EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

RÉKASI ANNA – STIRLING ANNA KRISZTINA

MATEMATIKA TANÁRSZAKOS HALLGATÓK PROBLÉMAFELVETÉSI KÉPESSÉGEINEK VIZSGÁLATA FEJLESZTÉSI CÉLLAL

MATEMATIKA – FIZIKA OSZTATLAN TANÁRSZAK

TDK

Témavezető:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

TARTALOMJEGYZÉK

Absztrakt

A problémafelvetés képessége, mely a NAT alapkompetenciái között szerepel, a matematikatanárok esetében kiemelten fontos kompetencia. A matematikatanároknak munkájuk során számos olyan helyzet adódhat, mikor előnyös volna saját maguk által kitalált feladatokat készíteniük a diákoknak. Dolgozatunkban az ELTE matematikatanár-szakos hallgatók feladatkészítési képességét vizsgáltuk azzal az elsődleges céllal, hogy ezen kompetencia fejlesztésére ötleteket gyűjthessünk. A felmérésünkben részt vevő diákoknak két fordulóban kellett problémákat, feladatokat készíteniük. Az egyik fordulóban egy adott versenyfeladathoz kellett rávezető feladatsort készíteniük a hallgatóknak, a másik fordulóban pedig adott témára kellett saját feladatokat kitalálniuk. A résztvevő diákokat két csoportra osztottuk, a csoportok különböző sorrendben végezték el a két fordulót. A beérkezett feladatokat egy általunk összeállított szempontrendszer alapján értékeltük, főként eredetiség, ötletesség, valamint következetes felépítés szempontjából. Többek közt kimutattuk, hogy a rávezető feladatsor készítése elősegíti az önálló problémaalkotást, valamint, hogy a résztvevők jelentős része nincs tisztában a középiskolás korú diákok tudásszintjével. Kutatásunk minden részét mi végeztük, kezdve a témaválasztással, egészen a feladatok javításán át az adatok feldolgozásáig.

1. Bevezetés

Dolgozatunk témája a matematika tanárszakos hallgatók problémafelvető és feladatkészítő képessége, valamint ennek néhány lehetséges fejlesztési módja. Ehhez a vizsgálathoz az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika tanárszakos hallgatóival végeztünk egy kísérletet, mely során a résztvevő hallgatóknak különböző keretek között kellett feladatokat készíteniük.

A problémafelvetés képessége a jelenleg hatályban lévő Nemzeti Alaptantervben az alapkompetenciák között szerepel, ebből is látható, hogy a matematikatanárok számára ez kiemelten fontos kompetencia. A NAT szerint "*a matematika célja modellezni az életet, matematikai nyelven megfogalmazni olyan problémákat, melyek visszavezethetők a mindennapi életre*"(1.). Ha a diákoktól elvárhatjuk, hogy képesek legyenek erre, akkor mennyivel inkább elvárhatjuk a matematikatanároktól, akik ezt tanítják, hogy képesek legyenek önállóan feladatokat alkotni.

A matematikatanári gyakorlat során számos olyan helyzet adódik, amikor a pedagógusnak saját problémákat és feladatokat kell készítenie. Nemcsak tankönyvekből, feladatgyűjteményekből adunk problémákat, hanem a diákok tudásának, képességeinek és igényeinek megfelelően időnként ezek mellett, vagy ezek kiegészítéseként saját feladatokat is készítünk. Ezért nagyon fontosnak tartjuk, hogy a tanárszakos hallgatók egyetemi tanulmányaik alatt elsajátítsák ezt a képességet, megtanulják felismerni, majd pedig megalkotni a különböző korosztályok számára alkalmas matematikai problémákat és feladatokat.

Korábbi OTDK dolgozatunkban (Rékasi, Stirling, 2019), melynek témájáról a MIDK2020 konferencián is előadást tartottunk, arra a megállapításra jutottunk, hogy bár a matematika tanárszakos hallgatók között vannak, akik tudnak alkalmazható, érdekes és matematikailag is helyes feladatokat készíteni, a többségnek ez nehézséget okoz. Az általunk akkor vizsgált hallgatóknak nehézséget okozott egynél több jónak mondható feladat készítése, általában nem mertek eltérni a szokványos feladatoktól, vagy rosszul öltöztették be feladataikat.

