Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar és Informatikai Kar

Csányi Petra - Fábián Kata - Szabó Zsanett

Mitől irracionális a $\sqrt{2}$?

Matematika Tanári MA

TDK

Témavezetők:

Szabó Csaba
egyetemi tanár
Algebra és Számelmélet Tanszék

dr. Vásárhelyi Éva
egyetemi docens
Matematikatanítás és Módszertani Központ

Budapest, 2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Korábbi munkánkban [3, 5] azt vizsgáltuk, hogy a magyarországi (elsősorban középiskolai) matematika tankönyvekben hogyan szerepel a számelmélet témakör, és ez milyen kapcsolatban lehet a tananyag megértésével. A legfontosabb alapfogalmakat emeltük ki, többek között a számelmélet alaptételét, a legnagyobb közös osztót és a legkisebb közös többszöröst. A kutatásunk új iránya a számelmélettel kapcsolatos bizonyítások vizsgálata, azon belül is a legtöbbször előforduló, a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása. Dolgozatunk a [4] angol nyelvű cikk magyar nyelvű átdolgozott változata.

A $\sqrt{2}$ létezik és irracionális. Ebben a dolgozatban mi most „csak" a $\sqrt{2}$ irracionalitásával foglalkozunk. (A létezésről érdemes lehet egy külön kutatást folytatni.) Megmutatjuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása nem megfelelő arra, hogy bemutassa a bizonyítás fogalmát középiskolában, vagy legalábbis nem abban a formában, ahogyan a legtöbb tankönyvben szerepel.

A legtöbb ember, ha megkérdezzük, hogy hogyan bizonyítaná be azt, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális, a következővel kezdi a válaszát: *„Indirekt módon bizonyítanám."*. Azt gondoljuk, hogy sokkal jobb lenne, ha az előző mondat valahogy így hangzana: *„Az állítást a számelmélet alaptétele alapján bizonyítanám be."*.

A $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása többcélú. Nem egyszerűen csak egy a sok bizonyítás közül, amit középiskolában tanítunk, hanem ez az első eset, amikor egy korrekt bizonyítást kellene látniuk a tanulóknak az irracionális számokkal kapcsolatosan, és ez az egyik fő példa az indirekt bizonyítás használatára is. Ez utóbbi vizsgálatával foglalkozik [15].

A következő szerepel a 2012-es NAT-ban [16] a bizonyításokkal kapcsolatosan:

> *„A matematikai kompetencia kialakításához elengedhetetlen az olyan meghatározó bázisképességek fejlesztése, mint a matematikai gondolkodás, az elvonatkoztatás és a logikus következtetés. (...)*
>
> *E kompetencia teszi lehetővé a törvényszerűségek felismerését a természetben, és alkalmassá tesz az érvek láncolatának követésére, a matematika nyelvén megfogalmazott törvények megértésére. (...)*
>
> *A fogalmak, összefüggések érlelése és a gondolkodásmód kialakítása egyre emelkedő szintű spirális felépítést indokol, az életkori, egyéni fejlődési és érdeklődési sajátosságoknak, a bonyolódó ismereteknek, a fejlődő absztrakciós képességnek megfelelően."*

Ez a rövid idézet egyrészt a bizonyításokra, másrészt a bizonyítások megértésének fontosságára hívja fel a figyelmet. A NAT korosztályokra bontott részletesebb leírását megnézve láthatjuk, hogy a fogalmak újra és újra előkerülnek a különböző évfolyamokon. Ez elősegíti azt, hogy a fogalmak egyre inkább elmélyüljenek, beépüljenek a diákok tudásbázisába korosztályuknak és fejlettségi szintjüknek megfelelően. A diákok egy rendszert építenek fel a matematikai tudásukból (fogalmak, eljárások, indoklások, tételek) a matematikai tevékenységek elvégzése közben. A matematika hasznos eszköz a kreatív gondolkodás fejlesztésére.

Ambrus és Schoenfeld rámutatnak arra [1, 17], hogy minden iskolai bizonyítás előzményei között vannak olyan meggondolások, amelyeket tekintély, ismétlés, konkrét példa alapján *„elfogadtak"*, tehát csak lokális rendezésről van szó. Mivel a tanulók általában nem rendelkeznek azzal a háttérrendszerrel, amelybe illeszkednie kell a vizsgált állításnak, ezért megnő a tankönyvszerző vagy a tanár felelőssége. A hiányos, félreérthető vagy éppen hibás gondolatmenet éppen a matematikatanítás általános céljának elérése ellen hat.

A NAT azt várja el a diákoktól, hogy ismerjék a bizonyításokban szereplő érveléseket, illetve elvárja a bizonyítások legfontosabb lépéseinek észrevételét, megértését. A középiskolai tankönyvek vizsgálatakor ezeket az elvárásokat vettük figyelembe. A tankönyvekben a hiányzó érvelések, hiányos okoskodások több helyen is szemet szúrtak nekünk [2, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Gyakran igen alapos mérlegelés és mély meggondolás szükséges ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy mikor használhatjuk egy bizonyításban az alábbi magyarázó szavakat: *nyilvánvalóan*, *ugyanúgy*, *hasonlóan*, *analóg módon*. Vajon a diákok ezek láttán részesülnek a mögöttes tartalom megértésében, vagy pont úgy érzik, hogy a bizonyítás nehezebb részeinek kibogozását ráhagyták?

