EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

RÉKASI ANNA – STIRLING ANNA KRISZTINA

KÖZOKTATÁSBAN TANULÓ DIÁKOK FELADATKÉSZÍTÉSI KÉPESSÉGÉNEK VIZSGÁLATA

MATEMATIKA – FIZIKA OSZTATLAN TANÁRSZAK

TDK

Témavezető:

Szabó Csaba
egyetemi tanár
Algebra és Számelmélet Tanszék

TARTALOMJEGYZÉK

Absztrakt

A problémamegoldás képességének fejlesztése fontos része a matematikaóráknak, és jelentős szerepe van a problémamegoldás fejlődésében is, azonban a problémafelvetés képessége nagyon kevés szerepet kap a közoktatásban. Kialakítottunk egy módszert, melynek segítségével a problémafelvetés és feladatkészítés megjelenhet matematikaórán. A módszert a 2019/20-as tanévben négy magyarországi iskolában kipróbáltuk a távoktatás keretein belül. A részt vevő diákok kis csoportokban készítettek feladatokat, megadott problémafelvetési stratégiák alapján, és megoldották egymás feladatait. Az elkészített feladatokat különböző, általunk összeállított szempontrendszerek alapján értékelték a szaktanárok és a diákok, majd mi is. Dolgozatunkban bemutatjuk a kutatásunkban résztvevő diákok számos feladatát és a szempontrendszerek alapján elért eredményeiket. Ezeket összevetjük más, nemzetközi kutatásokban részt vevő diákok eredményeivel.

1. Bevezetés

A matematikaoktatásnak mindig is fontos része volt a problémamegoldás, azonban problémafelvetéssel, illetve feladatkészítéssel ritkán foglalkozunk matematikaórán. Matematikaoktatás során általában azt gondoljuk, hogy a feladatok biztosítása a szaktanárok, vagy a feladatgyűjtemények és tankönyvek kizárólagos feladata. Ennek következtében a tantervek a problémafelvetést általában nem helyezik előtérbe (Singer et. al. 2015).

Azonban nem újkeletű gondolat, hogy a diákok maguk vessenek fel matematikai problémákat. Henry Belfield 1887-ben a *Revised Model Elementary Arithmetic* c. könyvében írt arról, hogy a gyermekeknek érdeke, hogy készítsenek saját problémákat, és javasolja, hogy az oktató ennek érdekében mutasson nekik absztrakt példákat, amiket konkretizálhatnak és saját problémáikká formálhatnak (Belfield 1887). Karl Duncker szerint a problémamegoldás fontos része a probléma sikeres újra- és újraformálása, ez ugyanis szerinte az eredeti probléma helyzetének élesítése – „*sharpening the original setting of the problem*” (Duncker 1945). A szakirodalomban gyakran megjelenik, hogy a Pólya által is leírt (Pólya 1957) szakértő szintű problémamegoldás fontos eleme, hogy a megoldó a folyamat során variálja a problémát, így újabb és újabb kérdéseket talál. Ezért hasznos lehet, ha valaki a problémamegoldási folyamaton kívül is foglalkozik feladatvariálással.

Számos kutatás kapcsolja össze a matematikai problémafelvetési képességeket a matematikai problémamegoldási képességekkel és a kreativitással (Bonotto, Dal Santo, 2015; Leung 1997; Koichu et. al. 2016; Nadjafikhah et al, 2012). Cinzia Bonotto és Lisa Dal Santo feltáró kutatásukban felső tagozatos (10-11 éves) diákok problémafelvetési, problémamegoldási és kreativitási képességeit vizsgálták. A felvetett problémákat három szempont szerint értékelték:

- folytonosság: a felvetett problémák vagy kérdések száma
- rugalmasság: hány különböző kategóriába sorolhatók a készített problémák
- eredetiség: mennyire különböznek a felvetett problémák az eddig ismertektől

Ezeket a szempontokat használta Silver is (Silver 1994) a problémafelvetés vizsgálatára híres munkájában, mely a problémafelvetés modern kutatásának egyik megalapozója.

Magyarországon is része a matematika-didaktikai kutatásoknak a problémafelvetés vizsgálata. Például Kovács Zoltán és Pintér Klára is foglalkoznak a matematikai problémafelvetéssel (Kovács 2017; Pintér 2012).

Dolgozatunkban a magyarországi középiskolás korú diákok problémafelvetési és feladatkészítési képességeit vizsgáltuk osztálytermi körülmények között. Az általunk végzett kísérletet, melyben több magyarországi iskolából is részt vettek osztályok, a 2. fejezetben fogjuk részletesebben leírni. Ezt megelőzően pedig bemutatunk néhány példát a problémafelvetés osztálytermi gyakorlatára különböző országokból és évfolyamokról.

2. Példák osztálytermi gyakorlatra

Blomqvist és Gade (Blomqvist, Gade 2015) Charlotta Blomqvist osztályával (22 fő) végeztek felmérést, két tanév során. A részt vevő diákok 4. majd 5. évfolyamba jártak. A problémafelvető-feladatkészítő tevékenység úgy zajlott, hogy a diákok kis cédulákon számokat, tankönyvbeli kifejezéseket vagy más szavakat kaptak, amikkel feladatokat kellett készíteniük. Három szakaszban zajlott a tevékenység. Az első szakaszban írásbeli kérdéseket fogalmaztak meg a kis papírcédulák szavaival. A második szakaszban a diákok párokban készítettek problémákat (szintén a cédulákon lévő szavak alapján). A harmadik szakaszban pedig egymásnak (az osztály összes tanulója, együtt) fogalmaztak meg problémákat – ismét a cédulák szavaival. Most bemutatunk néhány, a diákok által készített feladatot (természetesen magyarra fordítva), részben az olvasó szórakoztatására, részben, hogy később kapcsolatokat kereshessünk ezek között a feladatok között, és a kísérletünk során a magyar diákok feladatai között.

Az első szakasz során a diákok megfogalmaztak olyan kérdéseket, amik a számok tulajdonságaihoz kapcsolódnak, és olyanokat, amik társadalmi tapasztalataikkal kapcsolatosak (beöltöztetettek). Ezek közül bemutatunk néhányat eredeti formájukban, a készítők saját megoldásaikkal. Igyekeztünk a nyelvi hibákat is átörökíteni a feladatok lefordításakor:

- „Mennyi a 2673 számban a számjegyek összege?”
- „Mennyit kell hozzáadnia annak, aki 7245-öt akar kapni és már van 7000-e?”
- „1008 kevesebb, mint 1009?”
- „Az 5000 mínusz 4345 páros szám? (Válasz: Nem)”
- „A 4831 szám páratlan. Ha valaki kétszer adja hozzá ugyanazt az összeget, majd elvesz 6794-et, akkor a kapott szám páratlan?”
- „Ha 9876-ban születtél, akkor körülbelül hány éves vagy?”
- „Ha Umeåban 4831 focista van, akkor hány focicsapat van Umeåban?”
- „A tej ára 4831. Mennyibe kerül két doboz tej?”
- „A kolbászárus kolbászt ad el. Egy kolbász ára 4831. Nadya két kolbászt akar vásárolni. Mennyit kell fizetnie?

Gade és Blomqvist (Blomqvist, Gade 2015) leírják, hogy a diákok lelkesen vettek részt a páros problémafelvetésben. Ebben a szakaszban is készültek beöltöztetett modellezési feladatok. Ezek közül is eredeti formájukban mutatunk be néhányat:

- „Egy gazdának 72 hektár földje van. 27-et kapott, amikor megnyerte a hangyák elleni csatát. Mennyi földje van? (Válasz: 99 hektár föld)”
- „Egy repülőgépben 230 ember hirtelen elesett. Obama és segítői lejöttek a mennyből. 50-en voltak. Hányan lettek most? (Válasz: 230 + 50 = 280)”
- „Donald zaklató. A zsebében 32 korona van. Pénzt vesz el valakitől az iskolában. Most 45 korona van. Mennyivel lett több?”
- „A Mikulás, a Fogtündér és a Húsvéti Nyuszi a legjobb barátok. A Mikulásnak 1000 karácsonyi ajándéka van. Húsvéti nyuszinak pedig 300. Fogtündérnek 10 000 foga és tízese van. Mennyi karácsonyi ajándék, tojás, fog és tízes van összesen? (Válasz: 21300)”
- „Volt egyszer egy majom, akinek 230 banánja volt, ezek közül néhány banánról megfeledkezett, így 50 banán megrohadt. Hány banán nem rohadt meg? (Válasz: 180 banán)”
- „Niels egy nap 990-szer hányt. Másnap 500-szor hányt. Hányszor hányt összesen?”

- „Görbe Carlsonnak 160 koronája volt. Vett egy robotot 50 koronáért, az egész világegyetemet pedig 50 koronáért. Mennyi maradt még?”
- „Egy igazán nagyszerű iskolában 630 tanár volt. Egy nap 200 tanárt elbocsátottak, mert kapcsolatba kerültek egymással. Hány tanár maradt a nagy botrány után.”
- „Volt 615 gengszter. Aztán jött öt FBI-ügynök, és az összes FBI-ügynök azonos számú gengsztert megölt. Hányat öltek meg külön-külön? (Válasz: 123)”
- „1000 ember szavazott Noel elnökre, de 600 szavazott Bolqvist elnökre. Mennyivel többen szavaztak Noel elnökre, mint Blomqvist elnökre?” „Az Egyesült Államokban elnökválasztás van. Noelt elbocsátották. Ulla elnök 320 szavazatot kapott, Sara elnök 165 szavazatot. Hány ember szavazott?”

Érdemes megfigyelni, hogy milyen sokszor jelennek meg mesei és valós elemek – akár egymással keveredve is – a diákok feladataiban. Rengeteg a való életen alapuló, de egészen abszurd szituáció. Ez a későbbiekben megfigyelhető lesz a magyar diákok esetében is.

Az utolsó szakaszban a diákok az osztály előtt felolvasták a feladatukat, és mindenki részt vett egymás feladatainak megoldásában. Ilyen feladatok készültek például:

- Pelle hotdogja a valóságban 1337 km hosszú. Milyen hosszú a hotdog egy 1:1000 sákán?
- Pelle húgának 500 lova van. Ezek 7/10 része izlandi ló. Hány ló izlandi?

