, amikor van közös tényező a két szám prímtényezős felbontásában. A megvizsgált tankönyvek többségében csak ezzel az esettel, vagyis a 7. eset b) részével foglalkoznak.

Gyakori, hogy a tankönyvek a legnagyobb közös osztó hiányos meghatározási módszere után a következőképp beszélnek a relatív prímekről:

> **Definíció:** *Azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek a legnagyobb közös osztója 1, relatív prímeknek nevezzük.*

Ez a definíció újabb kérdéseket vethet fel, hiszen a tankönyvekben szereplő meghatározási módszer szerint nem fordulhat elő az, hogy 1 a legnagyobb közös osztó.

Most térjünk rá arra, hogy hogyan írhatnánk le két pozitív egész szám legnagyobb közös osztójának meghatározási módszerét helyesen, ha az összetett számokra kimondott helyett a [2]-ben és [3]-ban is szereplő számelmélet alaptételét használnánk, vagyis azt, hogy *minden 0-tól és egységtől különböző egész szám felírható prímtényezők szorzataként, és ez a felbontás egységszerestől és a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.*

> Egy tetszőleges a szám és az 1 legnagyobb közös osztója 1. Ha egyik szám sem az 1, akkor vegyük a számok prímtényezős felbontását. Ha a két felbontásban nincs közös prímtényező, akkor a számok legnagyobb közös osztója 1. Ha van legalább egy közös prímtényező a két felbontásban, akkor a közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzuk és a szorzat lesz a két szám legnagyobb közös osztója.

Egy másik, ennél is rövidebb, egy esetből álló lehetőség az általánosított kanonikus alak bevezetése lenne, amit akár az ijesztően hangzó szakkifejezés említése nélkül is bevezethetünk a diákoknak. Ennél megengedjük, hogy a prímtényezők 0. hatványon szerepeljenek a szám prímtényezős felbontásában, így nem kellene azzal foglalkozni, hogy csak azok a prímtényezők kerüljenek a legnagyobb közös osztót előállító szorzatba, amik mindkét szám prímtényezős felbontásában szerepelnek, mert mindkét szám általánosított kanonikus alakjában szerepelne minden olyan prímtényező, amelyik valamelyik szám felbontásában előfordul. Így egyszerűen annyi a feladatunk a legnagyobb közös osztó kiszámolásánál, hogy minden tényezőt az előforduló legkisebb hatványon összeszorozzunk.

Ezzel a módszerrel így határozhatnánk meg például a 140 és a 360 legnagyobb közös osztóját:

A 140 prímtényezős felbontása: $2^2 \cdot 5 \cdot 7$.

A 360 prímtényezős felbontása: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Általánosított kanonikus alakban így írhatók fel a számok:

$$140 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$
$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$$

A legnagyobb közös osztó pedig

$$(140; 360) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 20$$

A 140 és a 66 legnagyobb közös osztóját pedig így határozhatnánk meg ezzel a módszerrel:

A 140 prímtényezős felbontása: $2^2 \cdot 5 \cdot 7$.

A 66 prímtényezős felbontása: $2 \cdot 3 \cdot 11$.

Általánosított kanonikus alakban így írhatjuk fel a számokat:

$$140 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^0$$
$$66 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^1$$

A legnagyobb közös osztó pedig $(140; 66) = 2$.

Láthatjuk, hogy a számok általánosított kanonikus alakja aszerint változik, hogy a másik számban milyen prímtényezők szerepelnek. Ennek hangsúlyozására, és annak tisztázására, hogy ez nincs hatással a prímtényezős felbontás egyértelműségére mindenképpen oda kell figyeni, ha ezt a módszert tanítjuk a diákoknak.

Ennél a módszernél az sem okoz problémát, hogy az 1-nek nincs prímtényezős felbontása, mert az 1 esetében az általánosított kanonikus alakban minden tényező 0. hatványon szerepel.

3.4. A legkisebb közös többszörös

A legkisebb közös többszörös esetén ugyanazokkal a hibákkal találkoztunk, mint a legnagyobb közös osztónál. Az általunk vizsgált 12 tankönyv egyikében sem szerepelt helyesen a legkisebb közös többszörös meghatározásának módszere.