Ezért jelenlegi kutatásunkban, melyről ezen dolgozatunk is szól, olyan feladatkészítési helyzetbe hoztuk a résztvevőket, ami segítheti a jobb, kreatívabb feladatok készítését. A felmérésünkben részt vevő diákok két fordulóban készítettek problémákat, különböző keretek között. Először a hallgatókat véletlenszerűen két csoportra osztottuk, ez a két csoport különböző sorrendben végezte a kétféle feladatalkotást. Az első csoport az első fordulóban egy általunk megadott listából választott egy versenyfeladatot, majd ehhez a versenyfeladathoz egy 3-5 feladatból álló rávezető feladatsort készített. A rávezető feladatsor feladatait úgy kellett elkészíteni, hogy ezek megoldása mozgósítsa azokat az ismereteket, készségeket, amelyek segítségével egy középiskolás diák meg tudja majd oldani a feladatot. A rávezető feladatsor célja még, hogy növelje a megoldó adott témakörben való jártasságát és szélesítse látókörét. Nem feladata azonban, hogy felépítse a feladatot, és kis lépésenként előre megoldja azt, hiszen ezzel elvenné a későbbi (verseny)feladat megoldásának örömét. Eközben a résztvevők másik csoportja különböző témákra (például űrutazás, boszorkány) készített saját feladatokat, szintén 3-5 darabot. Ezeknek a feladatoknak egy adott középiskolás korosztályhoz és tudásszinthez kellett szólnia (úgy, mint 9. osztály, normál szint vagy 12. osztály, fakultáció), de bármilyen matematikai témakörhöz készülhettek. A második fordulóban a két csoport a másik típusú feladatkészítést végezte. A fordulók elején általunk kiküldött levelek a mellékletek közt találhatóak (*1., 2., 3., 4. melléklet*).

A beérkezett feladatokat ezután egy általunk összeállított szempontrendszer szerint értékeltük. Az értékelési szempontok főleg a feladatok matematikai helyességét, felépítését, ötletességét vizsgálták. Főbb kérdéseink voltak, hogy a rávezető feladatsor készítése segíti-e a saját önálló feladatkészítést; hogy azok a hallgatók, akik több matematika tanításmódszertani kurzust végeztek, jobb feladatokat készítenek-e; valamint, hogy a csoportmunkában és az egyéni munkában való feladatkészítés eredményességében észrevehető-e különbség.

Több más észrevétel mellett kimutattuk, hogy a rávezető feladatsor készítése valóban elősegíti az önálló problémaalkotást, illetve feladatkészítést. Valószínűleg azért, mert itt a feladatkészítőnek alkalma van alaposan tanulmányozni egy jól megalkotott matematikai problémát, így rálátást nyerhet arra, milyen is egy jó feladat, és az adott versenyfeladat kiindulópontot is jelent a feladatsor készítéséhez, nem kell teljesen a semmiből felépítenie a feladatait. Emellett láthattuk azt is, hogy a legtöbb hallgató nincs tisztában a középiskolás diákok tudásszintjével, gyakran olyan korosztálynak tűztek ki feladatokat, amit az ő ismereteikkel nem lehet megoldani.

2. Előzmények

A problémamegoldás és a matematikai modellalkotás megjelenik a 2018-ban az EU által elsődlegesen megjelölt matematikai kompetenciák között is (Niss, 2015). A nyolc matematikai kompetencia közül kettőt emelnénk ki, melyek a kutatásunk szempontjából kiemelt fontossággal bírnak:

(3.) A matematikai problémamegoldás

- felismerni, megfogalmazni és osztályozni a problémákat
- önállóan alkotni problémákat
- ellenőrizni, értékelni a problémamegoldási folyamatot
- stratégiákat/sejtéseket alkotni
- megoldani különböző fajta problémákat (változatos kontextusban, a matematikán kívülieket is, nyílt végűeket is)

(4.) A matematikai modellalkotás

- lefordítani a matematika nyelvére a különböző területekről vett problémákat
- a modellen belül dolgozni
- az eredményeket visszafordítani az eredeti kontextusba
- megmutatni a különbséget az adott problémaszituáció és a matematikai modellje között

Az önálló problémaalkotás itt, mint a matematikai problémamegoldási folyamat szerves része jelenik meg. Az általános- és középiskolai matematikaoktatás egyik központi célja a problémamegoldási képesség fejlesztése, (Bereczki-Zámbó, Muzsnay, Szeibert, 2017) így azt gondoljuk, hogy a leendő matematikatanárok problémamegoldó képességének fejlesztése is elengedhetetlen része a tanárképzés folyamatának.

A matematikai tanári gyakorlat során rendszeresen adunk problémákat a diákoknak, ezek többnyire tankönyvekből, feladatgyűjteményekből, vagy versenyfeladat-gyűjteményekből való problémák. Mindemellett úgy gondoljuk, hogy a matematikatanárok munkájuk során sokszor kerülnek olyan helyzetbe is, amikor saját feladatokat kell készíteniük, ezért is tartjuk nagyon fontosnak, hogy a tanárképzés során kerüljenek a hallgatók olyan szituációba, amikor problémafelvetéssel, vagy saját feladat alkotásával kell foglalkozniuk. Megkérdeztünk több gyakorló matematikatanárt, hogy az ő tapasztalataik szerint kell-e, és ha igen, mikor kell egy matematikatanárnak saját feladatokat készítenie. A beszélgetések során kiderült, hogy nagy szükség van a tanítás során nem probléma jellegű feladatok alkotására is. Ezért, bár a címben a matematika tanárszakos hallgatók problémafelvető képességét jelöltük meg, mint vizsgálatunk központi tárgyát, dolgozatunkban a nem probléma jellegű feladatok alkotásának képességét is vizsgáljuk.