A svédországi kísérlet után bemutatunk egy az Egyesült Államokban és Kínában végzett kísérletet (Van, H. & Presmeg, 2015). Xianwei Van Harpen és Norma Presmeg 55 jiaozhoui, 44 sanghaji, 13 tizenegyedik osztályos és 17 tizenkettedik osztályos amerikai diákkal készített komplex felmérést, akik mind emelt szinten tanultak matematikát az iskoláikban. A diákok matematikatudását és képességeit egy „mathematics content test” (matematikai tartalmú teszt) és egy „problem-posing test” (problémafelvetési teszt) alapján mérték fel.

A problémafelvetés során a diákoknak szabad, részben-strukturált és strukturált helyzetben kellett problémákat felvetniük. A feladat-utasításokra olvashatunk három példát a cikkben:

1. feladat (szabad problémafelvetési helyzet): Tíz lány és tíz fiú áll egy sorban. Vessen fel minél több problémát, ami valamilyen módon felhasználja a megadott információkat!

2. feladat (részben-strukturált helyzet): A megadott ábrán látható egy háromszög és a bele írható köre. Alkosson minél több problémát, melyek valamilyen módon kapcsolódnak ehhez a képhez!

3. feladat (strukturált helyzet): Tegnap este buli volt az unokatestvéred házában és a csengő tízszer szólalt meg. Első csengetésre csak egy vendég érkezett. Valahányszor megszólalt a csengő, hárommal több vendég érkezett, mint ahányan az előző csengésre érkeztek.

a) Hány vendég lép be a tizedik alkalommal? Válaszát részletezze!

b) Tegyen fel minél több kérdést, ami valamilyen módon kapcsolódik ehhez a feladathoz!

A háromféle problémafelvetési szituációban készített feladatok közül „nonviable”-nek, azaz alkalmatlannak minősültek a „hány évesek a gyerekek?” „hány fiú és lány volt a buliban” típusú kérdések.

1. Táblázat

a diákok által felvetett „nonviable” problémák százalékos átlaga

	1.feladat	2.feladat	3.feladat
USA	9%	31%	8%
Sanghaj	12%	42%	13%
Jiaozhou	12%	15%	3%

Triviális problémának számítanak a következő jellegű kérdések:
feladat: Hány gyerek van összesen?
feladat: Hány geometriai alakzat van a megadott képen?
A vendégek fele kék inget viselt. Hányan viseltek kék inget?

2. Táblázat

a diákok által felvetett triviális problémák százalékos átlaga

	1.feladat	2.feladat	3.feladat
USA	16%	9%	19%
Sanghaj	17%	8%	7%
Jiaozhou	14%	6%	6%

A diákok által az 1. feladatban felvetett problémákat Van Harpen és Presmeg különböző kategóriákba sorolta a matematikai tartalmuk alapján. Ezeket a kategóriákat példákon keresztül mutatják be:

- kombináció vagy permutáció: Hányféleképpen lehet elrendezni a 20 gyereket egy sorban, ha egy lánynak kell az első helyen lennie?
- valószínűség: Ha a tanár kettesével párba akarja állítani a gyerekeket, mekkora a valószínűsége, hogy A és B egy pár lesz?

- számtan: egy gyerek csirketojást eszik. Két gyerek megeszik egy kacsatojást. Négy gyerek megeszik egy libatojást. Öt gyerek megeszik egy másik tojást. Hány tojást eszik ez a 20 gyerek?
- adatelemzés: A 20 gyermek pulzusszáma a következő. Ábrázolja az adatokat: 82, 85, 69, 70, 83, 71, 90, 77, 76, 69, 81, 77, 88, 69, 75, 82, 84, 78, 70, 68 (a szívverések száma percenként)
- geometria: Ha a 20 gyermeknek téglalapot kell alkotnia, hány különböző téglalapot alakíthatnak ki?
- sorozat: Az első gyereknek egy cukorkája van. A másodiknak két cukorkája van. A harmadik személynek három cukorkája van. A negyediknek öt cukorkája van. Az ötödiknek nyolc cukorkája van. Hány cukorkája van a 20. gyereknek?
- algebra: A gyerekek közt minden negyedik fiúnak megvan egyszer A könyv. Minden lánynak megvan egyszer A könyv. Minden fiúnak megvan B könyv. Minden második lánynak megvan egyszer B könyv. Összesen öttel több B könyvük van, mint A. Hány fiú és hány lány van?
- egyéb: húsz ember passzolgat egy labdát. A fiúk a tőlük harmadik helyen állónak adják tovább a labdát, a lányok a tőlük második helyen állónak. Összesen kilencen értek labdához. Hogyan állnak sorban?

Van Harpen és Presmeg (Van, H., Presmeg, Norma 2015) diákokkal való interjúiból kiderült, hogy bár a hivatalos tantervekben megjelenik a problémafelvetés, a tanárok nagyon ritkán viszik ezt be matematikaórára. Mégis, annak ellenére, hogy a diákok korábban nem nagyon foglalkoztak problémafelvetéssel, a felmérés alapján mindannyian képesek voltak valódi/megfelelően jó problémákat felvetni a teszt során, bár ezek a problémák nagyon különbözőek voltak.

A részt vevő amerikai diákok a problémafelvetési tevékenység jellemzésére gyakran használták a „think outside of the box", „something fun", „something interesting" kifejezéseket. A problémafelvetés során általában „csak hagyták, hogy eszükbe jussanak dolgok", „csak leírták, ami eszükbe jutott".

A sanghaji diákok elmondásuk alapján olyan problémákat vetettek fel, mint amilyenekkel órákon foglalkoztak „csak visszagondoltam a tankönyvbeli tananyagra... például nemrég tanultuk a sorozatokat, ezért ez egy sorozatos feladat...". Néhányan nagyon nehéznek találták, hogy új feladatokat készítsenek, mert már olyan sok problémát oldottak meg.

A jiaozhoui diákok leginkább az általuk felvetett problémák matematikai tartalmára fókuszáltak, és nagyon tudatosan vetettek fel problémákat. „Először matematikai ötlettel kezdtem, majd megpróbáltam összekapcsolni a való élettel. Például a harmadik feladatban, a csengőproblémában nyilvánvalóan számtani sorozatról van szó, ezért csak kitaláltam egy ezzel kapcsolatos problémát." „Amikor megláttam a kört, gondoltam a sugárra, a területre, a kerületre stb. Aztán amikor megláttam a háromszöget, azonnal gondoltam a területre, a kerületre, a magasságra stb. Aztán csak összekötni őket, hogy nehezebbé tegyem a problémákat."

Van Harpen és Presmeg arról is megkérdezték a diákokat, hogy fontosnak tartják-e a problémafelvetést a matematikában. A diákok szerint segít abban, hogy meglássák a matematika struktúráját, hogy jobban megértsenek problémákat. Segíti összefoglalni és rendezni a tudást és különböző módszereket. Viszont a kínai diákok azt is kiemelték, hogy bár a matematika tanulásához fontos, nem kérik számon a főiskolai vagy egyetemi felvételi vizsgákon. Ezért szerintük, főleg a végzős tanévben, az a fontosabb, hogy sok feladatot megoldjanak.

3. Kutatásunk

Kutatásunk során középiskolás korú diákok problémafelvetési, feladatkészítési képességét vizsgáltuk. A kutatást 2020 tavaszán indítottuk el, a távoktatás keretében. Kidolgoztunk egy olyan módszert, melynek segítségével a szaktanárok felmérhetik, majd fejleszthetik a diákok problémafelvetési, modellalkotási, feladatkészítési képességét. Ennek segítségével a különböző iskolákban tanító matematikatanárok a megváltozott oktatási körülmények között, távolléti oktatásban tudnak problémafelvetéssel és feladatkészítéssel foglalkozni diákjaikkal. Ezért összeállítottunk egy tájékoztató leírást a tanárok számára (1. számú melléklet), melyet számos iskolába elküldtünk. Ezen kívül az általunk kidolgozott és összeállított dokumentumot az Oktatási Hivatal is átvette, így a honlapján is megtalálható volt a 2019/2020-as tanév második felében a távoktatáshoz ajánlott módszerek között, mint „*A tanulást támogató további hasznos anyagok*" (*1.*)

A résztvevő szaktanárok velünk is felvehették a kapcsolatot, így kaptuk meg több osztály elkészült feladatait. A későbbiekben bemutatunk néhányat ezek közül a hozzánk beérkezett feladatok közül. Ezeket a beérkezett feladatokat egy általunk összeállított szempontrendszer szerint értékeltük, mely szempontrendszert a későbbiekben részletesebben ismertetjük.

Célunk az volt, hogy megvizsgáljuk, hogyan és milyen feladatokat tudnak felvetni a részt vevő diákok (alapvetően felső tagozatos és középiskolás korosztály), valamint, hogy lássuk, milyen típusú és témakörű feladatok érdeklik őket. A korábban, matematika tanárszakos hallgatók körében végzett hasonló kutatásaink alapján arra számítottunk, hogy esetetleg egy-egy jó feladatot fognak tudni kitalálni, viszont fejlesztendő lesz ezen képességük.

Az általunk felépített problémafelvetési gyakorlat során az osztályba/csoportba járó diákok 3-4 fős csapatokat alkottak, majd ezekben a csapatokban készítettek feladatokat. Minden csapat egy 4-5 feladatból álló feladatsort készített, valamilyen problémafelvető stratégia szerint. Több lehetséges stratégiát is leírtunk. Ezek közül a stratégiák közül a szaktanárok tetszés szerinti számút ismertethettek a diákjaikkal.

Ezek a stratégiák a következők:

a) feladatkészítés megadott adatok alapján:

   pl.: kapnak egy táblázatot egy cukrászda forgalmáról, vagy egy kosárcsapat eredményeiről...

b) új feladat létrehozása meglévő problémák alapján, vagy azokhoz kapcsolódóan (feladatvariálás):

   pl.: „what-if-not" technika: itt van egy feladat egy szabályos háromszöggel, mi lenne, ha nem szabályos lenne, hanem egyenlőszárú? ... ezzel a technikával felfedezhetők új problémák már meglévő feladatok variálásával.

c) feladat készítése valós szituáció modellezésével

   pl.: banki, pénzügyi szituációk modellezése

d) adott témára készített feladatok:

   pl.: űrhajó, kosárlabda, bevásárlóközpont, kertészkedés, túrázás, filmek, buszok...

A stratégiák ismertetése, vagy hogy esetleg milyen módon válogat belőlük, teljes mértékben az osztályt vagy a csoportot tanító szaktanárra volt bízva. Nem határoztuk meg előre, hogy a szaktanár hány stratégiát és hogyan ismertessen a diákokkal. Ehhez mindössze javaslatokat, ötleteket küldtünk a szaktanároknak.