A tankönyvekben így fogalmazták meg a legkisebb közös többszörös meghatározásának módszerét:

> *A számok prímtényezős felbontásából a legkisebb közös többszörös előállítható úgy, hogy minden előforduló prímet összeszorzunk az előforduló legnagyobb hatványon.*

Ahogyan a legnagyobb közös osztónál, itt is problémába ütközünk, ha valamelyik szám az 1 vagy prímszám, mert a tankönyvek többségében az összetett számokra kimondott számelmélet alaptétele szerepel, így aszerint az 1-nek és a prímeknek nincs prímtényezős felbontásuk.

Ha az összetett számokra kimondott tételt fogadjuk el számelmélet alaptételeként, akkor így javíthatnánk ki a két pozitív egész szám legkisebb közös többszörösének meghatározására szolgáló algoritmust:

1. Ha $a = 1$, akkor $[a; b] = b$.
2. Ha $b = 1$, akkor $[a; b] = a$.
3. Ha a prím és $a \mid b$, akkor $[a; b] = b$.
4. Ha a prím és $a \nmid b$, akkor $[a; b] = a \cdot b$.
5. Ha b prím és $b \mid a$, akkor $[a; b] = a$.
6. Ha b prím és $b \nmid a$, akkor $[a; b] = a \cdot b$.
7. Ha a és b is összetett szám, akkor vegyük a két szám prímtényezős felbontását és minden, valamelyik szám felbontásában előforduló prímet szorozzunk össze az előforduló legnagyobb hatványon. Ez a szorzat lesz a két szám legkisebb közös többszöröse.

Tehát a legnagyobb közös osztónál látotthoz hasonlóan itt is külön kellene beszélnünk azokról az esetekről, amikor valamelyik szám 1. Ez az 1. és 2. eset. Külön eseteket jelent az, amikor valamelyik szám prím, és aszerint is különbséget kell tennünk az esetek között, hogy a prímszám osztója-e a másik számnak vagy sem, hiszen ennek nagy szerepe van abban, hogy mennyi lesz a két szám legkisebb közös többszöröse. Ezeket fedik le a 3., 4., 5. és 6. esetek. Itt is, a 7. eset az, amikor már mindkét szám összetett szám, így el tudjuk készíteni mindkét szám prímtényezős felbontását, és követhetjük a tankönyvekben leírt módszert.

Hogyan változna ez az algoritmus, ha a számelmélet alaptételének a 0-tól és egységtől különböző egész számokra vonatkozó változatát használnánk? Ekkor külön kellene beszélni azokról az esetekről, amikor valamelyik szám 1, de a többi eset összevonható lenne. Így nézne ki két pozitív egész szám legkisebb közös többszöröst meghatározó algoritmus:

> Egy tetszőleges a szám és az 1 legkisebb közös többszöröse az a szám. Ha egyik szám sem 1, akkor vegyük a számok prímtényezős felbontását, és szorozzuk össze a felbontásokban szereplő prímtényezőket az előforduló legnagyobb hatványon. Ez a szorzat lesz a két szám legkisebb közös többszöröse.

A legkisebb közös többszörös esetén is használható a legnagyobb közös osztónál is szereplő, az általánosított kanonikus alakot használó módszer. Annyit kell rajta módosítani, hogy a számok általánosított kanonikus alakjának felírása után minden prímtényezőt az előforduló legnagyobb hatványon kell összeszorozni (és nem a legkisebb hatványon, ahogyan azt a legnagyobb közös osztónál tettük).

Például a 140 és a 360 legkisebb közös többszörösét így határozhatnánk meg ezzel a módszerrel:

A 140 prímtényezős felbontása: $2^2 \cdot 5 \cdot 7$.

A 360 prímtényezős felbontása: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Általánosított kanonikus alakban így írhatók fel a számok:

$$140 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$
$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0$$

A legkisebb közös többszörös pedig

$$(140; 360) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 2520$$

Az 1 itt sem fog problémát okozni, mert annak általánosított kanonikus alakjában továbbra is a 0. hatványon szerepel minden prímtényező.