Ahogy az írás-olvasás megtanulásakor szükség volt arra, hogy egy-egy betűvel oldalakat teleírjunk, úgy ennek analógiájaképpen elmondható, hogy a jó matematikai problémamegoldást pedig gyakorlófeladatok (*excercise*-ok) megoldásának kell megelőznie.
Az angol nyelvű szakirodalom megkülönböztet *problem, task* és *excercise* elnevezésű feladatokat. Mi ennek mintájára az elkészült „példákat" összefoglalóan feladatoknak fogjuk nevezni és ezeken belül megkülönböztetünk gyakorlófeladatokat és problémákat.

A problémafelvetés metodikájának kutatása 1994-ben kapott egy nagyobb lendületet, amikor Silver összefoglalta (Silver, 1994) az addig problémafelvetés kapcsán megjelent néhány eredményt. Azóta számos olyan munka jelent meg, melyek a problémafelvetés módszereiről írnak, különböző taxonómiákat állítanak fel a metodika leírására. A legtöbb kutatásban a résztvevőknek adott szituáció, vagy probléma alapján kellett újabb feladatokat készíteni.

Singer, Ellerton és Cai 2015-ben egy újabb összefoglaló tanulmányt írtak (Singer, Ellerton, Cai, 2015) a problémafelvetés kutatásának helyzetéről és főbb vizsgálandó kérdéseiről. Szerintük a legfontosabb kérdések a következők:

a) Miért fontos a problémafelvetés az iskolai matematikaoktatásban?
b) Miért nem képesek a diákok és a tanárok matematikailag fontos problémákat alkotni?

c) Lehet-e hatékonyan képezni a diákokat és a tanárokat a magas színvonalú problémák alkotására?
d) Mit tudunk a problémafelvetés kognitív folyamatáról?
e) Milyen kapcsolat van a problémamegoldás és a problémafelvetés között?
f) Alkalmas-e a problémafelvetés a matematikai tanulási eredmények és a kreativitás vizsgálatára?
g) Hogyan jelenik meg a problémafelvetés a tantervben?
h) Hogyan teljesít egy olyan osztály, ahol a tanulók foglalkoznak problémafelvetéssel?
i) Hogyan lehet használni a technológiát a problémafelvetésben?
j) Mit tudunk a problémafelvetéssel való foglalkozás hatásáról a diákok eredményeire?

Ezek közül a kérdések közül minket legfőképpen az érdekel, hogy miért nem képesek (ha valóban nem képesek) jó feladatokat, problémákat alkotni a matematika tanárszakos hallgatók és hogyan lehetne fejleszteni ezt a képességet. Korábbi kutatásunkban (Rékasi, Stirling, 2019) vizsgáltuk a matematika tanárszakos hallgatók problémafelvető és problémamegoldó képessége közötti kapcsolatot. Ekkor olyan eredményre jutottunk, mely alapján úgy gondoljuk, hogy fontos volna fejleszteni a hallgatók problémafelvetési készségét. Cai és munkatársai szerint tanárok és diákok egyaránt vannak, akik képesek érdekes és releváns matematikai problémák alkotására. Azonban hangsúlyozzák, hogy vannak olyan diákok és tanárok is, akik nem-matematikai, megoldhatatlan vagy irreleváns problémákat készítettek. Ezt több kutatás eredményei is alátámasztják (Cai, Hwang, 2002; Silver, Mamona-Downs, Leung, Kenney, 1996; Silver, Cai, 1996). Silver és Cai vizsgálata azt mutatta, hogy a középiskolás diákok által készített feladatok 30%-a nem matematikai probléma, vagy úgynevezett "nonproblem statement" volt, annak ellenére, hogy a feladat utasítása kifejezetten matematikai problémák alkotására vonatkozott. (Silver, Cai, 1996; Cai et al. 2015)

Singer, Ellerton és Cai a korábban említett tanulmányukban tárgyalják, hogyan lehetne képezni a tanárokat és a diákokat a színvonalas matematikai problémák felvetésére. Mint írják, azért van szükség arra, hogy a tanárokat problémafelvetésre tanítsák, mert bár általában képesek matematikailag helyes problémák alkotására, ezek gyakran nem használhatóak tantermi körülmények között. (Singer, Ellerton, Cai, 2015; Cai et al., 2015)

Több kutatás is foglalkozott már a fejlesztés lehetőségeivel. Koichu és Kontorovich (2013) azt vették észre, hogy a kísérletükben részt vevő, sikeres problémafelvető tanárjelöltek akkor alkották a legjobb problémáikat, amikor a problémafelvető tevékenységüket problémamegoldással és -elemzéssel ötvözték. Singerék kiemelik, hogy a kutatások alapján a diákok képesek szélesebb körű, több kihívást jelentő, színvonalasabb problémákat alkotni, ha rendelkeznek tapasztalattal ilyen problémák megoldásában, és ha informálisan – például képekkel – ösztönzik őket, így ösztönözve őket a “felfedezésre” (Cai et al. 2015).