Dolgozatunkban a Lakatos-féle filozófia [14] szellemében gondolkodunk: a definíciók és a rájuk épülő bizonyítások nincsenek kőbe vésve, vagyis a nemformális matematikában nincsenek végleges, befejezett tételek. Ez azt jelenti, hogy nem azt kell gondolni, hogy egy tétel végső soron igaz, hanem csak azt, hogy még nem találtak rá ellenpéldát. Ha találunk egy ellenpéldát az pedig nem jelenti azt, hogy a szabály ne lenne jó, hanem csak arra hívja fel a figyelmet, hogy jobban meg kell határozni a szabály érvényességének feltételeit. Így folyamatosan újabb és újabb tudást halmozunk fel magunkban a logika, a bizonyítási folyamatok és a cáfolatok meggondolása közben. Lépésről-lépésre szeretnénk kiterjeszteni ezeket az elképzeléseket a $\sqrt{2}$ esetében is [14] első függeléke szerint:

- Úgy véljük, az állítás egy primitív sejtés.
- Bemutatjuk a bizonyítást.
- Ezután adunk egy globális ellenpéldát.
- Majd lokális ellenpéldákat adunk a bizonyítás egyes lépéseihez.
- Megkeressük a *„bűnös lépést"*.

Természetesen a $\sqrt{2}$ irracionalitásának helyes bizonyítása is előkerül, akárcsak a [6] tankönyvben. Lakatos elméletét követve nem állítjuk azt, hogy összegyűjtöttük az összes lehetőséget a bizonyítás kezelésére. Előfordulhat, hogy marad nyitott kérdés. Biztosak vagyunk abban, hogy az olvasó maga lesz az, aki talál még ilyen kérdéseket és további ötleteket. A mi ellenpéldáink, és a *„bűnös lépéseink”* természetesen matematikával vannak fűszerezve. Leginkább a számelméletben szereplő bizonyítások elméleti részére koncentrálunk dolgozatunkban. Szeretnénk olyan struktúrákat mutatni, ahol az analogikusnak gondolt lépések nem működnek. Ezzel szeretnénk rávilágítani arra, hogy ezekben az esetekben az egyszerű magyarázó szavak helyett további okoskodásra van szükség a félreértések elkerülése érdekében.

2. Bizonyítások a tankönyvekben

Most térjünk rá azokra a bizonyos bizonyításokra, vagyis nézzük meg azt, hogy a tankönyvek hogyan bizonyítják a $\sqrt{2}$ irracionalitását. Kezdjük az egyik leggyakrabban használt tankönyvvel [13].

2.1. Bizonyítás.

> Végezzük a bizonyítást indirekt úton: tegyük fel, hogy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ahol $p, q \in \mathbb{Z}^+$ és relatív prímek: $(p; q) = 1$
>
> $$\begin{aligned} \sqrt{2} =& \frac{p}{q}, \\ 2 =& \frac{p^2}{q^2}, \\ 2q^2 =& p^2. \\ & \Downarrow \\ & 2|p^2 \Rightarrow 2|p \Rightarrow 4|p^2, \\ \text{ha} \quad & 4|p^2 \Rightarrow 2|q^2 \Rightarrow 2|q. \end{aligned}$$
>
> Azt kaptuk, hogy p és q is páros. Ez ellentmond annak, hogy relatív prímek, tehát az állítás igaz. □

Ebből a bizonyításból komoly érvek hiányoznak. A kezdeti feltételeket még szavakba önti, de később a lényegi részt csak szimbólumok sorozatával jelöli. Itt magyarázó szavak helyett $\Rightarrow$ szimbólumokat találunk. Ez a szimbólum – a matematikai közösség megállapodása alapján – azt jelenti, hogy a $\Rightarrow$ előtt lévő állításból következik a szimbólumot követő állítást. Viszont egy ilyen nyilacskát csupán abban az esetben használhatunk formális, nyomtatott bizonyításban, ha egyértelmű, nyilvánvaló következtetésről van szó.

2.2. Példa. *Vegyük például az alábbi következtetést:*

$$x > 10 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x\textit{-nek van négyzetgyöke.}$$

Ebben az első következtetés, vagyis implikáció igazságát az okozza, hogy $10 \geq 0$ és a $>$ tranzitív reláció. A második implikáció pedig a négyzetgyökvonás definíciójából következik. Az első érv nagyon egyszerű, köztudott és széles körben elfogadott. Tehát ez tényleg nem kíván bővebb magyarázatot. A második viszont már kevésbé triviális azok számára, akik csak definiálással intézték el a négyzetgyök fogalmát. Viszont a definíció egy része pont az, hogy ha $x > 0 \Rightarrow x$-nek van négyzetgyöke. Ráadásul az implikáció igaz marad akkor is, ha a 10-et lecseréljük egy tetszőleges 0-nál nagyobb számra. Tehát ez az érvelés általános értelemben véve igaz.

Nemsokára látni fogjuk, hogy a 2.1. bizonyításban szereplő következtetések nem ebbe a triviális kategóriába tartoznak.

Két másik tankönyvben [11, 12] így bizonyítják, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális:

2.3. Bizonyítás.

> Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális szám. Tudjuk, hogy bármely racionális szám felírható $\frac{a}{b}$ alakban, ahol az $\frac{a}{b}$ már nem egyszerűsíthető tört (a, b relatív prímek). Tehát feltesszük, hogy $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
>
> Ha $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{N}^+$, $b \in \mathbb{N}^+$ és $(a, b) = 1$ akkor $2 = \frac{a^2}{b^2}$, azaz $2b^2 = a^2$.
>
> A $2b^2 = a^2$ egyenlőség bal oldalán páros szám áll, ezért a jobb oldalon is páros számnak kell állnia. Ez *csak úgy lehet*, ha a páros, ekkor azonban a^2 osztható 4-gyel. Ha a jobb oldal osztható 4-gyel, akkor a bal oldalnak is oszthatónak kell lennie 4-gyel, ez csak úgy lehet, ha b^2 osztható 2-vel. *Ekkor* azonban b is osztható 2-vel.
>
> Így a feltételezésből ahhoz jutottunk, hogy a is páros, b is páros. Ekkor azonban a és b nem relatív prímek, pedig ezt feltételeztük. Ellentmondáshoz jutottunk. Helyesen okoskodtunk. A hiba csak a feltételezésben lehet. Tehát a $\sqrt{2}$ nem lehet racionális, a $\sqrt{2}$ irracionális szám. □