Szerettük volna, hogy a diákok által kitalált és beküldött feladatok érdekesek, ötletesek, kreatívak legyenek. Olyan feladatokat vártunk, amiket ők maguk is szívesen megoldanának, és amiket mi is jó szívvel be tudnánk vinni majd a saját matematikaóráinkra. A tanároknak kiküldött tájékoztatóban is javasoltuk, hogy a csapatok készítsenek megoldást is a saját feladataikhoz. Ezt azért tartjuk fontosnak, mert korábbi kutatásainkban (Rékasi, Stirling, 2018, 2019) azt tapasztaltuk, hogy sokszor a feladatok készítői nem gondolják végig elég alaposan, hogy valóban megoldható-e az általuk kitalált feladat. Azonban, ha a megfogalmazás után meg is oldják saját feladataikat a csapatok, akkor könnyebben észre vehetik, ha például valamilyen adat kimaradt a leírásból, vagy nem egyértelmű a megfogalmazás, vagy egyáltalán nem megoldható a feladat. Ezen kívül a javításnál, értékelésnél nekünk és a szaktanároknak is sokat segíthet, ha látjuk a csapat által elképzelt megoldás menetét is. Ennek segítségével könnyebben rájöhetünk egy-egy hiba okára vagy jobban érthetővé válnak a pontatlanul fogalmazott feladatok.

Kértük, hogy a feladatokat kitaláló csapat írja le, hogy milyen feladatmegoldási stratégiával, módszerrel dolgoztak, és hogy milyen motivációjuk vagy céljuk volt a feladat elkészítéséhez, elkészítésével *(pl.: mindenképpen mágneses vonatokról szóló feladatot akartak készíteni, vagy rávezető feladatokat készítettek egy versenyfeladathoz, vicces feladatsort akartak csinálni, stb).*

A diákok az elkészült feladataikat először a szaktanárnak küldték el. Ő átnézte, kijavította, és értékelte a csapatok beérkezett feladatait egy általunk összeállított szempontrendszer alapján (1. táblázat). Így volt lehetőség javítani a hibás feladatokon. Ez után a szaktanár koordinálásával a minden csapat megkapta egy másik csapat feladatait. Ők megoldották a kapott feladatokat, majd értékelték ezeket. A diákok számára is összeállítottunk egy szempontrendszert egymás feladatainak értékeléséhez (1. táblázat). A tanárok és a diákok szempontrendszere nem egyezett meg teljesen, mert egy szaktanár egészen más szempontok szerint nézi meg a diákjai által kitalált feladatokat, mint egy olyan csapat, akik diákként, és nem tanári szemmel nézve oldják meg a kapott feladatsort. Az általunk összeállított szempontrendszerek az 1. táblázatban láthatóak:

Tanári		**Diák**	
Szempontok	**Pontszám**	**Szempontok**	**Pontszám**
Megoldható	2	Mennyire kapcsolódik az idei tananyaghoz?	1
Korosztályhoz illő	1	Érthetően megfogalmazott	1
Érthetően megfogalmazott	1	Kihívást jelent	1
Matematikailag helyes	1	Mennyire újszerű?	2
Beöltöztetettsége/valós szituációba való beépítése (ha van)	1	Élvezetes, ötletes-e ?	1
Kihívást jelent	1		
Mennyire eredeti?	2		
Élvezetes, ötletes-e ?	1		

(3. táblázat)

Ezeket a szempontrendszereket korábbi kutatásainkban használt szempontrendszereink alapján állítottuk össze (*Rékasi, Stirling, 2018, 2019*). Figyelembe vettük, hogy a szaktanárok sok esetben jegyet is fognak adni a tanulóknak erre a feladatra, a diákok pedig valószínűleg a szimpátiát is beleveszik a pontozásba.

Az értékelésekhez Google Forms felületeket hoztunk létre. Ezek linkje a mellékletben (*1.melléklet*) látható. Az egyik felületre a szaktanár töltötte fel a beérkezett feladatokat és a feladatot készítő csapat saját megoldásait. Ugyanitt értékelte a szaktanár az általunk összeállított szempontok alapján a beérkezett feladatokat. A másik felületen a diákcsapatok értékelték a másik csapat feladatait, és ide töltötték fel a másik csapat feladataihoz elkészített saját megoldásaikat. Ezeknek a Google Forms felületeknek a segítségével kaptunk mi visszajelzést a kutatás résztvevőitől.

Kutatásunkba több iskolából kapcsolódtak be szaktanárok. Részt vett a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium egyik tanárnője, a Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium tanárnője, az ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimnázium és Kollégium egyik tanárnője, és a Németh László Gimnázium, Általános Iskola Hódmezővásárhely egyik tanárnője is diákjaikkal.

4. A szempontrendszerünk

A diákok hozzánk beérkezett feladatait egy általunk összeállított, a tanárok és diákok szempontrendszerétől eltérő szempontrendszer szerint értékeltük (4. táblázat, 1. melléklet). Ezt a szempontrendszert korábbi tapasztalataink és a szakirodalomban olvasottak alapján állítottuk össze. Azt szerettük volna, hogy ez olyan szempontrendszer legyen, mely minden esetben használható a diákok által kitalált feladatok értékelésére.

<table>
<tr><th>Szakmai rész</th><th>pont</th><th>Élvezetességi rész</th><th colspan="2">pont</th></tr>
<tr><td>Valamilyen Tananyaghoz illő</td><td>8 pont</td><td>Újszerű/eredeti /ötletes</td><td>6 pont</td><td rowspan="2">Az összegük, kivéve, ha az összeg nagyobb mint 6. Ekkor 6 pont.</td></tr>
<tr><td>Nehéz/könnyű (kihívás)</td><td>4 pont</td><td>Matematikai élmény</td><td>6 pont</td></tr>
<tr><td>Matematikailag helyes</td><td>8 pont</td><td>Beöltöztetés</td><td>6 pont</td><td>6 pont</td></tr>
<tr><td>Korosztályhoz illő</td><td>5 pont</td><td>Korszerűség</td><td>4 pont</td><td>4 pont</td></tr>
<tr><td colspan="2">Összesen 25 pont</td><td colspan="3">Összesen 16 pont</td></tr>
</table>

(4. táblázat)

Egy olyan szempontrendszert szerettünk volna összeállítani, melynek segítségével a szerint pontozhatjuk a feladatokat, hogy azok mennyire használhatóak fel a matematikaoktatásban. Megállapítottunk olyan „szinteket”, amik meghatározzák, hogy melyik feladatokat nevezzük jó feladatnak. Szakmailag jónak nevezzük azt a feladatot, ami a szakmai részben összesen elér legalább 20 pontot, és a szakmai rész valamely szempontjában minimum 80%-ot. Hasonlóan határoztuk meg az élvezetességileg jó feladatokat. Azt a feladatot nevezzük élvezetességileg jónak, ami az élvezetességi részben elér legalább 12 pontot, és valamelyik szempontból az élvezetességi részben minimum 80%-ot. Összességében jónak nevezzük azokat a feladatokat, amik szakmailag és élvezetességileg is jók.

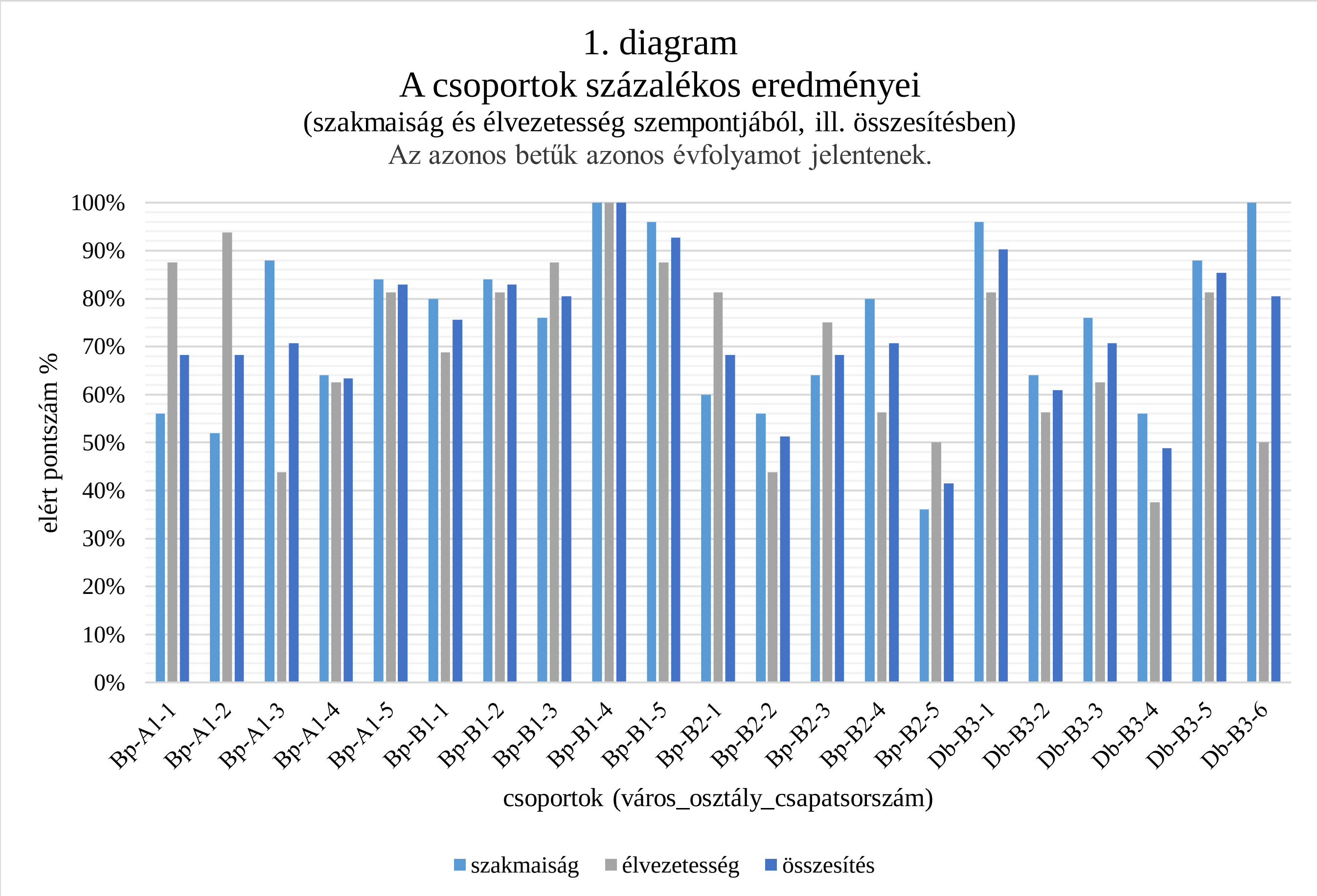
Ha egy feladat csak matematikailag, vagy csak élvezetességileg éri el a jónak nevezett szintet, attól az lehet egy jól használható feladat. Így az ilyen feladatokat, amik legalább az egyik kategória szerint jók, már sikeres problémafelvetés eredményének tekintjük.