L.Ma (1999) leírja, hogy a tanároknak a jó minőségű, színvonalas problémafelvetéshez növelniük kell a problémák mögött álló matematikai és pedagógiai megértésüket.

Hawkins (2000) könyvében leírja, hogy az általa felkért diákok többsége nem tud spontán módon feladatokat készíteni. Törökországi kutatások (Lavy, Shriki, 2007) szerint a leendő tanárok általában szokványos problémákat tűznek ki. Nem mernek újítani, mert attól tartanak, hogy nem fogják tudni megoldani a saját maguk által kitűzött problémákat.

Rosli, Capraro, Goldsby és munkatársaik 2015-ben, kutatásukban 51 tanárjelölt problémamegoldó és problémafelvető képességét vizsgálták, akik egy problémamegoldó kurzuson vettek részt 2011 őszén. Ez a kutatás nagyon hasonló a mi kutatásunkhoz, ezért ezt a cikket jobban részletezzük. A hallgatókat véletlenszerűen két csoportba osztották, az első csoport először problémamegoldással foglalkozott, majd adott minták alapján saját problémákat alkotott, a második csoport ugyanezt fordított sorrendben végezte. Kilenc darab 4-6 fős csoport dolgozott együtt. A munka során a hallgatók leírták a gondolataikat és nehézségeiket a problémafelvető gyakorlattal kapcsolatban. Az eredmények azt mutatják, hogy a kutatásban részt vett matematika tanárszakos hallgatók magabiztosak voltak egyszerűbb aritmetikus feladatok megoldásában, de nehézséget okozott nekik a számok általánosítása és értelmezése algebrai formában. Azt, hogy ez bővebben mit jelent, nem részletezik. Mindemellett a résztvevők képesek voltak egyszerűbb feladatok készítésére és megfontolták a problémamegoldás néhány fontos aspektusát, amikor új feladatokat alkottak. Mindazonáltal nehézséget okozott nekik egynél több probléma megalkotása, bizonytalanok voltak a saját kérdéseikkel kapcsolatban és általában már megoldott problémákhoz hasonló feladatokat készítettek. Ebből, valamint más szintén kevéssé kifejtett fogalmakból azt gondolhatjuk, hogy a problémafelvetés kutatása még gyerekcipőben jár, nincsenek kiforrott, jól definiált fogalmak és szempontrendszerek a kutatására. Az első csoport tagjai leginkább amiatt aggódtak, hogy értelmesek és érthetőek-e a készített feladataik, sokan nem tudták megítélni, hogy túl könnyű, vagy túl nehéz feladatokat készítenek-e, illik-e a feladat egy adott évfolyam tudásszintjéhez, matematikailag pontos-e és megoldható-e a feladatuk. A második csoport tagjainak szintén gondot okozott a nehézségi szint megítélése, a feladatoknak a tanulók előzetes tudásához való kapcsolása és az eredetiség és kreativitás kérdése. A tanulmány alapján az mondható, hogy a problémamegoldásnak meg kell előznie a problémafelvetést. Az első csoportban statisztikailag szignifikáns kapcsolat mutatkozott a problémamegoldás és a problémafelvetés eredményessége között, ahogy a problémamegoldó képességük nőtt, úgy mérsékelten ugyan, de nőtt a problémafelvető képesség is. A második csoportban viszont nem volt statisztikailag szignifikáns a kapcsolat. A tanulmány 11 szempontot sorakoztat fel, melyek fontosak az alkotott problémák értékelésében:

- Az információ forrása (source of information)
- Megoldhatóság (solvable)
- Hasonló problémát már látott/oldott meg (similar problem seen/worked)
- Életből vett probléma (Real-life situation)
- Realisztikus, értelmes, érthető (realistic, made sense, understandable)
- Matematikailag pontos/ megfelelő (mathematicly appropriate)
- Magával ragadó, vonzó (engaging)
- Nehézségi szint (difficulty level)
- Eredetiség és kreativitás (originality and creativity)
- Kihívást jelentő (challenging)
- Korosztálynak megfelelő (age appropriateness). Ez a tanulmányban a középiskolások számára megoldható feladatokat jelentette.

Sajnos ezen szempontokat a tanulmányban nem fejtik ki részletesebben, nem írják le, pontosan mit is jelentenek, mit értenek alattuk. Így az ő értékelési rendszerük nem vihetők át másik kísérletre, mert ezek a szempontok egyéni ízlés alapján is értelmezhetők. A legtöbb szempont releváns, de a fenti megfogalmazásban szubjektív. A szubjektivitással nincs probléma akkor, ha leírjuk, hogy mennyire szubjektív, de itt az is hiányzik. Ezek közül a szempontok közül is felhasználtunk néhányat a saját értékelési rendszerünk kialakításához, melyet később részletezünk.