1. észrevétel: A 2.3. bizonyítás nem más, mint a 2.1. bizonyítás szavakra átültetve. Mindegyik nyilacska helyébe szöveg került, ami nem tette informálisabbá a bizonyítást. Ezért ez egyenértékű a 2.1. bizonyítással, vagy még veszélyesebb is annál, mert a szavak meggyőzőbbek lehetnek, mint a nyilacskák. A tapasztalatlan olvasó, aki még nem érzi biztonságban magát egy bizonyítás során, könnyen úgy érezheti, hogy ő az egyetlen, aki nem érti ezt a bizonyítást. Így elsiklik felette, elfogadja értelmezés nélkül. Vagy egyszerűen úgy gondolhatja, hogy ez pontosan úgy néz ki, mint egy jó bizonyítás. Aztán, mivel nem látja az értelmét, csatlakozik azon emberek (nagy) csoportjába, akik szerint a matematika egy rejtély. Annak ellenére hogy a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása a középiskolában lévő aritmetikai és algebrai bizonyítások közül az egyik legfontosabb, meglehetősen kevés figyelmet fordítunk rá.

2. észrevétel: Nézzük a 2.3. bizonyítást. A páros szám fogalma legalább annyira köztudott és elfogadott, mint az egész szám fogalma. Mindenki ismeri a páros és páratlan számokat. Mindenki látta már, hogy ha p^2 páros, akkor p is páros. Tehát ez a bizonyítás „korrekt". Amennyiben értjük a páros és páratlan közti különbséget, akkor a bizonyítás tényleg korrektté válik. Érdekesnek tartjuk ebben a bizonyításban azt is, hogy egy ponttól kezdve nem indokolt módon a párosság helyett a 2-vel való oszthatóságot használja az érvelés során. Vajon miért? Ha a mélyebb megértés a cél, márpedig miért ne lenne az, akkor nem látjuk értelmét még egy definíció szóba hozásának, amit jelen esetben felesleges ebbe a bizonyításba belezsúfolni.

A bizonyításban több helyen, a nemtriviális következtetéseknél is egy helyettesítő szöveg váltotta le a nyilacska szimbólumot. Ez talán nyomatékosítja a következtetés fontosságát, de korántsem ad magyarázatot.

Például az imént említett *ha* p^2 *páros, akkor* p *is páros* következtetésre a 2.3. bizonyítás két kifejezése (*„csak úgy lehet, hogy”* és *„ezért”*) mellett számos másikkal is találkozhatunk további tankönyvekben. Például:

- *„ebből következik, hogy”* [7, 10]
- *„ebből látszik”* [10]
- *„láthatóan* p^2*, azaz* p *páros szám”* [8]

A most következő két bizonyításban már olyat fogunk látni, amire az eddigiekben még nem volt példa: az előző néhány sorban tárgyalt következtetést most érvekkel is alátámasztják. Lehet, hogy csak egy fél mondattal egészült ki ez a bizonyítás az előzőekhez képest, de ez mégis kicsit tisztítja az egyébként meglehetősen homályosnak tűnő képet.

Az egyik ilyen bizonyítás [9]-ben szerepel:

2.4. Bizonyítás.

A bizonyítás indirekt.

Tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ racionális, vagyis felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q egész számok, és $(p,q) = 1$, vagyis az 1-en kívül nincsen más közös osztójuk. A $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ekvivalens átalakításokkal: mindkét oldalt négyzetre emelve: $\sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$, innen $2 = \frac{p^2}{q^2}$, ebből $2q^2 = p^2$.

Tehát p páros szám (mert páratlan szám négyzete is páratlan lenne). Így $p = 2k$ (k egész szám), ahonnan $p^2 = 4k^2$, tehát $2q^2 = 4k^2$, innen $q^2 = 2k^2$.

Tehát q is páros lenne, ami lehetetlen, mert így p és q egyaránt páros lenne, vagyis a 2 közös osztójuk lenne, holott föltettük, hogy az 1-en kívül nincs közös osztójuk. Eszerint ellentmondáshoz jutottunk, tehát a kiinduló feltevésünk, mely szerint a $\sqrt{2}$ racionális, nem igaz.

Hasonlóan bizonyítható be, hogy bármely nem négyzetszámnak a négyzetgyöke irracionális szám. $\square$

A másik, minimális érvelést is tartalmazó bizonyítás [2]-ből való:

2.5. Bizonyítás.

Tehát **indirekt feltesszük**, hogy a $\sqrt{2}$ értéke törtszámként is felírható:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Itt az a és a b számok relatív prímek, vagyis $(a, b) = 1$, azaz a tört tovább már nem egyszerűsíthető.

Mindkét oldalt emeljük négyzetre!

$$\begin{aligned} 2 &= \left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ 2 &= \frac{a^2}{b^2} \\ 2b^2 &= a^2 \end{aligned}$$

A $2b^2$ egy páros szám, tehát a is páros, mert csak páros számnak lehet a négyzete páros. A feltétel szerint $(a, b) = 1$, ezért b-nek páratlannak kell lennie.

Mivel a páros szám, felírhatjuk $a = 2p$ alakban.

$$\begin{aligned} 2b^2 &= (2p)^2 \\ 2b^2 &= 4p^2 \qquad / : 2 \\ b^2 &= 2p^2 \end{aligned}$$

Ebből az következik, hogy b is páros. (Csak a páros számnak a négyzete lehet páros.)