3.5. Visszatérés az indoklásokhoz

Most, hogy részletesen leírtuk, hogy milyen következményekkel jár, ha összetett számokra mondjuk ki a számelmélet alaptételét szeretnénk visszautalni a fent említett magyarázatokra.

Az egyik indoklás arra, hogy miért összetett számokra mondják ki a számelmélet alaptételét az volt, hogy a tanulók nem tudják megjegyezni azt, hogy kivéve azt 1. Azt gondoljuk, hogy a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös helyes meghatározási módszerét, vagyis azt a hét-hét pontba szedett felsorolást nehezebb megjegyezni mint azt, hogy kivéve az 1. Ráadásul ha 0-tól és 1-től különböző pozitív egész számokra mondjuk ki a tételt, akkor az összetett szám fogalmát sem kell annyira erőltetni, mert a későbbi anyagrészekben úgysem kerül elő ez a fogalom.

Egy másik érv az volt, hogy középiskolában nem létezik egytényezős szorzat, mert az összezavarná a diákokat. Ennek feloldására az lenne a javaslatunk, hogy a következőképp mondjuk ki a számelmélet alaptételét:

> **Tétel:** *Bármely összetett szám felbontható prímszámok szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű. A prímek prímtényezős felbontása önmaga.*

Ekkor nem kell egytényezős szorzatról beszélnünk, mégis használható lesz a legnagyobb közös osztó, illetve legkisebb közös többszörös rövidebb meghatározási módja, mert így már csak azokkal az esetekkel kell külön foglalkozni, amikor valamelyik szám 1, illetve azzal, amikor a számoknak nincs közös prímtényezőjük.

4. Interjú tankönyvszerzőkkel

Számos tankönyvszerzőt megkerestünk a kérdéseinkkel: Milyen didaktikai, matematikai, szakmai oka van annak, hogy a tankönyvekben a számelmélet alaptételét összetett számokra mondják ki? Mit gondolnak, szükség van a prímszámok prímtényezős alakjára vagy ennek definiálása elhagyható? Ennek hiánya és a számelmélet alaptételének összetett számokra való kimondása nem okoz gondot a legnagyobb közös osztót kiszámító algoritmus végrehajtásakor?

A korábban említett tankönyvek megkeresett szerzői közül négyen (dr. Csatár Katalin, Fried Katalin, dr. Gerőcs László és Orosz Gyula) engedélyt adtak arra, hogy ismertessük a véleményüket. Velük több alkalommal, többféle módon beszélgettünk. Először emailen keresztül, majd telefonon vagy személyesen is konzultáltunk és készítettünk interjút velük.

4.1. Dr. Gerőcs László

Dr. Gerőcs László számos tankönyv szerzője, elismert középiskolai tanár 41 év tapasztalattal a háta mögött. A tanár úrral hosszasan leveleztünk, majd interjút is készítettünk vele. Elsőként megállapította, hogy különböző tankönyvekben, szakkönyvekben mindkét megfogalmazást megtaláljuk: *„Minden $n > 1$ természetes szám...”*, illetve *„Minden összetett szám...”*. (Az általunk megvizsgált 12 tankönyv közül 10 összetett számra mondja ki a tételt.)

Megfogalmazta, hogy a tétel lényege az egyértelműség, illetve a szorzás fogalmára való visszavezetés. A diákok számára a szorzás egy olyan matematikai művelet, amelyet két valós szám között elhelyezett pont jelöl. A tanár úr szerint ennek megfelelően az egytényezős szorzat sokak fejében zavart okoz (ugyanúgy, mint az egytagú összeg). Kifejtette azt is, hogy a tétel érdekessége az, hogy bárhogyan is kezdjük a tényezőkre bontást (mindaddig, amíg már csak prímtényezőket kapunk), mindig ugyanarra az eredményre jutunk. Az egytényezős prímszám önmagával való azonossága pedig ilyen szempontból teljesen érdektelen. Ebben az esetben a tétel semmitmondó. Úgy gondolja, hogy ezek lehetnek az okai a számelmélet alaptételének összetett számokra való kimondásnak. Véleménye szerint ez semmit nem ront a problémakör leírásának precizitásán.

Felhívta a figyelmünket arra, hogy nem szabad túlságosan precíznek lenni, vigyázni kell, nehogy az érthetőség rovására menjen a precizitás. Azzal a szófordulattal is élt, hogy *„nem matematikát tanítunk, hanem gyereket”*.