Stickles tanulmánya azt vizsgálja, hogy középiskolai matematikatanárok és leendő tanárok milyen problémákat vetnek fel, ha

a) megadott adatok alapján kell feladatokat generálniuk
b) megadott feladatok alapján kell újakat készíteniük.

(Stickles, 2011) Az eredmények azt mutatják, hogy mind a tanárjelölteknek, mind a tanároknak nehézségei voltak abban, hogy adott adatok alapján saját feladatokat készítsenek. Sikeresebbnek értékelték azt, amikor meglévő problémák alapján, vagy azokhoz kapcsolódóan kellett létrehozniuk újat (feladatvariálás). Nagyobb számban készítettek generált feladatokat (a), mint variált feladatokat (b), viszont a generált feladatok között kevesebb volt a matematikai problémának tekinthető, inkább úgynevezett “*nonproblem*”-ek, vagy “*excercise*”-ok készültek. Mivel a problémák osztályba sorolása nagyban a megoldó közönségtől függ, a kategóriák definiálása nem volt egyszerű feladat. Stickles egy választ akkor tart **jól definiált problémá**nak*,* ha az megfelel a következő kritériumoknak:

a) ösztönzi a feladat egyszerűsítését és ezáltal önálló feladat felvetését, valamint matematikai modell létrehozását
b) nincs olyan ismert megoldási módszer vagy eljárás, mellyel azonnal megoldható a feladat.

Nála a **gyakorlat** vagy **gyakorlófeladat** (*excercise*) olyan feladat, amely pusztán egy ismert algoritmus vagy eljárás alkalmazását követeli meg. ***Stickles*** eredményei azt mutatják (Stickles 2011), hogy a kísérletében részt vevő matematika tanárok, bár képesek voltak problémákat alkotni, az ebben való sikerességük csak részleges volt. Kapott adatok alapján képesek voltak számos feladatot készíteni, de nehézségeik voltak releváns problémák készítésével. Sokkal sikeresebbek voltak abban, hogy már meglévő problémákat formáljanak újjá.

A matematika-feladatok osztályozásának kérdése nem újkeletű probléma. A Módszertani példatárban (Vásárhelyi, 2013) a feladatok osztályozásáról a következőt olvashatjuk: "Egy feladat zárt, ha megadott kezdeti feltételek mellett keressük meghatározott kérdésekre a választ. Így a tankönyvekben, példatárakban szereplő feladatok többsége zártnak tekinthető. Egy feladat megoldása során valamilyen kezdeti állapotból (kiindulási feltételek) valamilyen végállapotba (a feltett kérdés megválaszolása) szeretnénk eljutni. *Ha egy feladat esetében a kezdeti állapotból a végállapotba jutás módja nem adott közvetlenül, azaz nehézségekbe ütközünk a megoldás során, akkor problémáról beszélünk.* Egy feladat problémakaraktere objektív és *szubjektív tényezőktől is függ,* hiszen ugyanaz a kérdésfeltevés lehet például a megoldó felkészültségétől függően nehéz probléma, vagy éppen rutinfeladat. A nyitott feladatok általában nem oldhatók meg rutinszerűen, így helyette a"nyitott probléma" elnevezés gyakran helytálló lehet, és valószínűleg ezért is használják így gyakran (Pehkonen, 1995)."

Sajnos gyakran a problémafelvetés folyamatának egy kritikus pontja, a jó problémák megalkotása felett. Matematikai problémák, kérdések felvetése nagy fontosságú a matematikai gondolkodás folyamán (Silver, Mamona-Downs, Leung, és Kenney, 1996).

Összefoglalva a tanári gyakorlatban szükség lehet gyakorlófeladatok alkalmazására az új ismeretek és módszerek elsajátítása során. Ezt alátámasztják a matematikatanárokkal készített interjúk is ("*nincs elég gyakorlófeladat a tankönyvekben*"). Ezért jónak és hasznosnak tartjuk azt a képességet is, hogy valaki ilyen egyszerű feladatok megalkotására képes. A tanárok döntő szerepet játszanak a problémamegoldás tanításában. Egy jól megalkotott probléma, mely kihívás a tanulók számára, fejleszti a gondolkodásukat és segít a mélyebb matematikai megértés kialakításában. A tanárok által az órákon felvetett problémák valóban hatással vannak a matematikára, amit a diákok elsajátítanak az órán. Ha a tanulók csak számításos feladatokat végeznek, azt fogják gondolni, hogy a matematika egyszerűen csak egy sor eljárás egymás utáni alkalmazása.