De olyan b szám nincs, ami egyszerre páros is, és páratlan is. Vagyis nincsen olyan $\frac{a}{b}$ törtszám, ami $\sqrt{2}$-vel lenne egyenlő, így **ellentmondásra** jutottunk. □

Ebben a két bizonyításban – a fejezet elején tárgyalt másik három bizonyítástól eltérően – egy egyszerű megjegyzést találunk magyarázatként: a 2.4-ben a $páratlan^2 = páratlan$-t, a 2.5-ben pedig a $páros \cdot páros = páros$-t. Egyet kell értenünk abban, hogy ezek a magyarázatok helyesek. Sőt, még abban is, hogy ezek a bizonyítások csak elemi érveket tartalmaznak, mivel a páros és a páratlan fogalmakat állítólag minden tanuló ismeri.

3. Esettanulmányok

A $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása kapcsán közel 100 emberrel készítettünk esettanulmányokat. A résztvevőket véletlenszerűen választottuk ki. Közülük körülbelül 20-an középiskolás diákok voltak, 20-an matematika szakos tanárok, 60-an pedig első-, másod-, illetve harmadéves matematika szakos egyetemisták, akik már elvégezték az egyetemi számelmélet kurzust.

Az esettanulmányok indító kérdése az volt, hogy *„Hogyan bizonyítanák be, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális?”*. A bizonyítást egy kivétellel (amikor geometriai bizonyítást hallottunk) mindenki így kezdte:

Indirekt tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ racionális. Írjuk fel, a $\sqrt{2}$-t két egész szám hányadosaként:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Ezen a ponton a 60 matematika szakos hallgatóból 4 megállt. Nem tudták, hogy mi lehet a következő lépés. Őket egy kis segítséggel rávezettük arra, hogy a négyzetgyököt kellene eltüntetni. Így már eszükbe jutott, hogy négyzetre kell emelni mindkét oldalt.

Emeljük négyzetre mindkét oldalt:

$$\sqrt{2}^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Szorozzunk be b^2-tel.

$$2b^2 = a^2.$$

Ennél a lépésnél 5 hallgató állt meg a 60-ból, és ők nem is folytatták a bizonyítást. Olyasmiket mondtak, hogy *„Nem emlékszem rá, hogy hogy volt tovább.”*, *„Most nem tudom, fáradt vagyok.”*.

Sokan itt visszatértek az első sorhoz és kiegészítették annyival, hogy

$$(a, b) = 1,$$

mondván, hogy az a és a b relatív prímek. Megmagyarázni viszont nem mindenki tudta, hogy miért van erre szükség. Mások csak arra emlékeztek, hogy itt kell valami kikötést tenni, de arra már nem, hogy mit kell kikötni, maguktól pedig nem tudták kitalálni. Rajtuk kívül pedig voltak olyanok is, akik nem foglalkoztak olyan *„apróságokkal”* mint a kikötés.

A kikötés nehézségeinek leküzdése, vagy a probléma halogatása (*„majd a végén kitalálom, hogy mi kell ide”*) után legtöbben úgy folyatták, hogy *„Úgy emlékszem, hogy itt volt valami páros vagy páratlan, legalábbis azt hiszem... Sajnálom, nem tudom pontosan.”*.

Voltak olyan esettanulmányok, amiket nem egy-egy emberrel, hanem egy kisebb csoporttal végeztünk. Az egyik ilyen alkalommal, amikor öt emberrel beszélgettünk, kérdezgetni kezdtük őket a $2b^2 = a^2$ lépésnél. Arra emlékeztek, hogy ez az egyenlőség már a bizonyítás vége felé volt és ezzel kapcsolatosan kell mondani *valamit*, amitől a bizonyítás véget ér. A csoport szép lassan és eleinte meglehetősen bizonytalanul összerakta a *páratlanszor páratlan érvelés*t.

Ennek kapcsán a következő beszélgetést folytattuk le a csoporttal:

– Miért igaz, hogy páratlanszor páratlan az páratlan?

– Mert a $(2k+1)\cdot(2k+1)$ is páratlan. – felelték némi gondolkodás után.

– Honnan jött a $2k+1$?

– Az a páratlan.

– Miért?

– Hát mert tanultuk, hogy az.

– És akkor mi a páros?

– Hát a $2k$.

– Miért?

– Ezt is tanultuk.

– Minden egész szám páros vagy páratlan?

– Persze.

– Honnan tudjátok, hogy csak $2k$ és $2k+1$ alakú egész számok vannak?

Ezen a ponton erősen elbizonytalanodott a csoport. Csak hosszas gondolkodás és további kérdések után mondták ki a kulcsszót, hogy itt a maradékos osztás kap szerepet.

Egy hallgató – aki három évet már elvégzett az ötéves matematika tanárképzésből az egyetemen – azt mondta, hogy bemegy az iskolába, ahol tanít és megkérdezi a kollégáitól is, hogy ők hogyan bizonyítanák be, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális. Levelét változtatások nélkül közöljük:

> *Kedves Tanár Úr!*
>
> *Beszélgettem XY-nal (ő is az egyetemen végzett, matek majorral, csak pár éve), és ott adtuk fel a $\sqrt{2}$ bizonyítását, mikor odaértünk, hogy páros. Előjött a prím, a felbonthatatlan, az egész és a páros számok fogalma, amikben ezek után már nem is vagyunk biztosak. Megkérdeztem, mik a párosak, és először azt mondta, hogy amik 0, 2, 4, 6, 8-ra végződnek. Aztán mondta ő is a kettővel való oszthatóságot. Onnan meg már jött a SZAT. De a $\sqrt{2}$ esetén, ha $b = 1$, akkor $\sqrt{2} = a$, ami eredetileg egész volt. Na de akkor mik is a páros számok? A gyök kettő páros? Félelmetes ebbe belegondolni. Y azt mondta, maradjunk inkább annál a bizonyításnál, amikor a négyzet átlójára méregetjük az oldalt. :) Holnap kérdezem a következő matekost, csak ők most szóbeliztettek.*
>
> *Üdvözlettel:*

A beígért másnapi levél pedig az alábbi volt:

Kedves Tanár Úr!