Két példát is mondott nekünk ezzel kapcsolatban. Az elsőt arra, hogy hogyan lehet a túlzott precizitás káros. Elmesélte, hogy tankönyvük egyik minisztériumi bírálója szerint nem lehet leírni egy (10. osztályos) tankönyvben azt, hogy *„A derékszögű háromszög magassága az átfogót két olyan szakaszra bontja, melyek mértani közepe a magasság.”*. Az ehhez tartozó indoklás az volt, hogy azért nem lehet ezt így leírni, mert szakaszoknak nincs mértani közepük, csak a szakaszok hosszának. A tanár úr elmondta nekünk, hogy –

azon kívül, hogy ez a tétel a Hajós-könyvben [13] is így szerepel – ellenérvként hozhatjuk fel azt, hogy ha nagyon precízek szeretnénk lenni, akkor ezt sem mondhatjuk, hiszen a szakaszok hosszának sincs mértani közepe, csak a hosszok mérőszámainak, és azoknak is csak egy bizonyos egységben mérve. Tehát ezek alapján a magasság tételt precízen így kellene írnunk:

> *A derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága az átfogót két olyan szakaszra bontja, melyek hosszának valamely egységben vett mérőszámának a mértani közepe egyenlő a magasság hosszának ugyanabban az egységben vett mérőszámának a mértani közepével.*

Nyilvánvaló, hogy mekkora szenvedést okozna a diákoknak ennek a fajta kimondásnak a megértése. Ekkor a precízkedés a megértés rovására menne.

A következő példa a precízkedés másik végletéről szólt. Arról, hogy a túlzott szabatosság ellenében inkorrektek sem lehetünk, például a folytonosság tárgyalásakor nem mondhatjuk azt, hogy ott van szakadása a függvénynek, ahol felemeljük a ceruzát.

Gerőcs tanár úr azt mondta nekünk, hogy pályafutása során a legkisebb közös többszörös kiszámítása soha nem okozott gondot a diákjainak. Bár azt is hozzátette, hogy ő az ELTE Trefort Ágoston Gyakorló Gimnáziumban tanít, elsősorban az ottani diákokkal kapcsolatban vannak évtizedes tapasztalatai. Az algoritmus kimondását pedig hasznosnak véli, főként ha később már algebrai kifejezésekről beszélünk, például két tört összeadásánál. Viszont kiemelten fontosnak tartja, hogy a tanulók értsék is az algoritmust, ne csak bemagolják azt.

A tanár úr hozzátette, hogy azért pályafutása során volt már arra is példa, hogy néhány tanulója összekeverte a prímek kiválasztását és a megfelelő hatványon való szorzását a legnagyobb közös osztó, illetve az legkisebb közös többszörös kiszámításánál. Azt mondta, hogy ez általában a gyakori, nem kellően fegyelmezett gondolkodás, sok esetben az értelmetlen magolás következménye. Úgy véli, hogy ennek azonban semmi köze ahhoz, hogy hogyan mondjuk ki a számelmélet alaptételét.

Beszélgetésünk során a tanár úr azt is elmondta, hogy ő a számelmélet alaptételét összetett számokra mondja ki, de utána megbeszélik a diákokkal a prímek esetét. Mindannyian egyetértettünk abban, hogy jó kompromisszum lenne a tétellel kapcsolatban az, ha ezt a tankönyvek is megtennék.

Gerőcs tanár úr a vele készített interjú során hangsúlyozta, hogy a kérdéseinkkel kapcsolatban csak ismételni tudja önmagát, tehát a lényeg: meg kell találni az egyensúlyt, azt hogy mi az a matematikai pontosság, amit már a középiskolában túlzás bevezetni, és mi az a pontatlanság, amit a megértés, az érthetőség kedvéért megengedhetünk magunknak. Véleménye szerint a matematika eszköz és a gyerek fejlődése a cél. Ezt emelte ki többször is, illetve azt, hogy a matematikatanár egyik legfontosabb ismérve a diákok fejével való gondolkodás képessége.