3. Kutatásunk

Készítettünk interjút 7 matematikatanárral. Volt köztük egyetemi tanár, gyógypedagógus, alsó- és felső tagozatos általános iskolai tanár és gimnáziumi tanár is. A velük való interjúkat itt nem közöljük, mert nem ez volt kutatásunk fő része. Az alábbiakban kiemelünk néhány fontosabb szempontot, amiket szóba hoztak:

- folyamatosan kell saját feladatokat készíteni, például azért, mert gyógypedagógiai szempontból sok gyerek hibás besorolású, nem tart ott, ahol hivatalosan kellene neki
- egyszerűbb feladatokat kell készíteni, mint amik tankönyvekben, feladatgyűjteményekben vannak
- nincs elég gyakorlófeladat a tankönyvben, a gyerekeknek több gyakorlásra van szüksége
- "*Tulajdonképpen ebből áll az életem, hogy feladatsorokat gyártok*" (gyógypedagógus – felső tagozatos matematikatanár)
- nem tetszenek a tankönyvbeli feladatok az oktatónak és/vagy a diákoknak
- a csoportnak nem megfelelő a tankönyvbeli feladat
- készít rávezető/ előkészítő feladatsort, mert "*nem jók a lépcsőzetek a tankönyvben, kell közé feladatokat készíteni*", "*a fokozatossággal van baj*", csak nagyon nehéz és nagyon könnyű feladatok vannak a tankönyvekben
- kevesebb erőfeszítés, mint rengeteg feladatgyűjteményt felkutatni és abból kiválasztani a csoportnak megfelelő dolgozat-feladatot

Kutatásunkban a matematika tanárszakos hallgatók önálló problémafelvetési és feladatkészítési képességét vizsgáltuk. Számos feltevésünk, elképzelésünk volt arról, hogy mi befolyásolhatja a matematika tanárszakos hallgatók önálló problémafelvetését. Azt vizsgáltuk, hogy a hallgatók önálló problémafelvetési vagy feladatkészítési képessége függ-e attól, hogy:

- korábban készítettek-e már rávezető feladatsort egy megadott feladatra
- vettek-e már részt módszertani kurzuson az egyetemen
- csoportban dolgoznak-e
- milyen sikerességgel végzik az egyetemi tanulmányaikat

A kísérletben arra voltunk kíváncsiak, hogy jobb feladatot tud-e önállóan készíteni az a hallgató, aki korábban már készített rávezető feladatsort egy adott (verseny)feladatra, mint aki nem csinált ilyen feladatsort. Kutatásunkban 43 ELTE matematika tanár szakos hallgató vett részt. Főként másod- és harmadévesek, de voltak résztvevők minden évfolyamról. A résztvevők jelentkezhettek egyénileg vagy csapatban is. 9 csapattól, valamint 19 egyéni résztvevőtől kaptunk feladatokat, azonban 3-an csak a rávezető feladatsorhoz küldtek értékelhető minőségű feladatokat (a tematikus feladataik olvashatatlanok voltak). Mivel Magyarországon viszonylag kevés matematika tanárszakos hallgató van, kutatásunk inkább feltáró jellegű, kvalitatív volt. Emiatt vizsgálhattunk többféle szempontot is. Mindemellett természetesen számadatokkal is alátámasztható eredményekre törekedtünk. A jelentkezőket két csoportra osztottuk. Mind a két csoportnak két fordulóban kellett feladatokat készítenie. Az első fordulóhoz tartozó instrukcióinkat tartalmazó levelet 2019. április 27-én küldtük ki. Ennek a fordulónak a leadási határideje 2019. május 7. volt. A második forduló kezdete 2019. május 14., határideje pedig 2019. május 27. volt. A résztvevők két csoportra bontása úgy zajlott, hogy külön az egyénileg dolgozókat, valamint külön a csapatokat is két részre osztottuk. Ezzel értük el, hogy mindkét csoportban legyenek csapatok, és egyéni résztvevők is. A két csoportra osztás teljes mértékben véletlenszerűen történt. Az első csoport először 3-5 rávezető feladatot írt egy adott (verseny)feladatra. A második csoport ezzel egyidőben önállóan készített 3-5 feladatot egy adott témakörhöz illeszkedően. A második fordulóban az első csoport készített önállóan, témakörhöz illeszkedően 3-5 feladatot, a második csoport pedig 3-5 rávezető feladatot egy adott (verseny)feladatra. A rávezető feladatok készítéséhez mi kiválasztottunk néhány versenyfeladatot, majd ezeket megoldásokkal együtt elküldtük a résztvevőknek. Nekik egyet kellett választaniuk közülük, amelyhez 3-5 feladatból álló rávezető feladatsort készítenek. Fontosnak tartottuk, hogy olyan feladatokat adjunk, amelyek megoldása elérhető mindenki számára, nehogy abból adódjanak problémák később, hogy valaki félreértelmezte vagy rosszul oldotta meg a versenyfeladatot és ehhez készít rávezető feladatsort. A feladatsornak minimum három, legfeljebb öt feladatból kellett állnia.