Ma megkérdeztem a másik kollégát is. Egyből azt mondta a páros számra, hogy kettővel osztható. A gyök kettő bizonyításánál azt mondta, hogy akkor valahogy ki kéne játszani, hogy q ne legyen 1. Azt mondta, tudjuk, hogy $1 < 2 < 4$*. Vonjunk gyököt és akkor beszorítottuk két egymást követő egész közé, így kizártuk a* $q = 1$ *esetet. Erre jött egy harmadik kolléga, vele együtt már majdnem teljes volt a természettudományi munkaközösség. Ő 4 év múlva megy nyugdíjba, de azt mondta, ezen még nem gondolkodott el. Arra jutott, ha* $q = 1$ *akkor* p^2 *egy páros szám, SZAT miatt akkor p is páros. Viszont akkor azt kapjuk, hogy* $2 = p^2$*. Bal oldal csak 2-vel osztható, jobb meg 4-gyel, így nem lehet egyenlő, így is megbukik az indirekt bizonyítás. Közben a magyar-töri munkaközösség irigykedve figyelt, hogy a matekosok egy probléma körül hogy össze tudnak ülni, ők meg minden apróságon veszekednek. Ez a „feladvány" külön közösségösszekovácsolónak is beillett, ezért külön köszönet Önnek!*

Szép hétvégét!

Üdv.:

Az esettanulmányok azon sikeres résztvevői, akiknek sikerült hiánytalanul bebizonyítaniuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális, a következőképp érveltek:

„Tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ *felírható két egész szám hányadosaként:*

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Mindkét oldalt emeljük négyzetre

$$2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Szorozzunk be b^2*-tel*

$$2b^2 = a^2.$$

Írjuk fel mindkét oldalt prímek szorzataként. A számelmélet alaptétele alapján a prímtényezős felbontás egyértelmű és a számelmélet alaptétele miatt a négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden prímtényező páros kitevőn szerepel. Így a 2 a bal oldalon páratlan, a jobb oldalon pedig páros hatványon szerepel, ami ellentmondás. Tehát a $\sqrt{2}$ *irracionális."*

A hiányos érvelések mellett egy másik probléma az, hogy néhány tankönyv a következőt állítja:

„A fenti módszerrel belátható, hogy minden olyan pozitív a egész szám esetén, mely nem négyzetszám, a $\sqrt{a}$ *irracionális szám."*

4. A matematikai háttér

Most kicsit engedjük meg magunknak azt a tévképzetet, hogy a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyításával analóg módon $\sqrt{a}$ irracionalitása is bizonyítható. Az első néhány lépés után eljutunk a következőhöz:

$$aq^2 = p^2.$$

Ebből azt a következtetést szeretnénk levonni, hogy

$$a|p.$$

Sajnálatos módon ez az állítás így általánosan nem igaz. Például:

$$12|6^2, \text{ de } 12 \nmid 6.$$

Ha egy ilyen állítás nem mindig igaz, akkor egyrészt meg kell magyaráznunk azt, hogy miért igaz $a = 2$-re, másrészt nem állíthatjuk azt, hogy minden a egészre hasonlóan bizonyítható.

Nézzük, mely a egészekre lehet levonni a fenti következtetést:

4.1. Tétel. *Legyen a egész szám. Az állítás az, hogy $a|n^2$-ből következik $a|n$ akkor és csak akkor igaz, ha a négyzetmentes (vagyis különböző prímek szorzata).*

4.2. Bizonyítás. Legyen $a = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_k$ különböző prímek. Ekkor $a|n^2$-ből következik $p_i|n^2$. A prímtulajdonság szerint $p|n \cdot n$-ből következik $p|n$ vagy $p|n$. Ezért minden $1 \leq i \leq k$-ra $p_i|n$. Mivel a p_i-k különbözők, ezért relatív prímek, így a szorzatuk osztja n-t. Tehát $a|n$.

Kell még, hogy nem négyzetmentes számok esetén nem teljesül, hogy $a|n^2$-ből következik $a|n$. Legyen $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_1 > 1$, és legyen $n = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Azt állítjuk, hogy ekkor $a|n^2$ és $a \nmid n$. Amikor $a > n$, akkor $a \nmid n$. Most: $n^2 = p_1^{2(\alpha_1 - 1)} p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}$. Meg kell mutatnunk, hogy n^2 minden prímtényezőjének a hatványkitevője nagyobb vagy egyenlő, mint a megfelelő prímtényezőinek a hatványkitevői. Amikor $\alpha_1 > 1$, akkor $\alpha_1 \geq 2$, ezért $2\alpha_1 \geq \alpha_1 + 2$ és végül $2\alpha_1 - 2 \geq \alpha_1$-et kapjuk. A kívánt egyenlőtlenség $i > 1$-re pedig egyértelmű. Tehát $a|n^2$. □

Következésképpen a *„hasonló”* bizonyításokkal való próbálkozás csupán a négyzetmentes számokra fog működni, de ebben az esetben is kissé komplikáltan, számos meggondolnivalóval.

Most térjünk át a 2.4. és 2.5. bizonyítások *„másolhatóságára”*. Ezekben a bizonyításokban – illetve több esettanulmányban is – azokat a magyarázatokat kaptuk, hogy *páros* $\cdot$ *páros* $=$ *páros*, *páratlan*^{2} $=$ *páratlan* és *páratlan* $\cdot$ *páratlan* $=$ *páratlan*.