4.2. Orosz Gyula

Orosz Gyula tanár úr – elismert középiskolai tanár, 28 éves tapasztalattal – Gerőcs tanár úréhoz hasonló, bár rövidebb magyarázatot adott kérdéseinkre a három beszélgetésünk során. Ő is az egytényezős szorzatra hivatkozott a számelmélet alaptételével kapcsolatos kérdésünknél. Majd megkérdeztük őt is arról, hogy ez a fajta kimondás szerinte nem okoz-e gondot a legnagyobb közös osztót kiszámító algoritmusnál. A tanár úr a következő találkozásunkig várt a válasszal, majd maximálisan egyetértett velünk abban, hogy precízebben kellene kimondani tételt, csakúgy, mint az algoritmust.

A tanár úr szerint nincs rá esély, hogy ezt megváltoztassák az általa is írt 9. osztályos tankönyvben. Hiszen egy ilyen változtatás új publikációs eljárással járna, amihez minisztériumi engedély és egy hosszú procedúra szükséges, ami sok idő és sok pénz. Biztosított minket arról, ahogy amint lehetséges, egy újabb kiadásban kiegészítik majd ezt a részt. Amikor engedélyt kértünk tőle véleménye ismertetéséhez, a tanár úr a következőket mondta: *„Kérlek, említsétek meg, hogy egyetértek veletek, és szerintem minden diáknak tudnia kellene a számelmélet alaptételét, a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös kiszámolásának módját”.*

4.3. Dr. Csatár Katalin

Dr. Csatár Katalin – tapasztalt és elismert középiskolai tanár – azt mondta nekünk, hogy tanítási gyakorlata során ő nem ad algoritmust a legnagyobb közös osztó meghatározására. Véleménye szerint elég a mintapéldákból levont következtetés, ami többet ér, mint egy rosszul bemagolható szabály.

A számelmélet alaptételével kapcsolatban pedig azt nyilatkozta, hogy egyszerűbb az összetett számokra kimondani a tételt, hiszen a prímek esetén nincs szorzattá bontás, mert nem beszélhetünk egytényezős szorzatról középiskolában. Azt mondta, hogy sokat tipródott ezen, de úgy véli, hogy így biztosan helyes a tétel kimondása.

Rákérdeztünk arra is, hogy mi a helyzet a középiskolában az 1! és az a^1 bevezetésével, hiszen azok is egytényezős szorzatok. A tanárnő azt mondta nekünk, hogy az 1! és az a^1 bevezetése külön definíciót követel a permanencia-elvet követve, mert az $n!$ és az a^n definíciója nem általánosítható $n < 2$ esetén. (Itt felmerült bennünk az a kérdés, hogy a számelmélet alaptételénél nem lehetne-e alkalmazni a permanencia elvet, a 2^1 nem lehetne-e maga is prímtényezős felbontás? Erre a kérdésünkre azonban sajnos még nem kaptunk választ a tanárnőtől.)

4.4. Dr. Fried Katalin

Fried Katalin – főiskolai docens az ELTE Matematikatanítási és Módszertani Központjában – elmondta nekünk, hogy ő 7-8. osztályban nem mondaná ki precízen a tételt, hanem tapasztalati úton vezetné rá a diákokat arra, hogy akárhogy is kezdjük a tényezőkre bontást, mindig ugyanazokat a prímtényezőket kapjuk eredményül. A tanárnő 9. osztályban viszont pontosan, minden $n > 1$ természetes számra mondaná ki a tételt.

Azt mondta nekünk, hogy sajnos nagyon nehezen lehetne megváltoztatni a tankönyvükben a tételt. Elmesélt néhány részletet arról, hogy hogyan íródik egy tankönyv. Állítása szerint ez egy hosszú folyamat, amibe beletartoznak a szerzők, a szerkesztő(k), a bíráló(k), a lektor(ok), a kiadó, az engedélyek és a nyomtatás. Egy változtatás egytől öt évig is eltarthat, ha egyáltalán lehetséges. Ha egy szerző változtatást javasol, a szerkesztő fogja eldönteni, hogy végigvigyék-e a procedúrát. Általában a tankönyveket öt évre előre nyomtatják. Az első két évben a könyv egy kísérleti tankönyv. Ekkor hibákat és nyomdahibákat gyűjtenek a tanárok és a diákok egyaránt. Ezután elkezdődik a szétosztás. Ezt követően bármilyen változtatás olyan bonyolult, mintha egy új könyvet írnának. Innentől kezdve már a szerkesztő döntése, hogy változtatnak-e a tankönyvön. Ha el is fogadnák a számelmélet alaptételével kapcsolatos változtatási javaslatot, akkor is öt évbe telne, mire megjelenne és a diákokhoz kerülne az új, javított kiadás.