Ezek a versenyfeladatok a megoldásaik elérési helyével együtt a következők:

- OKTV 2015/16, II. Kategória, döntő, 3. feladat
  https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2015_2016_donto/mat2_javut_d_oktv_1516.pdf
- OKTV 2017/18, II. Kategória, döntő, 1. feladat
  https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2017_2018_donto/mat2_javut_d_oktv_1718.pdf

- Arany Dániel matematikaverseny 2017/18, Kezdők/III. kategória, döntő, 1. feladat. http://www.bolyai.hu/ADverseny/2017/AD_2017-2018-kiadvany.pdf (17. Old.)
- Arany Dani 2017/18, Haladók/I. kategória, 2. forduló, 1. feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2017/AD_2017-2018-kiadvany.pdf (25. Old.)
- Arany Dániel matematikaverseny 2016/17, Kezdők I. kategória, döntő, 1. feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2016/AD_osszes_1617.pdf (10. Old.)
- Arany Dániel matematikaverseny 2016/17, Kezdők II. kategória, döntő, 1. feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2016/AD_osszes_1617.pdf (12. Old.)
- Arany Dániel matematikaverseny 2015/16, Haladók II. Kategória, második forduló, 1. feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2015/AD_osszes_1516.pdf (35. Old.)

A saját, tematikus feladatok elkészítéséhez témákat adtunk meg, és ebből kellett egyet választaniuk, majd abban a témakörben 3-5 feladatot készíteniük. Az általunk megadott, választható témakörök a következők:

- paradicsom
- utazás
- internet
- vasárnap
- boszorkány
- narancslé
- űrutazás

Sem a versenyfeladatok, sem a megadott témakörök közül nem készült mindegyikre feladat. A versenyfeladatok közül az *OKTV 2017/18, II. Kategória, döntő, 1. feladat*ra, témakörök közül pedig a *vasárnap*ra nem érkezett egyetlen feladat sem.

A korábbi kutatásunkból szerzett tapasztalatainkat összevetve ***Rosli, Capraro, Goldsby és munkatársaik*** cikkében (Rosli et al., 2015) olvasható szempontokkal közösen dolgoztunk ki egy saját szempontrendszert. Ez a szempontrendszer úgy épül fel, hogy összesen 7-7 szempontból áll az egyes fordulóknál, ám ezek közül öt szempont azonos mindkét fordulóban. Fontosnak tartottuk, hogy összehasonlítható legyen a két feladattípus értékelése, azonban az eltérő jellegük miatt a feladatsorokat nem lehetett teljesen azonos szempontok alapján értékelni. Az így megfogalmazott szempontrendszerünk legfőképp az eredetiség, ötletesség, valamint a következetes felépítés köré épül, ám ezeken kívül számos más szempontot is figyelembe vettünk. Az *1. táblázatban* láthatók az értékelési szempontjaink:

<table>
<tr><th></th><th>Rávezető feladatsor</th><th>Tematikus, saját feladatok</th></tr>
<tr><td>1.</td><td colspan="2">Megoldható (max 2 pont)</td></tr>
<tr><td>2.</td><td colspan="2">Érthető (max 1 pont)</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="2">Matematikailag helyes (max 2 pont)</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="2">Korosztályhoz illő (max 1 pont)</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="2">Következetes felépítés/ jó szintezés (max 2 pont)</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Jó sorrend (max 2 pont)</td><td>Eredetiség, ötletesség (max 2 pont)</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Témaválasztás indokolt, helyes (max 1 pont)</td><td>Beöltöztetettség (max 1 pont)</td></tr>
<tr><td>+1</td><td colspan="2">Élvezetes, figyelemfelkeltő (engaging) +1 pont</td></tr>
</table>

1.táblázat

A szempontok közös megfogalmazása után egyikünk a rávezető feladatokat, másikunk pedig a beérkezett saját feladatokat javította ki, majd cseréltünk, és így is átnéztük a dolgozatokat. Néhány feladatnál tanácsot kértünk kutatócsoportunk tagjaitól, ezért köszönet illeti Szabó Csaba tanár urat, Bereczky-Zámbó Csillát, Muzsnay Annát, Szeibert Jankát és Török Tímeát. Ezzel igyekeztünk növelni a javítás objektivitását.

Még kíváncsiak voltunk arra is, hogy a szempontrendszerünk egyes szempontjai alapján, valamint összességében melyik fordulóban teljesítenek jobban a kutatásban résztvevő hallgatók. Meg akartuk tudni azt is, hogy jobb feladatot készítenek-e azok a hallgatók, akik már vettek részt módszertani kurzusokon. Ezzel azt vizsgáltuk, hogy a módszertani kurzusok elősegítik-e a jobb problémafelvetési képességet. Az általunk lehetővé tett csoportmunka megvalósulására is kíváncsiak voltunk. Ez alatt azt értjük, hogy vajon a csoportmunka befolyásolja-e az elkészített feladatok színvonalát.

4. Eredményeink

Eredményeinket tömören a következőképpen foglalhatjuk össze:

- a rávezető feladatsor készítése segíti az önálló problémaalkotást (tematikus feladatok készítését)
- a matematika tanítása kurzusok elvégzésével nem hozható összefüggésbe a beküldött feladatok színvonala
- az egyetemet nem az ajánlott ütemterv szerint végző hallgatók gyenge feladatokat készítettek

- a csoportmunka sok esetben nem valósult meg

Ezen eredményeinket alább részletesen is tárgyaljuk.