Hogy tudnánk ezt tetszőleges a egészre értelmezni, lefordítani? Nos, a páros azt jelenti, hogy kettővel osztható, a páratlan pedig azt, hogy kettővel nem osztható. Tehát a *páratlan* $\cdot$ *páratlan* $=$ *páratlan* érvelést megfogalmazhatjuk így is:

$$\text{Ha } 2 \nmid b \text{ és } 2 \nmid c, \text{ akkor } 2 \nmid bc.$$

Általánosan:

$$\text{Ha } a \nmid b \text{ és } a \nmid c, \text{ akkor } a \nmid bc.$$

Vagy az állítás kontrapozíciója:

$$\text{Ha } a \mid bc \text{ akkor } a \mid b \text{ vagy } a \mid c.$$

Ez pontosan a prímtulajdonság. Magasabb matematikában pedig **ez** a prím definíciója. Tehát ezzel a tulajdonsággal (a prímtulajdonsággal) nem rendelkezik egy nemprím egész. Például:

$$6 \nmid 4 \text{ és } 6 \nmid 15, \text{ de } 6 \mid 4 \cdot 15 = 60.$$

Középiskolában nem említik meg a prímtulajdonságot, vagy ha mégis, akkor a számelmélet alaptételének következményeként teszik meg. A diákoknak általában nehézségeik vannak a prím vagy a felbonthatatlan szám fogalmával [18, 19]. Habár a prímtulajdonság bizonyítása nem bonyolult, enélkül nem lehet teljes a 2.4. és a 2.5. bizonyítások általánosítása.

4.3. Tétel. *Ha p prím és $p|ab$ akkor $p|a$ vagy $p|b$.*

4.4. Bizonyítás. A számelmélet alaptétele szerint a és b felírható prímek szorzataként: $a = p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ és $b = q_1q_2 \cdot \ldots \cdot q_t$. A $p|ab$ esetén létezik $l \in \mathbb{Z}$, hogy $ab = pl$. Most a számelmélet alaptételét újra alkalmazva l is felírható prímek szorzataként: $l = r_1r_2 \cdot \ldots \cdot r_s$. Tehát:

$$ab = p_1p_2 \cdot \ldots \cdot p_kq_1q_2 \cdot \ldots \cdot q_t = pr_1r_2 \cdot \ldots \cdot r_s$$

Így ab-t kétféleképpen bontottuk prímekre. Az ab prímfelbontásának egyértelműsége miatt, a p prímnek a bal oldalon is szerepelnie kell. Tehát a p-nek egyenlőnek kell lennie valamely p_i-vel vagy q_j-vel valamilyen i-re vagy j-re. Így $p|a$ vagy $p|b$. $\square$

5. Bizonyítani, vagy nem bizonyítani?

Elérkeztünk dolgozatunkban ahhoz a ponthoz, amikor megnézzük, hogy a 2. fejezetben lévő bizonyításokban melyek voltak a kulcsfontosságú lépések, és ezek hogyan általánosíthatók. A legveszélyesebb bizonyítás a 2.1., mert csak nyilakat használ a következtetések esetén, azokhoz kapcsolódó indoklás viszont nincs. Vagy talán még rosszabb a 2.3. bizonyítás, ahol még azt a benyomást is kelti a bizonyítás, mintha magyarázatot adna? Úgy gondoljuk, hogy a 2.1. és 2.3. bizonyítások egyike sem előnyös tankönyvi használatra, mivel az, hogy *„csak úgy lehet, hogy”* így önmagában még nem indoklás. Ráadásul ez a kifejezés arra utal, hogy itt csak egy rövid meggondolnivalót helyettesítünk ezzel a magyarázószöveggel. Ez egy kellemetlen része a bizonyításnak, ahol igazán szükség lenne érvelésre, ami lehet, hogy a bizonyítás ritmusát elrontja, mégis szükség van rá. Az általunk említett tankönyvekben nem szerepelt indoklás. Ez azt sugallja, hogy ez az érv elég a megbizonyosodáshoz. Elgondolkodtató, hogy ezek a bizonyítások követik-e így a NAT szellemiségét.

A rossz hír az, hogy a bizonyítás következtetései helyesek. De miért rossz hír ez? Azért, mert a következtetések azt mutatják, hogy a bizonyítás jó. Így nagyon nehéz megmutatnunk, hogy hol van a hiba a bizonyításban, hiszen minden lépés teljesen igaz. Másrészt az, hogy milyen lépéseket fogadunk el a bizonyítás lépéseinek, az egyfajta íratlan szabály. Egy lépés pedig más és más lehet általános iskolai, középiskolai és egyetemi szinten. Az alaposabb olvasók, vagy a középiskolai tanárok azt mondhatják, hogy a precíz érveket nem szükséges elmondani középiskolában. A bizonyítások egyszerűen intuitívebbek középiskolában, és elfogadhatjuk azok az érveléseit. Általánosságban nehéz ezzel a nézőponttal vitatkozni, azonban a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyításánál más a helyzet. A 3. fejezetben említett esettanulmányok tisztán azt mutatják, hogy ezek a bizonyítások egyszerűen elvesznek az emberek fejében.

Nézzünk egy számelméleten kívüli példát is:

5.1. Példa. *Keressük meg azokat a pontokat a síkban, amelyek egy adott f egyenestől d pozitív távolságra vannak.*

Általános iskolában a tanár annak is örül, ha valaki észreveszi és kimondja, hogy ezen pontok az f egyenestől d távolságra lévő f-fel párhuzamos egyenest alkoják. Persze még boldogabb, ha a diákok azt is észreveszik, hogy két ilyen egyenes is van.

Középiskolában vissza lehetne utalni az általános iskolára, arra hogy ezt már 6. osztályban tanulták. A tanárok nyomására a diák úgy fogja magyarázni a megoldását, hogy vegyünk két pontot, A-t és B-t, amelyek egyaránt d távolságra vannak f-től. A két pont az f egyenes azonos oldalán található, kössük őket össze, ekkor megkapjuk e_{AB} egyenest. Majd vetítsük le az A-t és a B-t f-re, és nevezzük a keletkezett pontokat A'-nek és B'-nek. Ekkor $|AA'| = |BB'|$ és az $e_{AA'}$ párhuzamos az $e_{BB'}$-vel. Így az $AA'B'B$ négyszög egy téglalap. Ennél fogva e_{AB} párhuzamos az f egyenessel. Így minden, az A-t és B-t tartalmazó félsíkban lévő, f-től d távolságra lévő pont az e egyenesen van és az e minden pontja d távolságra van f-től.