4.5. Az interjúk tanulsága

A tankönyvszerzőkkel való beszélgetések összegzéseként megfogalmazhatjuk azt, hogy mind a tanároknak a tanítás során, mind a tankönyvszerzőknek a könyvek írásakor meg kell találniuk az egyensúlyt az érthetőség és a matematikai precizitás között. Vásárhelyi Éva tanárnő és Vancsó Ödön tanár úr szavaival élve *„engedményeket kell tennünk a matematikai szabatosság rovására a tanulók fejlettségi szintjétől függően az érthetőség javára”*.

A tankönyvszerzők végül egyetértettek abban, hogy jobb lenne, ha a tankönyvekben a számelmélet alaptételét kiegészítenénk azzal, hogy *„a prímszámok prímtényezős felbontása önmaga”*. Viszont ha a dolgozat elolvasása után vissza szeretnénk térni a valóságba, akkor be kell látnunk, hogy hiába értünk egyet abban, hogy számelmélet alaptételének kimondása mindenképpen megérdemelne egy pontosabb, alaposabb változatot, ez önmagában még kevés. A mai viszonyok között a tankönyvek módosítása nagyon nehéz és több évig is eltarthat, ha egyáltalán megvalósítható.

5. Összegzés

Annak kapcsán, hogy a középiskolából kikerülő tanulók nincsenek tisztában a legalapvetőbb számelméleti fogalmakkal dolgozatunkban azt vizsgáltuk, hogy hogyan kezelik a forgalomban lévő tankönyvek a számelmélet témakört. Mostohán. A könyvek matematikailag nem pontosan, csúsztatásokkal vagy hiányosan kezelik a számelméleti fogalmakat és eljárásokat. Az előzetes tanulói tesztek alapján ezt az anyagrészt a tanulók nem tudják. Ennek egyik oka akár az is lehet, hogy a könyvekben lévő hiányosságok hátrányosan hatnak a számelmélet megtanultatására.

Tehetünk azért, hogy a tankönyvek se lehessenek hatással a felejtésre, hogy ne lehessenek a rosszul, hibásan rögzülő fogalmak okozói. A következő javaslatot adjuk a probléma megoldására: megfelelően kell bevezetni és definiálni a számelméleti fogalmakat. A megfelelő bevezetés a mi szempontunkból pontosan kimondott tételeket, értelmesen bevezetett definíciókat, és ezeknek az elveknek megfelelően szervezett tananyagot jelent.

Két utat mutattunk a számelmélet alapvető témáinak kezelésére, az olvasóra, vagy a tankönyvíróra bízva, hogy melyiket választja. Az egyik a meglévő felépítés kiegészítése azzal, hogy a prímszámok prímfelbontása p. Ekkor egy kicsit módosítani kell a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös kiszámítási módszerének leírását, de csak annyival kell kiegészíteni, hogy azokról az esetekről is teszünk említést, amikor valamelyik szám 1, és arról is, amikor a számoknak nincs közös prímtényezőjük. A másik javaslat a számelmélet alaptételének pontos kimondása és az általánosított kanonikus alak bevezetése. Ekkor az összes bevezetett tétel, definíció és eljárás igaz lesz. Cserébe a tétel kimondásában szerepel a *kivéve a 0, 1 és* -1 kifejezés, amitől a tanárok jelentős része idegenkedik.

Ennek kapcsán számos tankönyvszerzővel felvettük a kapcsolatot, négyükkel mélyinterjút készítettünk a fent említett problémákról. Mindnyájukkal arra az egységes álláspontra jutottunk, hogy a leendő tankönyvekben a számelmélettel kapcsolatos fejezetet finomítani kell. A fent említett javaslataink mindegyike körülményesebb, esetleg technikailag bonyolultabb a most a könyvekben lévő tárgyalási módnál, de matematikalag mindenképpen helyes és nem félrevezető. Mindkét módszer nehezebb az eddiginél.