Az élvezetességi részben szereplő ötletesség (6 pont) és matematikai élmény (6 pont) két olyan szempont, melyekre összességében 6 pont kapható legfeljebb. Ez a pontozás úgy történik, hogy összeadódik az ötletességre és a matematikai élményre kapott pontszám, azonban, ha ez az összeg több, mint 6 pont, akkor 6 pontot kap a csapat. Ezzel azt szerettük volna elérni, hogy ha egy feladat nincs ötletesen beöltöztetve, de matematikailag nagyon izgalmas, vagy ha matematikailag nem újszerű, de nagyon ötletesen van tálalva, akkor se veszítsen 6 élvezetességi pontot.

5. Eredményeink

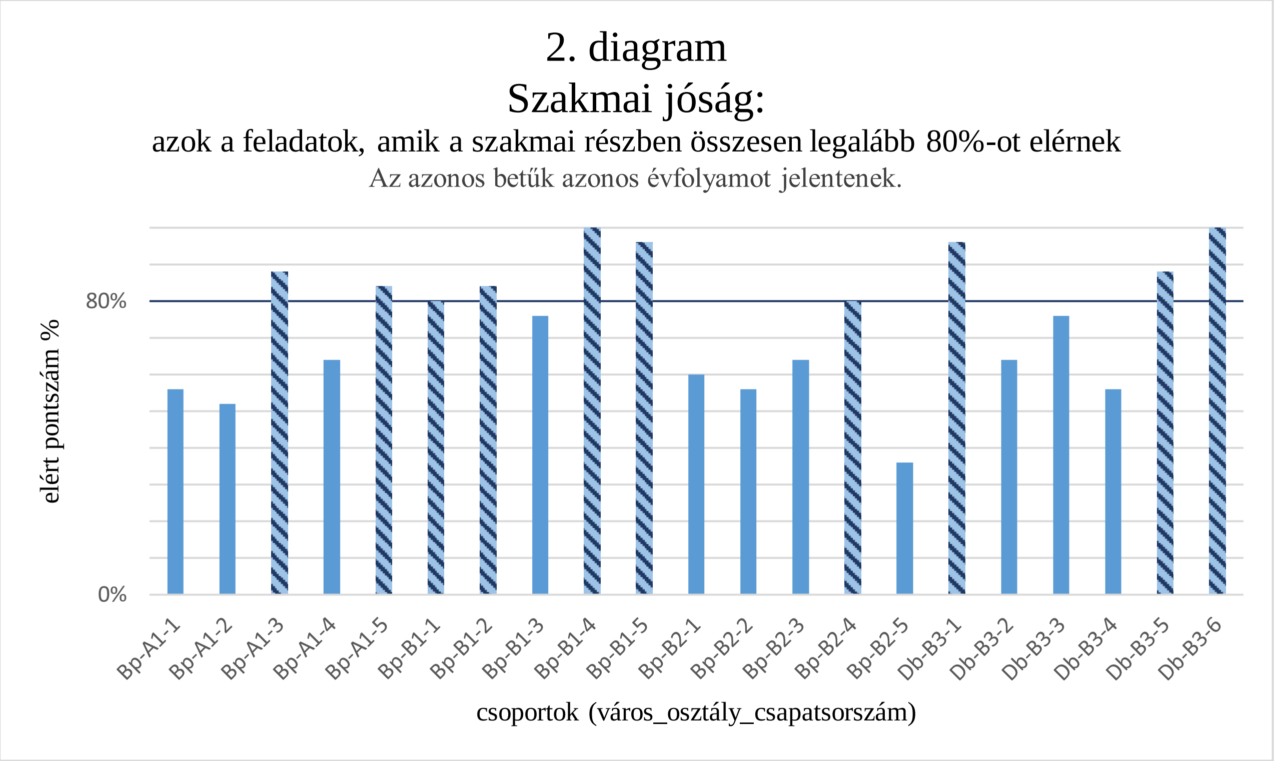
A diákok által elkészített, beküldött, majd általunk értékelt feladatok között számos jó, és számos gyengébb feladat is szerepelt. Összesen 21 csapattól kaptunk feladatokat. Ezek közül, az általunk meghatározott szempontok és minimumfeltételek alapján 10 feladat volt szakmailag jó, 11 feladat élvezetességileg jó. Összesen 6 feladatsor került az „összességében" jó kategóriába, azaz ennyi feladat lett szakmailag és élvezetességileg is jó.

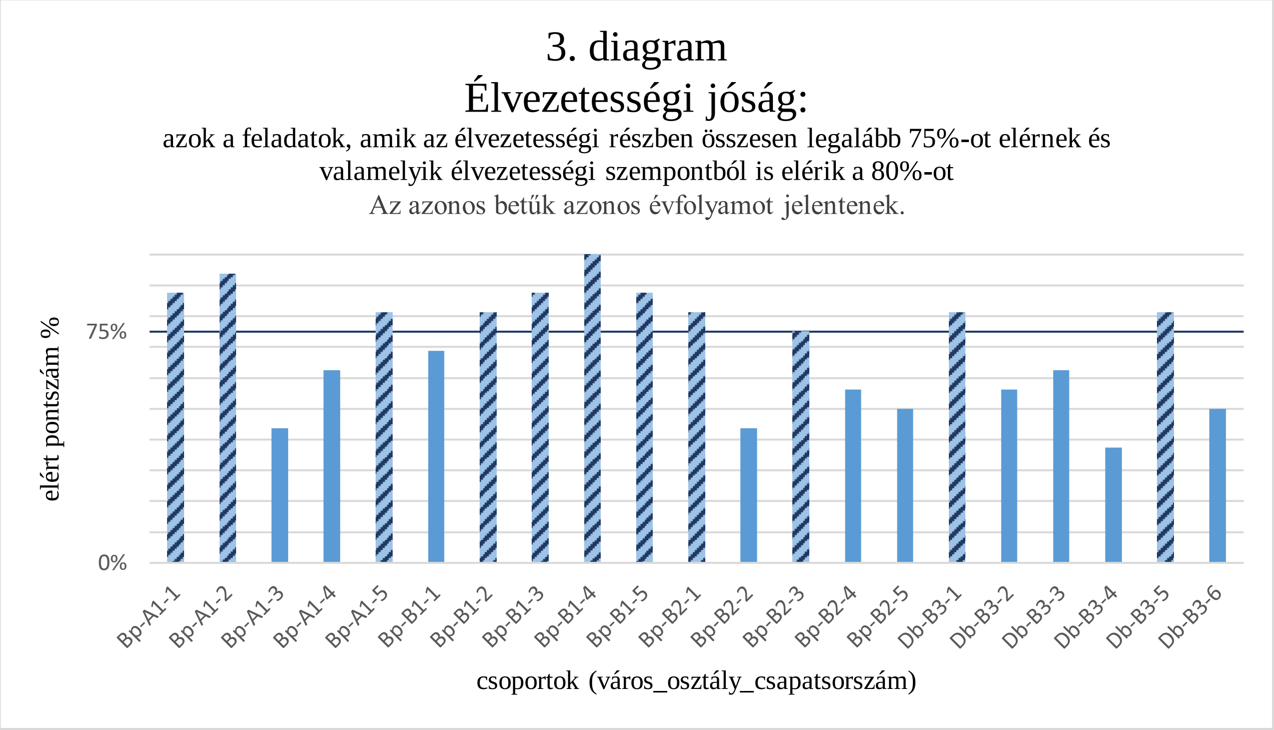
Az alábbi diagramon (1. diagram) megmutatjuk a két megvizsgált iskola négy csoportjában született feladatok eredményeit, a mi szempontrendszerünk (4. táblázat) szerint. Az egyes oszlopok jelentik a szakmaiság szempontjából, élvezetesség szempontjából és összesítésben elért eredményeket.

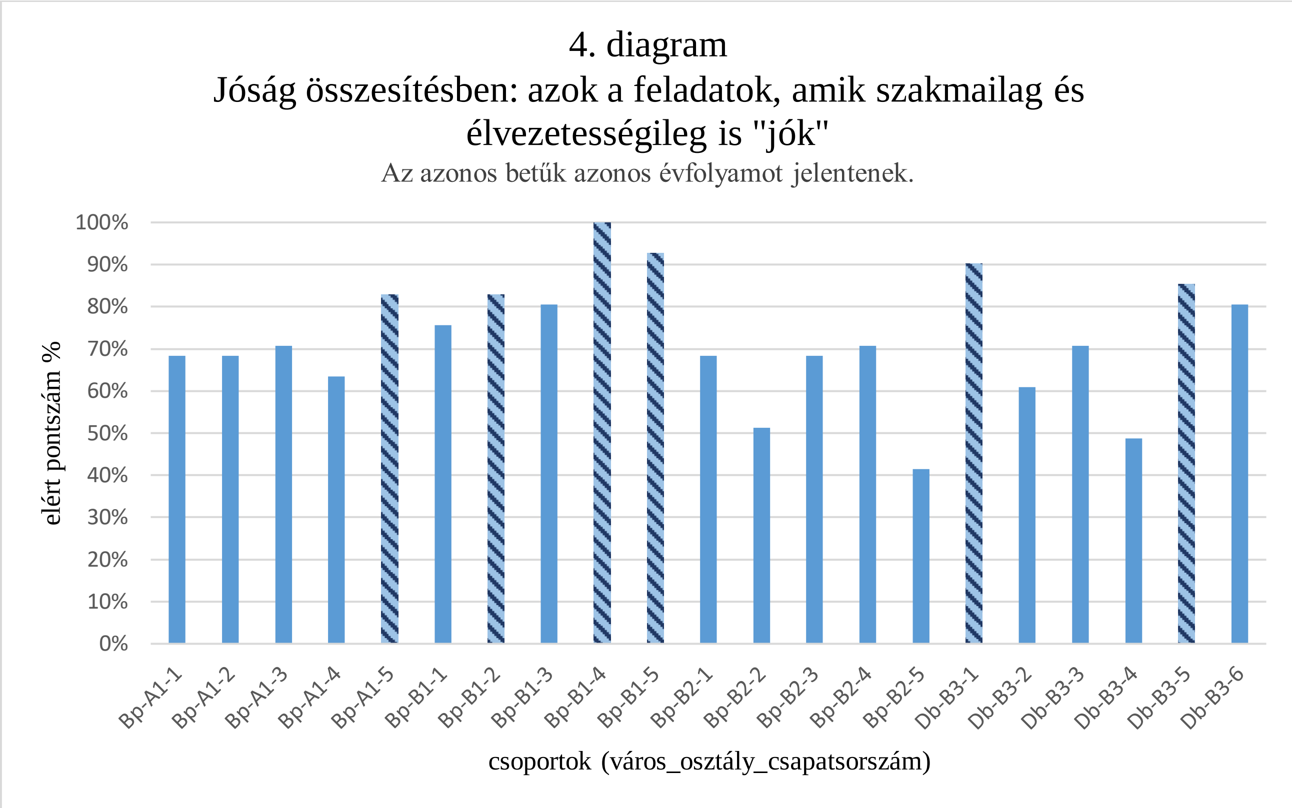


A következő három diagram (2., 3., 4. diagram) azt mutatja meg, milyen eredményekkel és hány csoport ért el „jó" kategóriát szakmaiság és élvezetesség szempontjából, és összesítésben.