Egyetemi szinten viszont ez az érv nem elég. Az érv nem igaz általánosan, csak akkor, ha elfogadjuk a párhuzamossági axiómát. Így például az érvelés nem igaz a hiperbolkius geometriában, ezért minden megfelelő bizonyításnak tartalmaznia kell olyan lépést, amelyben a párhuzamossági axiómával érvel. Ennek a bizonyításnak a kifejtése nem témája a dolgozatunknak.

Miért volt olyan fontos ezt a kitérőt megtenni? Azért, mert az előbb megfigyelt érvek nem általános érvényűek a geometriában. Ehhez hasonló a probléma a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyításánál is. Hiszen a 2. fejezetben szereplő bizonyítások hibái többnyire abból erednek, hogy a bennük szereplő érvek nem igazak minden számkörben. Melyik volt az a lépés a geometriai bizonyításban, amelyikben feltételezzük a párhuzamossági axiómát? Az, amikor azt mondtuk, hogy az AA' és a BB' szakaszok párhuzamossága és egyenlősége implikálja, hogy az $AA'B'B$ négyszög téglalap. Ehhez hasonló lépést kell keresnünk a $\sqrt{2}$ bizonyításában is.

A bevezetőben azt ígértük, hogy dolgozatunkban matematikailag is megvitatjuk a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyításának témakörét, így vissza kell térnünk [14]-ban szereplő 5 lépéshez. Segítségül hívjuk a 4. (lokális ellenpéldákat adunk a bizonyítás egyes lépéseihez) és az 5. lépést (megkeressük a *„bűnös lépést”*). Ennek fényében adjunk helyet az ellenpéldáknak két ismertebb számelméleti struktúrában.

$$\begin{aligned} \mathcal{G} =& \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\} \quad \text{és} \\ \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] =& \{a+b\sqrt{-5} \mid a,b \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

A $\mathcal{G}$-vel jelölt struktúra a Gauss-egészek gyűrűje. $\mathcal{G}$-ben a 2 nem prím, mert

$$2 = (1+i)(1-i) = -i(1+i)^2.$$

Az is igaz, hogy

$$2 \mid (3+i)^2 = 2(4+3i), \text{ de } 2 \nmid 3+i.$$

Emiatt ebben a $\mathcal{G}$ gyűrűben, nem teljesül a triviálisnak tűnő $2 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$ következtetés. Egy másik ellenpélda erre az, hogy $2 \mid (1+i)^2 = 2i$, de $2 \nmid 1+i$.

Az eredeti bizonyításban mi egy prímről beszélünk, viszont $\mathcal{G}$-ben a 2 nem az. Ez az első olyan pont, amikor megállapíthatjuk, hogy a 2.4. és 2.5. bizonyítások nem teljesek, mert nem tűnik úgy, hogy kihasználják 2 prímtulajdonságát, pedig megteszik.

Mielőtt most azt hinnénk, hogy a bizonyítás legalább prímekre mindig működik, mutatunk egy ellenpéldát 2-vel és $1+\sqrt{-5}$-tel. A 2 és az $1+\sqrt{-5}$ prímek $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$-ben, és teljesül a következő:

$$2 \nmid 1+\sqrt{-5}, \text{ de } 2|(1+\sqrt{-5})^2 = -4+2\sqrt{-5} = 2(-2+\sqrt{-5})$$

Tehát itt a 2 osztja egy másik prímszám négyzetét. Így $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$-ben még a prímekre sem igaz, hogy $p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a$.

Mit is csináltunk itt tulajdonképpen? A felsőbb matematikában ellenpéldát mutattunk az összes fent említett bizonyításban szereplő következtetésre. Ugyanis ezek a következtetések kihasználták azt, hogy a tört számlálója és nevezője is páros.

Egy végső támadás lehetne a mi okfejtésünkre, hogy a $\sqrt{2}$ sosem racionális semmilyen gyűrűben. Ahhoz, hogy ez igaz legyen a bizonyításnak olyannak kell lennie, ami nem használja a számelmélet alaptételét. Erre ellenpélda a $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$. Itt

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{8}}{2}.$$

Tehát $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$-ban a $\sqrt{2}$ racionális.

Az 1. táblázatban összefoglaltuk az ellenpéldákat, amikkel rámutattunk az egyes érvelések szükségességére.

„bűnös" lépés	**gyűrű**	**ellenpélda**
$n \mid a \cdot b \Rightarrow n \mid a$ vagy $n \mid b$	$\mathbb{Z}$	$6 \mid 9 \cdot 4$, de $6 \nmid 9$ és $6 \nmid 4$
$n \nmid a$ és $n \nmid b \Rightarrow n \nmid ab$		
$n \nmid a^2 \Rightarrow n \nmid a$	$\mathbb{Z}$	$12 \mid 6^2$, de $12 \nmid 6$
prím $\mid a \cdot b \Rightarrow p \mid a$ vagy $p \mid b$	$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$	$2 \mid 6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$, de $2 \nmid (1 \pm \sqrt{-5})$
prím $\mid a^2 \Rightarrow p \mid a$	$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$	$2 \mid (1+\sqrt{-5})^2$, de $2 \nmid (1+\sqrt{-5})$
$\sqrt{2}$ irracionális	$\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$	$\frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

1. táblázat. Áttekintő táblázat

Ezek az ellenpéldák jól mutatják, hogy a $\sqrt{2}$ irracionalitásának aritmetikai bizonyításából nem lehet kihagyni a számelmélet alaptételét, mert minden indoklás arra vezethető vissza. Így olyan gyűrűkben, ahol nem teljesül a számelmélet alaptétele az is előfordulhat, hogy a $\sqrt{2}$ racionális. Ha a címben feltett kérdésre szeretnénk válaszolni, vagyis arra, hogy *Mitől irracionális a* $\sqrt{2}$*?*, akkor azt válaszolhatnánk, hogy a *számelmélet alaptételétől.*

6. Összegzés

Dolgozatunk középpontjában a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása áll. Ez a bizonyítás több szempontból is kulcsszerepet játszik a középiskolások matematikai szemléletének fejlődésében. Ezért több oldalról is körbejártuk a vele kapcsolatos problémákat és kérdéseket. A NAT [16] felhívja a figyelmet arra, hogy a bizonyításoknak igen nagy szerepe van a matematikaoktatásban. Egyik elvárása a bizonyítások legfontosabb lépéseinek megértése. Ebből a szemszögből is elemeztük a bizonyításokat.