I. Ptolemaiosz királynak arra a kérdésére: miként lehetne a geometriát könnyen elsajátítani, Eukleidész azt felelte [20]:

„A geometriához nem vezet királyi út."

A számelmélethez miért vezetne?

Eukleidész még egy gondolattal meg is toldotta az előzőt:

„Munka nélkül nincs kenyér, sem geometria."

Munka nélkül nem csak geometria nincs, hanem számelmélet és TDK dolgozat sincs.

6. Hivatkozások

[1] Ábrahám Gábor, dr. Kosztolányiné Nagy Erzsébet, Tóth Julianna 2009. *Matematika 9.* Maxim Könyvkiadó. 80-96.

[2] Ambrus Gabriella, Frenkel Andor, Kaposiné Pataky Krisztina, Mezei József, Papp Péter, dr. Szabadi László, Szász Antónia, Székely Péter, Tóth Attila, dr. Vancsó Ödön 2009. *Matematika 9.* Ráció Könyvek. 47-90.

[3] Ambrus Gabriella, Frenkel Andor, Mezei József, Nagyné Szokol Ágnes, Papp Péter, Pataky Krisztina, dr. Szabadi László, Szász Antónia, Székely Péter, Szokol Ágnes, Tóth Attila, dr. Vancsó Ödön 2003 *Matematika 9.* Ráció Könyvek. 59-64.

[4] Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna 2014. Matematika 9. II. kötet. Gyula.

[5] Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna 2014. Matematika 10. I. és II. kötet. Gyula.

[6] Barcza István, Basa István, Tamásné Kollár Magdolna, Kelemenné Kiss Ilona, Bálint Zsuzsanna 2015. Matematika 11. Gyula.

[7] Csányi Petra, Fábián Kata, Pozsonyi Enikő, Szabó Zsanett 2014. *Számelmélet tegnap és holnap. TDK dolgozat.*

[8] Csányi Petra, Fábián Kata, Szabó Csaba, Szabó Zsanett 2015. *Number theory vs. Hungarian highschool textbooks: The fundamental theorem of arithmetic.* Teaching Mathematics and Computer Science 13/2. 219-223.

[9] Csányi Petra, Pozsonyi Enikő, Szabó Zsanett 2014. *A számelmélet tanításának hatékonysága általános- és középiskolában. TDK dolgozat.*

[10] Czapáry Endre, Gyapjas Ferenc 2001 *Matematika 9.* Nemzeti Tankönyvkiadó. 65-85.

[11] dr. Fried Katalin, dr. Gerőcs László, Számadó László 2009. *Matematika 9.* Nemzeti Kiadó. 59-70.

[12] Gábos Adél, Halmos Mária 2005. *Készüljünk az érettségire matematikából.*, Műszaki Kiadó. 52-61.

[13] Hajós György 1999. *Bevezetés a geometriába.* Nemzeti Tankönyvkiadó. Budapest. 122.

[14] Hajdú Sándor, Ceglédy István, Hajdú Sándor Zoltán, Kovács András, Róka Sándor 2008. *Matematika 9.* Műszaki Könyvkiadó. 231-275.

[15] dr. Hajnal Imre 1994. *Matematikai fogalmak, tételek.* Mozaik Oktatási Stúdió. 35-37.

[16] Hajnal Imre, Számadó László, Békési Szilvia 2001. *Matematika 9.* Nemzeti Tankönyvkiadó. 44-47.

[17] Juhász István, Orosz Gyula, Paróczay József, Szászné-dr. Simon Judit 2009. *Matematika 9*, Nemzeti Tankönyvkiadó. 130-151.

[18] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István 2005. *Sokszínű matematika 9.*, Mozaik Kiadó. Szeged. 62-70.

[19] *Nemzeti alaptanterv.* 2012.
http://ofi.hu/sites/ default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf (2016. április 7.)

[20] Sain Márton 1986. *Nincs királyi út!* Gondolat Kiadó. Budapest. 147.