Az oszlopokban az elért százalékos eredmény látható. A csíkos oszloppal jelölt csapatok érték el a jóság meghatározott szintjét.







4. diagram
Jóság összesítésben: azok a feladatok, amik szakmailag és élvezetességileg is "jók"
Az azonos betűk azonos évfolyamot jelentenek.

Az alábbiakban bemutatunk néhány, a kutatásban résztvevő diákok által készített feladatot. Ki fogunk emelni néhány típushibát és gyakori témakört is.

Gyakori hiba volt, hogy a feladat készítői egyértelműnek vettek olyan feltételeket, amiket nem írtak bele a feladat szövegébe. Ezt a hibát valószínűleg azért nem vették észre, mert a feladathoz készített saját megoldásuknál ők felhasználták ezeket a feltételeteket is. Erre példa a következő feladat, ahol a feladat készítője egyértelműnek vette, hogy egy olyan függvény, melynek két zérushelye és egy maximumértéke van, kizárólag egy parabola lehet.

> Dani nagyon profi futópályát épített, mindenki szeretné kipróbálni, már-már turistalátványosság lett, ezért Daninak ki kellett találnia valami szabályt arra, hogy kik használhatják a pályáját. Csak azok léphetnek be, akik ábrázolni tudják azt a függvényt, amelynek a két zérushelye 1 és az 5, és a maximuma 8. Te is nagyon szeretnél Danival futni, de vajon sikerül megoldanod a feladatot?

Itt látható a feladatot kitaláló csapat saját megoldása:

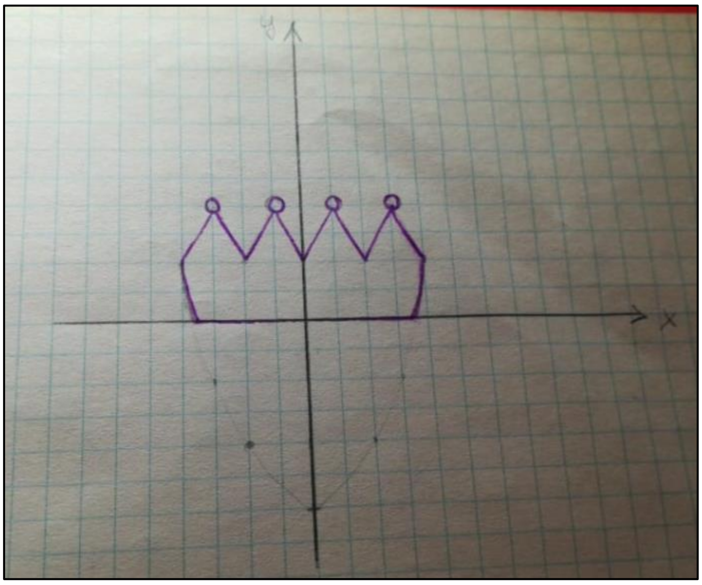
R -> R
Két zérushely: 1; 5, számtani közepük: 3, maximum: 8
X = 3 -> Y = 8
$a(x-1)(x-5)=0$ //a zérushelyek miatt
$a(3-1)(3-5)=8$
$-4a=8$
$a=-2$
$-2(x-1)(x-5)=0$
$f(x)=-2(x^2-3)+8$ ezt a függvényt kell ábrázolni

A megoldásból látszik, hogy a feladatot kitaláló csapat egy másodfokú függvényt szeretett volna ábrázoltatni, viszont ezt a kritériumot kihagyták a feladat leírásából.

Születtek nagyon kreatív és ötletes feladatok. Ezek közül mutatunk be kettőt az alábbiakban.

Ábrázold egy koordináta rendszerben a következő függvényeket!
$f(x)=||||2|x|-2|-2|-2|-2|+2$ $x \in [-4;-2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3};4] / \{-3;-1;1;3\}$
$g(x)=0{,}5x^2-6$ $x \in [-4;4]$
$h(x)=0$ $x \in [-2\sqrt{3};2\sqrt{3}]$

Ha jól dolgoztál akkor megkapod hogy milyen vírus tombol világszerte.



Ez a feladat nagyon kreatív, látszik, hogy a csapat tényleg dolgozott azon, hogy ötletes, újszerű feladatot alkossanak. A feladat leírásában a gyökjelek nem tökéletesen olvashatóak, azonban ez inkább informatikai nehézségekből adódhat.

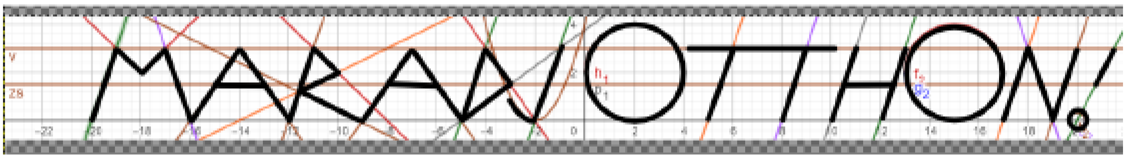
A másik nagyon ötletes, alaposan kidolgozott feladat, melyet bemutatunk, egy olyan feladat, aminek megoldása hosszú időt vesz igénybe. Emiatt nem feltétlenül praktikus bevinni tanórára. Azonban például szorgalmi feladatnak, vagy a GeoGebra használatának gyakorlására nagyon jó, és érdekes példa.

Furcsa üzenetek érkeztek az űrből a koronavírus megfékezésére. A te feladatot, hogy megfejtsd, és megmentsd az emberiséget! Mi az üzenet tartalma? (Próbáld meg ábrázolni.)

Függvény	ÉK	ÉT
a(x)=3x+60	(-20)-(-19)	0-3
á(x)= |x+18|+2	(-19)-(-17)	2-3
b(x)=-3x-48	(-17)-(-16)	0-3
c(x)=-3/2|x+14|+3	(-16)-(-12)	0-3
cs(x)=1.5	(-15)-(-13)	1.5
d(x)=3x+36	(-12)-(-11)	0-3
e(x)=-x-8	(-11)-(-10)	2-3
é(x)=-1/2x-4.6	(-11,6)-(-9,2)	1,5-2
f(x)=1/2x+7	(-11,6)-(-10)	0-1,5
g(x)=1,5	(-8)-(-6)	1,5
gy(x)=-3/2|x+7|+3	(-9)-(-5)	0-3
h(x)=3x+15	(-5)-(-4)	0-3
i(x)=-3/2x-3	(-4)-(-3)	1,5-3
j(x)=1.5/2x+3.75	(-5)-(-3)	0-1,5
k(x)= (x+2)^2	(-3)-(-2)	0-1
l(x)=3x+6	(-2)-(1)	0-3
m(x)=2+ sqrt(4- (x-2)^2)	0-4	0-4
n(x)=2- sqrt(4- (x-2)^2)	0-4	0-4
ny(x)=3	4,5-10,5	3
o(x)=3x-15	5-6	0-3
p(x)=3x-24	8-9	0-3
q(x)=3x-30	10-11	0-3
r(x)=1.5	10,5-12,5	1,5
s(x)=3x-36	12-13	0-3
t(x)=2+ sqrt(4- (x-15)^2)	13-17	0-4
ty(x)=2- sqrt(4- (x-15)^2)	13-17	0-4
u(x)=3x-51	17-18	0-3
v(x)=-3x+57	18-19	0-3
w(x)=3x-57	19-20	0-3
y(x)=2x-40	20-21	2-3
z(x)=-sqrt((1)/(10)- (x-20)^2)	20-sqrt(1/10)-20+sqrt(1/10)	0-sqrt(1/10)
zs(x)= sqrt((1)/(10)- (x-20)^2)	20-sqrt(1/10)-20+sqrt(1/10)	(-sqrt(1/10))-0

Furcsa üzenetek érkeztek az űrből a koronavírus megfékezésére. A te feladatot, hogy megfejtsd, és megmentsd az emberiséget! Mi az üzenet tartalma? (Próbáld meg ábrázolni.)