Megkerestük a rendelkezésünkre álló összes tankönyvcsaládban a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítását és a tankönyvi bizonyítások alapos elemzésébe bocsátkoztunk. Érdemes volt. Bár ezek a bizonyítások első olvasásra meggyőzőnek tűnnek, de alaposabb tanulmányozás után észrevehető, hogy egy kivétellel [6] mind elnagyolt [2, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Az alapvető probléma az, hogy a bizonyításokkal szemben támasztott több követelménynek sem felelnek meg [1, 14, 17]. Nem csak a fent említett NAT-féle szempontok nem teljesülnek, ezek a bizonyítások alkalmatlanok akár általánosításra, akár az analógia szempontjainak érvényesítésére is.

Azért, hogy tisztább képet kapjunk arról, hogy mi van a tanulók, egyetemi hallgatók, illetve tanárok fejében ezzel a bizonyítással kapcsolatban, számos esettanulmányt készítettünk. Hipotéziseinknek megfelelően azt tapasztaltuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása egy kusza, megjegyezhetetlen, érthetetlen bizonyítás a diákok számára. A legtöbb megkérdezett tanuló a bizonyítás első néhány lépéséig jut csak el, tehát pont a gondolatmenet lényegét nem érti. Voltak olyan esettanulmányok is az egyetemisták körében, melyeket kisebb csoportokon végeztünk. Bár ezek az esettanulmányok jobban sikerültek, mondtak korrekt bizonyításokat is, ezek csak egyedi esetek voltak. Tehát nem csak a mi benyomásaink szerint, hanem az esettanulmányok eredményei alapján is megállapíthatjuk, hogy a tankönyvi bizonyítások nem érik el a céljukat.

Dolgozatunkban megkerestük a *„bűnös lépést”* [14] és minden oldalról kiveséztük. A bizonyítás lépésenkénti vizsgálata rávilágított arra, hogy mely részeken van szükség precízebb indoklásra. A matematikai háttér taglalásával megmutattuk, hogy miért lennének fontosak a precízebb magyarázatok. Példákkal szemléltettük, hogy minden olyan elképzelhető bizonyítás hiányos, amelyik nem használja a számelmélet alaptételét.

Dolgozatunkban tehát megmutattuk, hogy a számelmélet alaptételére hivatkozva korrekt, rövidebb és érthetőbb a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása.

7. Hivatkozások

[1] Ambrus András 1992. *Indirektes Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

[2] Ambrus Gabriella, Frenkel Andor, Kaposiné Pataky Krisztina, Mezei József, Papp Péter, dr. Szabadi László, Szász Antónia, Székely Péter, Tóth Attila, dr. Vancsó Ödön 2009. *Matematika 10.* Ráció Könyvek.

[3] Csányi Petra, Fábián Kata, Szabó Csaba, Szabó Zsanett 2015. *Number theory vs. Hungarian highschool textbooks: The fundamental theorem of arithmetic.* Teaching Mathematics and Computer Science 13/2. 219-223.

[4] Csányi Petra, Fábián Kata, Szabó Csaba, Szabó Zsanett, Vásárhelyi Éva 2015. *Number theory vs. Hungarian highschool textbooks II.: $\sqrt{2}$ is irrational.* Teaching Mathematics and Computer Science *Beküldve.*

[5] Csányi Petra, Fábián Kata, Szabó Zsanett 2016. *Hogyan építsünk számelméletet?. TDK dolgozat.*

[6] Csatár Katalin 2010. *Matematika 9. - II. kötet.* Apáczai Kiadó.

[7] Czapáry Endre, Gyapjas Ferenc 2001 *Matematika 10.* Nemzeti Tankönyvkiadó.

[8] Fröhlich Lajos 2008. *Alapösszefüggések matematikából - Emelt szint.* Maxim Kiadó.

[9] Gábos Adél, Halmos Mária 2005. *Készüljünk az érettségire matematikából.* Műszaki Kiadó.

[10] Hajdú Sándor, Ceglédy István, Hajdú Sándor Zoltán, Kovács András 2008. *Matematika 10.* Műszaki Könyvkiadó.

[11] dr. Hajnal Imre 1997. *Matematika I.* Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.

[12] Hajnal Imre, Számadó László, Békési Szilvia 2001. *Matematika 10.* Nemzeti Tankönyvkiadó.

[13] Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János, Vincze István 2005. *Sokszínű matematika 10.*, Mozaik Kiadó. Szeged. 62-70.

[14] Lakatos Imre 1976. *Proofs and Refutations.* Cambridge University Press. Cambridge.

[15] U. Leron 1985. A direct approach indirekt proofs. *Educational Studies in Mathematics* 16. 312-325.

[16] *Nemzeti alaptanterv.* 2012.
http://ofi.hu/sites/ default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf (2016. április 7.)

[17] Schoenfeld, A. H. 1989. Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior. *Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 20, No. 4, 338-355.

[18] R. Zazkis and S. Campbell 1996. Prime decomposition: Understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior* 15(2). 207-218.

[19] R. Zazkis and S. Campbell 1996. Divisibility and Multiplicative Structure of Natural Numbers. *Preservice Teachers'Understanding Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 27. No. 5. 540-563.