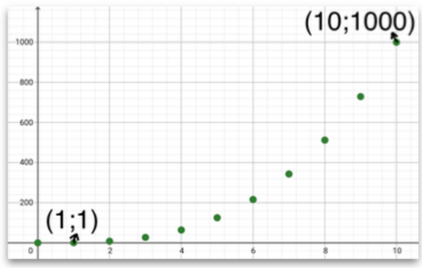
	Függvény	ÉK	ÉT
M	a(x)=3x+60	(-20)-(-19)	0-3
	á(x)= |x+18|+2	(-19)-(-17)	2-3
	b(x)=-3x-48	(-17)-(-16)	0-3
A	c(x)=-3/2|x+14|+3	(-16)-(-12)	0-3
	cs(x)=1.5	(-15)-(-13)	1.5
R	d(x)=3x+36	(-12)-(-11)	0-3
	e(x)=-x-8	(-11)-(-10)	2-3
	é(x)=-1/2x-4.6	(-11,6)-(-9,2)	1,5-2
	f(x)=1/2x+7	(-11,6)-(-10)	0-1,5
A	g(x)=1,5	(-8)-(-6)	1,5
	gy(x)=-3/2|x+7|+3	(-9)-(-5)	0-3
D	h(x)=3x+15	(-5)-(-4)	0-3
	i(x)=-3/2x-3	(-4)-(-3)	1,5-3
	j(x)=1.5/2x+3.75	(-5)-(-3)	0-1,5
J	k(x)= (x+2)^2	(-3)-(-2)	0-1
	l(x)=3x+6	(-2)-(1)	0-3
O	m(x)=2+ sqrt(4- (x-2)^2)	0-4	0-4
	n(x)=2- sqrt(4- (x-2)^2)	0-4	0-4
TT	ny(x)=3	4,5-10,5	3
	o(x)=3x-15	5-6	0-3
	p(x)=3x-24	8-9	0-3
H	q(x)=3x-30	10-11	0-3
	r(x)=1.5	10,5-12,5	1,5
	s(x)=3x-36	12-13	0-3
O	t(x)=2+ sqrt(4- (x-15)^2)	13-17	0-4
	ty(x)=2- sqrt(4- (x-15)^2)	13-17	0-4
N	u(x)=3x-51	17-18	0-3
	v(x)=-3x+57	18-19	0-3
	w(x)=3x-57	19-20	0-3
!	y(x)=2x-40	20-21	2-3
	z(x)=-sqrt((1)/(10)- (x-20)^2)	20-sqrt(1/10)-20+sqrt(1/10)	0-sqrt(1/10)
	zs(x)= sqrt((1)/(10)- (x-20)^2)	20-sqrt(1/10)-20+sqrt(1/10)	(-sqrt(1/10))-0



A diákokat, érthető okokból, nagyon foglalkoztatta a koronavírus-járvány, ezzel kapcsolatosan számos feladat született. Ezek közt voltak, amik komolyabban foglalkoztak a járványterjedéssel és annak matematikai modellezésével, és voltak olyanok is, amik csak ihletet merítettek az új koronavírus és a járványügyi korlátozások adta új helyzetből.

Ilyen feladatokra is mutatunk néhány példát, a fentieken túl is. Elsőként egy kilencedikes csoport feladatsorát mutatjuk be, amit a járványterjedés és néhány korábban megoldott Zrínyi versenyfeladat ihletett.

1. Sajnos Zedországba is eljutott a koronavírus. Az ország 8000 lakosa nagyon aggódott a vírus miatt, mivel az 1. fertőzött megjelenése előtt pár nappal volt az egész országban népszerű Zednap, amit a lakók közösen ünnepelnek minden évben. Itt látható, a vírus hogyan terjedt napról napra Zedországban az első 10 nap folyamán:

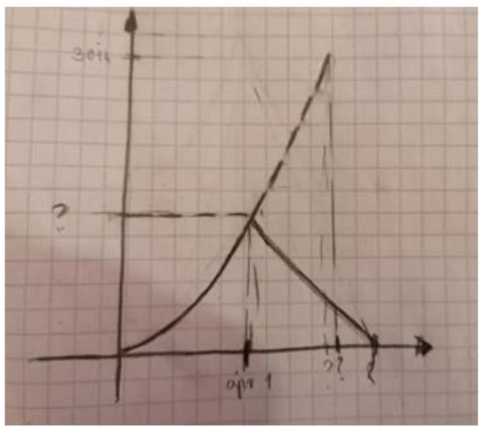


(x tengely: eltelt napok száma, y tengely: betegek száma)

A fertőzés 10. napján megérkezett az ellenszer Bergengóciából. A 15. napra el is készült az elegendő mennyiségű ellenszer és így még aznap elkezdhették beadni a betegeknek. Az ellenszer beadása hasonló ütemben folyt mint a vírus terjedése, (tehát az 1. nap 1 ember, a 10. nap 1000 ember kapta meg). A lakosok mind megkapták az ellenszert és immunissá váltak. A zedországi egészségügy fejlettsége, és az ott lakók egészséges életmódja miatt pedig senki nem halt bele a járványba.

a) Milyen függvénnyel írható le az első 10 nap alatt a fertőzöttek számának növekedése?
b) Hány nap alatt fertőződött volna meg az egész lakosság, ha Bergengóciából nem érkezik ellenszer, és a terjedés üteme változatlan marad?
c) Hanyadik napon kapta meg az ellenszert Zedország összes lakója?
d) Ha az ellenszert először a nem fertőzöttek kapták meg, összesen hány lakó kapta el végül a vírust? (Egy nap folyamán először megkapják az ellenszert a lakók, majd utána fertőz csak meg újabbakat a vírus)

2. Sajnos Csodaországba is eljutott a koronavírus, ami az ország kicsiny lakosság miatt (3182 fő) miatt gyorsan terjed. Érdekes módon, hogy az aznapi dátum számjegyeinek összegének négyzetével nő a fertőzöttek száma. A fertőzés március 16-án kezdődött az országban (ez azt jelenti, hogy 15-én 0 darab fertőzött volt). Ezen a napon (március 16) a fertőzöttek száma (0+3+1+6)2 azaz 100 fő. Április 1-jén Bergengóciából megjött az ellenszer, így nem lettek új fertőzöttek és naponta 43 embert meg tudtak gyógyítani.



a) Mi a hiba a grafikonban?

b) Hányan ne kapták el a vírust?

c) Hányadikára lesz a fertőzöttek száma 0? (március 15 és az előtti dátum nem érvényes)

d) Ha nem érkezett volna ellenszer hányadikára kapta volna el az ország összes lakosa a vírust?

3. Bergengóciában rájöttek, a korona vírus ellenszerére. Ennek az előállításához 3 dolog kell: aborka, dizsi és cirit. Szerencsére a 3 lelőhelyet egy hosszú út egyenesen összeköti. Hova kéne építeni a gyárat, ha azt a helyet keressük ,amivel a leggazdaságosabban ki lehet jönni üzem anyaggal? A 3 lelőhelynek a távolsága Bergengóciától mérve kilométerben:

- aborka bánya: 30km
- cirit bánya: 180km
- dizsi föld: 60km

A feladatot próbáljuk meg ábrázolni függvényen is!

4. Sajnos Tündérországba is eljutott a koronavírus. Ebben az országban három féle lény él lovagok, tündérek és sárkányok. A tündérek már az elsőre, a lovagok a másodikra, míg a sárkányok csak a harmadik fertőzésre immunisak (ez azt jelenti, hogy minden lovag elkapja egyszer, és minden sárkány kétszer, kivéve ha az elsőbe belehalnak) Sajnálatos módon ebbe az országba nem tudtak ellenszert szállítani, mivel az összes lakos allergiás az aborkára, így rengeteg élőlény belehalt a fertőzésbe. A lovagok egy ötöde halt bele a vírusba míg a sárkányok egy tizede élte túl az első fertőzést és az életben maradók egy tizede élte túl a másodikat. Összesen 250 túl élő volt ebből száz tündér.

Mennyi lehetett a lakosság száma a vírus előtt, ha ez a

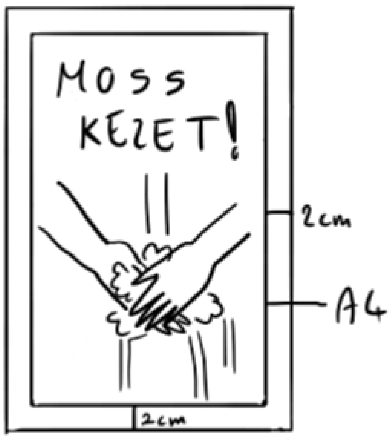
a) lehető legkisebb?

b) lehető legnagyobb?

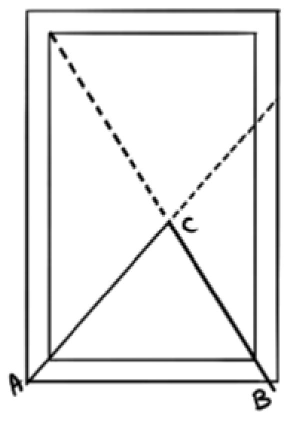
A következő, szintén ebből az osztályból származó feladat más oldalról közelíti meg a szituációt:

3. Pistike rajzolt egy posztert otthonra, hogy felhívja családtagjai figyelmét a rendszeres kézmosásra.

A poszter:



Az anyukája nem "hisz" a koronavírusban és megbűntette Pistikét. Kivágott egy háromszöget (ABC) a rajzból következő módon:



Pistike elővesz egy új lapot (a nagyobbikból) és ráhelyez egy A4-es lapot az eredeti poszter alapján, és ki akar vágni egy ABC-vel azonos háromszöget. Pistike vonalzóval lemérte a háromszög oldalai, de nincs szögmérője. Segíts neki kiszámolni, hogy milyen szögben kell vágnia a papírt.

Szintén a koronavírus-járvány és a járványügyi korlátozások ihlették ezt a feladatsort:

1.

Amerikai orvostanhallgató vagy, mikor kitör a koronavírus járvány. Az összes hőmérőd tönkrement, ám a fizika karról tudtál szerezni egy utolsót, ami kelvinben mér.

a) A celsius-fahrenheit átváltás: (C*9/5) + 32 = F

A celsius-kelvin átváltás: C + 273,15 = K

Add meg azt az egyenletet, amivel kelvinből fahrenheitbe tudsz átváltani!

b) Add meg azt a függvényt, amivel 1-et rendelsz azokhoz a hőmérsékletekhez, amik túllépik a 100,4 fahrenheitet (lázas), és 0-át azokhoz, amik nem! (Az x kelvinben legyen!)

c) Az alábbi számok potenciális fertőzöttek testhőmérsékletei kelvinben. Válogasd ki közülük a lázasokat!

308,35; 310,15; 310,75; 311,05; 310,35; 311,75; 312,15; 314,55; 309,65; 308,15

+1) Add meg a fenti testhőmérsékeleteket fahrenheitben!

2.

A távoktatás ideje alatt a matektanárod ezt a matekfeladatot adta fel. Ahhoz, hogy ne bukj meg év végén matematikából oldd meg ezt a feladatot!

Az f : R→ R olyan függvény, amely minden valós x és y esetén teljesíti az

f (x+y)= f(x) + f(y) + 80 xy összefüggést, és f (0.25)=2 is fennáll.

Mennyi lehet f (2)-nek biztosan értéke?

Tizedik évfolyamon született a következő két feladat:

1. Debrecen lakossága 202560 fő. Sajnos egy Milánóból hazatérő férfi hordozza magával a koronavírust, és azt elterjesztette a reptéren. Ez a vírus naponta 3-szor annyi emberre terjed tovább. (Az 1. nap csak egy fertőzött van.)

a; Hány nap alatt fertőződik meg az összes lakos?

b; Egy gyógyszer segítségével naponta 20 embert meg tudnak gyógyítani, de ezt csak két héttel a vírus elterjedése után találták fel. Így hány napba telik mire megfertőződik mindenki?

3. A karanténban töltött idő mindenkit nagyon megvisel. Sok házasság az ilyen időkben megy tönkre. Egy bérházban 50 pár él. Minden férfi tudja, hogy a többiek közül melyik nő csalja a férjét, csak azt nem tudja, hogy az ő felesége hűséges-e hozzá. Egyik nap érkezett egy levél az Operatív Törzstől, hogy legalább 1 nő a lépcsőházból csalja a férjét, ami elfogadhatatlan, mert így a vírus sokkal gyorsabban terjed. Arra kérték a férfiakat, hogy aki megtudja, hogy hűtlen a felesége az akassza fel a bejárat ajtóra, hogy mindenki láthassa, de egymással ne beszéljenek. Az első nap senkit sem akasztanak fel, se a 2., se a 3. nap. A 10. nap viszont több holttest lóg a lépcsőházban. Hány nő csalja a férjét?

A tapasztalt olvasó persze sok feladatban észrevehet hibákat, vagy felismerheti néhány feladat forrását, azonban ezeket a feladatokat általában ötletes beöltöztetésűnek találtuk, és jól megmutatják, mi foglalkoztatta a diákokat a 2019/20-as tanév második félévében.

A hozzánk beérkezett feladatok közül volt néhány, melyek szinte teljes egészében valahonnan kimásolt feladatok. A lehetséges problémafelvetési-feladatkészítési stratégiák között szerepelt ugyan a feladatvariálás, ez azonban többet jelent annál, mint néhány főnév kicserélése (például alma helyett körte, vagy sportnap helyett tanulmányi verseny). Valódi feladatvariáláskor valamilyen új problémának vagy matematikafeladatnak kellene létrejönnie. A következő feladat, melyet bemutatunk, egy olyan feladat, amit lényegében szó szerint kimásolt valahonnan a csapat.

Zedország neves iskolájában, a fiúk és a lányok aránya 2:3. Az iskolában egy pénteki napon tudományi versenyt tartottak, amelyen 52 fiú nem vett részt. Ezen a diákok 75% jelent meg, ahol a fiúk és lányok aránya 4:5.

Hány lány jár az iskolába?

Szinte teljes mértékben ugyanez a feladat megtalálható az interneten. A példa szerepelt a 2019/20-as próbafelvételi feladatsoron, ami a következő linken érhető el: http://probafelveteli.hu/wp-content/uploads/2020/08/MATEMATIKA-FELADATLAP_2019.pdf

A megoldási útmutatója pedig itt szerepel: http://probafelveteli.hu/wp-content/uploads/2020/08/MATEMATIKA-%C3%9ATMUTAT%C3%93_2019.pdf

A diákok a feladatban csupán néhány szót változtattak meg, viszont a számokat teljesen megtartották. Ennek következtében a feladat beöltöztetése alig, a számolás menete pedig egyáltalán nem tér el a próbafelvételi feladatsoron szereplőtől.

Számos feladatsorhoz a diákok leírták, hogyan készült a feladatsor, vagy milyennek találták a problémafelvetési-feladatkészítési tevékenységet. Nagyon tanulságos és néhol szórakoztató is volt olvasni ezeket a visszajelzéseket. Ezek közül is megmutatunk néhányat.

Elemzés

A feladataink témáját az aktuális események inspirálták.

Az első feladatnál közösen találtuk ki, hogy hőmérsékletek átváltásával foglalkozzunk. A második feladatot .... által már korábban megoldott feladatok mintájára készítettük el. Szerettünk volna egy kis játékosságot is csempészni a feladatsorunkba, és így jött létre a harmadik feladatunk. A 4-es feladat szintén már megoldott feladatok példáján alapszik.

Összességében gyorsan kitaláltuk a feladataink témáját, a megoldások pontos leírása vett igénybe több időt. A csapatmunka jól működött, eredményesen tudtunk együtt dolgozni.

Inspirációk:

1. Egy Zrínyi feladat és a korona vírus
2. Ország neveit szintén, Zrínyi feladatból vettük a többi .... fejéből jött ki.
3. Nagyon nem jutott eszembe semmi, aztán hirtelen eszembe jutott, hogy csináltam egy feladatot, amit bele lehet illeszteni a történetet. Átirtam pár dolgot hogy függvényekhez kapcsolodjon és ki cseréltem a számokat hogy stimmeljenek.
4. Ezt a feladatot is .... találta ki.

1.forduló: Összegzés: A tervünk először az volt, hogy a feladatokban a közös a sport lesz, azonban miután megírtuk az első feladatot, rájöttünk, hogy Dani élete, valamint a futás szeretete is lehetne a témája feladatoknak, mert így a matekba bele tudunk vinni egy kis humort. Emlékeztünk a telkes feladat megoldásának szépségére, így úgy gondoltuk, hogy kezdhetnénk Dani „futótörténetét” azzal, hogy megépíti a futópályát. Miután megépítette ezt, tovább gondoltuk, hogy hogy lehetne egy hétköznapi történetbe matek feladatokat illeszteni, és arra jöttünk rá, hogy lehetne egy matek feladat a belépő a futópályára. Mivel mindenki kap egy papírt belépőnek, így a függvényrajzolás teljesen kivitelezhető. A harmadik feladatra egy kicsit alábbhagyott a kreativitásunk, így egy kicsit erőltetett lett az a feladat, hogy az anyukája kéri meg, hogy csinálja meg a matekháziját, de nem megy neki. Azonban szerintünk mindenki el tudja képzelni ezt az élethelyzetet, és mindenki segíteni fog Daninak megoldani a harmadik feladatot. A negyedik feladatnál abban mindnyájan egyetértettünk, hogy egyenleteket szeretnénk feladni, amelyeknek a megoldásához kell használni a másodfokú megoldóképletet. Az volt a probléma, hogy nagyon nehéz volt egy ilyen feladatot Danihoz, valamint a futáshoz kötni, ezért a feladat szövege nem lett a legjobb. Azonban úgy gondoljuk, hogy a feladatoknál végig tartottuk magunkat a célhoz, és amit eldöntöttünk a legelején, azt nem változtattuk meg, és szerintünk ez számít. A feladatok elkészítését élveztük, izgalmas volt betekintést nyerni a tanári élet egyik szakaszába.

A hozzánk beérkezett feladatok általunk elvégzett pontozását összevetettük a szaktanárok, és a diáktársak által beküldött pontozásokkal is. A szaktanárok általában nagyon jóindulatúan pontozták a diákok feladatait. A legtöbb feladat sok pontot ért el, és a kevésbé jó feladatokra is igyekeztek sok részpontot adni. A tanároktól a folyamat közben, és utána is kaptunk visszajelzést a tapasztalataikról. Ezekből kiderült, hogy azért igyekeztek mindenki munkáját sok ponttal jutalmazni, mert a saját feladatsor készítése egy nagyon újfajta tevékenység volt a diákok számára. Ezen kívül mindannyian egyetértettünk abban, hogy ez nem egy olyan feladat volt, amelynél célravezető a nagyon szigorú osztályzás, hiszen a diákok először vettek részt ilyesfajta tevékenységben, és nem célunk elrettenteni vagy büntetni őket. Ezzel szemben a diákok nagyon szigorúak voltak egymáshoz. A legtöbb esetben egy-egy kicsit pontatlan, vagy kicsit kevésbé izgalmas feladatra is nagyon kevés pontot adtak társaiknak. A tanulók értékelései alapján egymás feladatait főleg tananyaghoz való kapcsolódás és élvezetesség/ötletesség szempontjából találták jónak.

6. Összegzés

A 2019/20 tanév tavaszi félévében végeztünk egy kísérletet, mely során egy általunk kidolgozott módszer segítségével középiskolás korú diákok a távolléti oktatásban problémafelvetéssel és feladatkészítéssel foglalkozhattak.

Négy résztvevő iskola kilenc csoportjával (ezek osztályok vagy félosztályok) zajlott a kutatás. A diákok által elkészített feladatokat szaktanáraik, és saját osztálytársaik is pontozták különböző, általunk meghatározott szempontrendszerek alapján. A dolgozat megírásáig két iskola négy csoportjából kaptuk meg a diákok által elkészített feladatokat. Ezeket egy általunk kidolgozott szempontrendszer szerint mi is értékeltük. Mind a három szempontrendszer összeállításában alapoztunk több szakirodalom szempontjaira (Rosli et al. 2015; Silver 1994; Papadopoulos, Patsiala 2020) valamint a korábbi TDK dolgozatainkban használt pontozási rendszerekre, melyeket tovább finomítottunk és pontosítottunk (Rékasi, Stirling 2018, 2019).

Összességében megfigyelhető, hogy a diákok feladatai között voltak nagyon jól sikerültek, de voltak olyanok is, akik szó szerint kimásoltak valahonnan egy-egy feladatot. Születtek nagyon vicces feladatok is, volt, ahol nagyon jól látszott, hogy a tanulók nagyon élvezték, hogy belevihetik kreativitásukat a feladatkészítésbe.

Blomqvist és Gade (Blomqvist, Gade, 2015) által Svédországban vizsgált általános iskolás diákok egyik feladatában szerepel egy 1337 km hosszú hot dog, különböző mesefigurák, vagy gengszterek és FBI ügynökök csatái. Hasonlóan a magyar diákoknál is megjelentek mesei elemek, vagy valamilyen valós szituáció abszurd átformálása, például az egymást megcsaló házastársak ajtóra akasztása, vagy éppen Tündérország. A valós események is nagymértékben hatottak mind a magyar, mind a svéd diákok problémafelvetésére. Itthon a koronavírus-járvány vagy a járvány miatti korlátozások mozgatták meg nagyon a diákok fantáziáját, a svéd gyerekeket pedig Barack Obama és az amerikai elnökválasztás.

A feladatok részletes megvizsgálása és a tanárokkal való beszélgetéseink alapján úgy gondoljuk, a kísérlet sikeres volt. Mindenképpen meg kell azonban említenünk néhány hiányosságot, vagy hátulütőt, amik nem az eddig elvégzett munka értékét veszik el, inkább megmutatják, milyen irányokba érdemes tovább haladnunk, és fejlesztenünk a kísérletet.

A tavasszal beérkezett feladatok mind „elit" iskolák diákjai által készített feladatok voltak. Így a mostanáig vizsgált (a debreceni és budapesti Fazekas Gimnáziumokból érkezett) feladatokat motivált, a matematika iránt nagyon érdeklődő diákok készítették, akik országos szinten kiemelkedő képességűek, és közülük több csoport emelt óraszámban tanul matematikát. Ennek következtében még nem tekinthető teljeskörűnek a vizsgálat, de vettek részt a kutatásban nem elit gimnáziumban tanuló diákok is, akik feladatait a későbbiekben még vizsgálni fogjuk. Az általunk megalkotott szempontrendszert így is lehetőségünk volt kidolgozni, kipróbálni, majd pontosítani és láthattuk, hogy valóban azok a feladatok érnek el jó eredményt, amiket az előzőleg megbeszélt szempontok alapján jónak tartunk.

Több csapat esetében is előfordult, hogy olyan feladatokkal dolgoztak, melyeket valahonnan átvettek. Ez alapvetően nem baj, amennyiben ügyesen, újszerűen, ötletesen átalakítják, átdolgozzák ezeket. Ilyen esetekben beszélhetünk feladatvariálásról. Azonban néhány esetben a diákok teljesen kimásoltak egy feladatot valahonnan. Ezt tanárként nem mindig könnyű felismerni, hiszen egyetlen tanártól sem várható el, hogy minden létező feladatot ismerjen és felismerjen.

A feladatok áttekintése és értékelése után elmondhatjuk, hogy a felső tagozatos, és a középiskolás korú diákok többsége is tud csapatban legalább egy-egy jó feladatot készíteni, ahogyan a matematika tanárszakos hallgatók is (Rékasi, Stirling, 2018, 2019). Voltak olyan csapatok, akiknek minden feladata színvonalas, ötletes és kreatív volt, viszont olyan csapatok is voltak, akik teljesen komolytalan módon összecsapták a feladataikat. A korábbi, matematika tanárszakos hallgatókkal végzett kutatások tapasztalata is az volt, hogy a hallgatók többsége (akár egyénileg, akár csapatban dolgoztak) tud legalább egy jó feladatot készíteni. Általában a legtehetségesebb hallgatók több jó feladatot is készítettek, de sokan sajnos összecsapott vagy matematikailag nem megfelelő feladatokat is készítettek.

Ezek alapján elmondhatjuk, hogy a középiskolás korú diákok problémafelvetési képessége, a matematika tanárszakos hallgatókéhoz hasonlóan (Rékasi, Stirling 2018, 2019)

Fejlesztendő, de nem reménytelen!

Irodalom

(1.) https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tavoktatas/probfelv.pdf (utoljára megnyitva: 2020. 11. 02.)

(2.) Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szeibert Janka (2019). *Modellezési problémák – avagy az öltöztetés veszélyei*. TDK-dolgozat.

(3.) https://web.cs.elte.hu/~csaba/tdk/tdk2019/Modellezesiproblemak.pdf (utoljára megnyitva: 2020. 11. 02.)

(4.) MIND2020 konferencia, Ioannis Papadopoulos: *Navigating in the diverse landscape of problem posing*. https://sites.google.com/site/midk2016jan/plenaris-eloadok/abstract (utoljára megnyitva: 2020. 11. 02.)

Belfield, H. H. (1887). *Revised model elementary arithmetic*. Chicago, IL: Geo. Sherwood.

Bonotto, Cinzia & Santo, Lisa. (2015). *On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School*. 103-123. 10.1007/978-1-4614-6258-3_5.

Blomqvist, Charlotta & Gade, Sharada (2015). *From Problem Posing to Posing Problems via Explicit Mediation in Grades 4 and 5*. 195-213. 10.1007/978-1-4614-6258-3_9.

Cai, Jinfa & Hwang, Stephen & Jiang, Chunlian & Silber, Steven. (2015). *Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions*. 10.1007/978-1-4614-6258-3_1.

Duncker, K. (1945). On problem solving. Psychological Monographs (Vol. 58). New York, NY: American Psychological Association.

Ellerton, Nerida F. & Singer, Florence & Cai, Jinfa. (2015). Problem Posing in Mathematics: Reflecting on the Past, Energizing the Present, and Foreshadowing the Future. 547-556. 10.1007/978-1-4614-6258-3_26.

Leung, Shuk-kwan. (1997). *On the role of creative thinking in problem posing*. ZDM. 29. 81-85. 10.1007/s11858-997-0004-9.

Kontorovich, Igor & Koichu, Boris & Leikin, Roza & Berman, Avi. (2016). *Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they?*. 120-125. Proceedings of the 6th International Conference Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students (pp. 120-125). Latvia: Latvia University

Kovács Zoltán (2017). *Mathematics Teacher Trainees Facing The „What-If-Not" Strategy – a case study.* In: András, Ambrus; Éva, Vásárhelyi (szerk.) Problem Solving in Mathematics Education Proceedings of the 19th ProMath conference August 30 - September 1, 2017 in Budapest. Budapest, Magyarország : Haxel kiadó, (2018) pp. 68-81. , 14 p.

Nadjafikhah, Mehdi & Yaftian, Narges & Bakhshalizadeh, Shahrnaz. (2012). *Mathematical creativity: Some definitions and characteristics*. Procedia - Social and Behavioral Sciences. 31. 285–291. 10.1016/j.sbspro.2011.12.056.

Papadopoulos, Ioannis & Patsiala, Nafsika. (2020). *Capturing Problem Posing landscape in a grade-4 classroom: A pilot study.* Conference paper.

Pintér Klára (2012): *A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról*. Doktori disszertáció

Pólya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2018): *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési és problémamegoldási készségeinek összehasonlítása.* TDK dolgozat

Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2019): *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési képességeinek vizsgálata fejlesztési céllal.* TDK dolgozat

Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2020): *Problémafelvetési és feladatkészítési képességek vizsgálata és fejlesztése matematikaórán*. TDK dolgozat.

Rosli, Roslinda & Capraro, Mary & Goldsby, Dianne & Gonzalez, Elsa & Capraro, Robert & Onwuegbuzie, Anthony. (2015). *Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing*. 10.1007/978-1-4614-6258-3_16.

Silver, E. A. 1994. *On mathematical problem posing.* – In: For the Learning of Mathematics 14(No.1), p. 19-28.

Xia, X., Lu, C., & Wang, B. (2008). *Research on mathematics instruction experiment based on problem posing*. Journal of Mathematics Education, 1, 153-163.

Mellékletek

1. melléklet:

Szakmai rész	**pont**	**Részletek**				
Valamilyen Tananyaghoz illő	8 pont	Teljesen jól beilleszthető valamilyen tananyagba, nem kell változtatni rajta (8pont)	Beilleszthető a tananyagba, esetleg számok kicserélésével, de akár így is (6-7pont)	Kisebb változtatásokkal, esetleg picike pontosítással bevihető órára is (3-5 pont)	Nem igazán tudnám bevinni órára, de azért látom, hogy hova szerette volna elhelyezni (1-2pont)	Semmilyen tananyaghoz nem illeszkedik (0pont)
Nehéz/könnyű (kihívás)	4 pont	Pont jó kihívást jelent, nem túl nehéz, de nem is unalmas (4 pont)	-	Kicsit túl könnyű, vagy kezd túl bonyolulttá válni (2-3pont)	-	Túl könnyű, vagy túlontúl nehéz (0-1 pont)
Matematikailag helyes	8 pont	Matematikailag teljesen korrekt (8 pont)	Vannak benne apróbb matematikai pontatlanságok, de érthető, hogy mit szeretett volna (5-7pont)	Úgy tűnik, hogy a beöltöztetés eléggé elrontotta a feladat matematikáját, de alapvetően jó lenne (3-4pont)	Matematikailag elég pontatlan, de azért látszik, hogy nem teljesen rossz (1-2pont)	Teljesen hibás matematikailag (0pont)

Korosztályhoz illő	5 pont	A megjelölt korosztály számára ideális, bevihető, feladható (5pont)	Kicsit nehéz még, de körülbelül eltalálta a szintet (4pont)	Nehéz, vagy túl könnyű a korosztálynak, de azért van olyan osztály, ahova be lehetne vinni kicsi változtatásokkal (2-3pont)	-	- Nem igazán lehet bevinni a korosztálynak, mert túl nehéz *vagy* - Teljesen át kellene variálni (0-1pont)

(5. táblázat)

Élvezetességi rész	**pont**	**Részletek**				
Újszerű/eredeti /ötletes	6 pont	- Nagyon ötletes *vagy* - Nagyon ötletesen alakított át egy általa már ismert/látott feladatot (6pont)	Újszerű (4-5pont)	- Nem nagyon ötletes, de azért látszik, hogy próbálkozott *vagy* - Lehet, hogy ő szereti ezt a típust, de nem igazán kreatív (3pont)	Meglehetősen tucatfeladat, de próbálta kicsit megváltoztatni, inkább kevesebb mint több sikerrel (1-2pont)	Egyáltalán nem ötletes, teljes mértékben tucatfeladat (0pont)

Matematikai élmény	6 pont	- Nagyon élményszerű a megoldása *vagy* - Valamilyen nagyon újszerű matematikai ötlet kell hozzá (6 pont)	Újszerű ötlet kell hozzá (4-5pont)	- Nem nagyon újszerű a matematikai élmény, de azért látszik, hogy próbálkozott (3pont)	Próbálkozott kicsit élményszerűvé tenni, de nem igazán sikerült (1-2pont)	Egyáltalán nem nyújt matematikai élményt a megoldása (0pont)
Beöltöztetés	6 pont	Jól van beöltöztetve (6pont)	- Beöltöztetgette, de kicsit rossz *vagy* - kicsit elromlott valamitől (például: attól, hogy túlbonyolította) (5 pont)	- Nem nagyon öltöztette be, de azért látszik, hogy próbálkozott *vagy* - Elromlott a beöltöztetés valamitől (2-4pont)	- Meglehetősen rosszul van beöltöztetve *vagy* - Szinte egyáltalán nincs beöltöztetve (1pont)	- Egyáltalán nem öltöztette be, teljesen csak a konkrét feladatot írta le *vagy* - Nagyon rosszul öltöztette be, teljesen értelmetlen (0pont)

Élvezetességi rész	**pont**	**Részletek**				
Korszerűség	4 pont	Nem korszerűtlen (3-4pont)	-	Korszerűtlen, de nem nagyon (2 pont)	-	- Teljesen korszerűtlen, és nem igazán tehető azzá (0-1pont)

(6. táblázat)

Lezárás dátuma: 2021. 01. 10.