Azoknak a hallgatóknak, akik először készítettek rávezető feladatsort, jobban sikerültek a saját tematikus feladataik, mint azon résztvevőknek, akik az első fordulóban készítették az önálló tematikus feladatokat. A hallgatók átlagos pontszámai a *2. táblázat*ban láthatók.

	elért pontok		
	saját tematikus feladatok	rávezető feladatsor	összesen
Először saját feladatot készítők átlaga:	7,91	9,33	17,24
Először rávezető feladatsort készítők átlaga:	9,0	9,0	18,0

2. táblázat

Megvizsgáltuk külön a rávezető, valamint külön a saját tematikus feladatokat is. Ezt azért tartjuk fontosnak, mert ahogyan korábbi kutatásunkban is megmutattuk lényegesnek tartjuk, hogy a matematika tanár szakos hallgatók problémafelvetési képességét vizsgáljuk annak érdekében, hogy lehetséges fejlesztési módokat dolgozhassanak ki a javítására. (Rékasi, Stirling, 2019)

A saját tematikus feladatok esetében megfigyeltük, hogy akik először ezt a fordulót csinálták, és csak utána a rávezető feladatsort, ők összességében jobban teljesítettek a következő szempontokból:

- *Megoldható*
- *Érthető*
- *Matematikailag helyes*
- *Élvezetes, figyelemfelkeltő*

Az elért pontok a *3. táblázat*ban láthatók.

	saját tematikus feladatok átlagos pontszámai (max. elérhető)		
	Megoldhatóság (2)	Érthetőség (1)	matematikai helyesség és élvezetesség (2+1)
először rávezetőt készített	1,58	0,69	1,70
először saját feladatot készített	1,80	0,86	1,91

3. táblázat

A többi szempont szerint közel azonos eredményt értek el a tematikus feladatokban azok, akik először, valamint akik másodszor foglalkoztak ezzel a feladatkészítési móddal.

A rávezető feladatoknál minden kategóriában közel azonosan teljesítettek, akik először és akik másodszor készítették el ezen fordulóra szánt feladataikat. Ha mégis akarnánk valamiféle különbséget tenni, akkor néhány kategóriánál itt is látszik, hogy azok teljesítettek jobban (bár csak nagyon kis eltéréssel), akik a rávezető feladatokat csinálták először.

Az egyes értékelési szempontok alapján megvizsgáltuk a beérkezett feladatokat. Kiderült, hogy *Következetes felépítés/jó szintezés* szempontjából, akik először tematikus feladatokat készítettek, nekik ezek a feladataik jobbak voltak, mint a rávezető feladataik. Azonban, akik először versenyfeladathoz készítettek feladatsor, nekik közel azonosak lettek a feladataik mindkét fordulóban.

Felosztottuk a hallgatókat aszerint, hogy végeztek-e már matematika tanítása kurzust, vagy sem. Ez után azok közül a hallgatók közül, akik már végeztek matematika tanítása kurzusokat, kivettük azokat a hallgatókat, akik több éve végzik az egyetemet, mint amilyen évfolyammal jelenleg a legtöbb órájukat végzik (például aki hatodéves, és algebra és számelmélet4 kurzusra jár, mely harmadéves tantárgy a tanrend szerint).
Így az látszik, hogy akik több éves csúszással végzik az egyetemet, sokkal rosszabb pontszámú feladatokat készítettek, mint minden más hallgató, többen csak feleakkora pontszámot kaptak. Érdekes továbbá az is, hogy a túlnyomó részt másodévesekből álló, eddig matematika tanítása órát még nem végzettek csoportja jobb eredményeket ért el a felsőbb éveseknél. Ez akkor is igaz, ha kivesszük közülük a korábban említett rosszul teljesítő, csúszó hallgatókat. A hallgatók pontszámai a *4.táblázatban* láthatók.

	elért pontok		
	saját tematikus feladatok	rávezető feladatsor	összesen
az ajánlottnál lassabb ütemben haladó hallgatók	6,1	5,7	11,8
normál ütemben haladó hallgatók	8,5	9,2	17,6

4. táblázat

A csapatokban dolgozóknál néhány esetben látszott, hogy nem valósult meg a csoportmunka, azaz teljesen külön dolgoztak. Ez többféle módon is megnyilvánult: egyrészt a nagyon eltérő minőségben lefényképezett, majd így beküldött feladatokból, másrészt sokszor nagyon különböző szintű feladatokat küldtek, mind nehézségben, mind korosztály tekintetében. Ez a rávezető feladatsor értékelésében pontlevonással is járt, hiszen így az elkészült feladatok nem adhatók oda egy adott csoportnak, pedig ez fontos cél. Volt olyan csapat is, ahol az egyik csapattag nem készített feladatokat, csupán a csapat munkáját koordinálta. Ez a funkció hasonlít a KIP- módszer és más kooperatív csoportmódszerek időfelelőséhez.

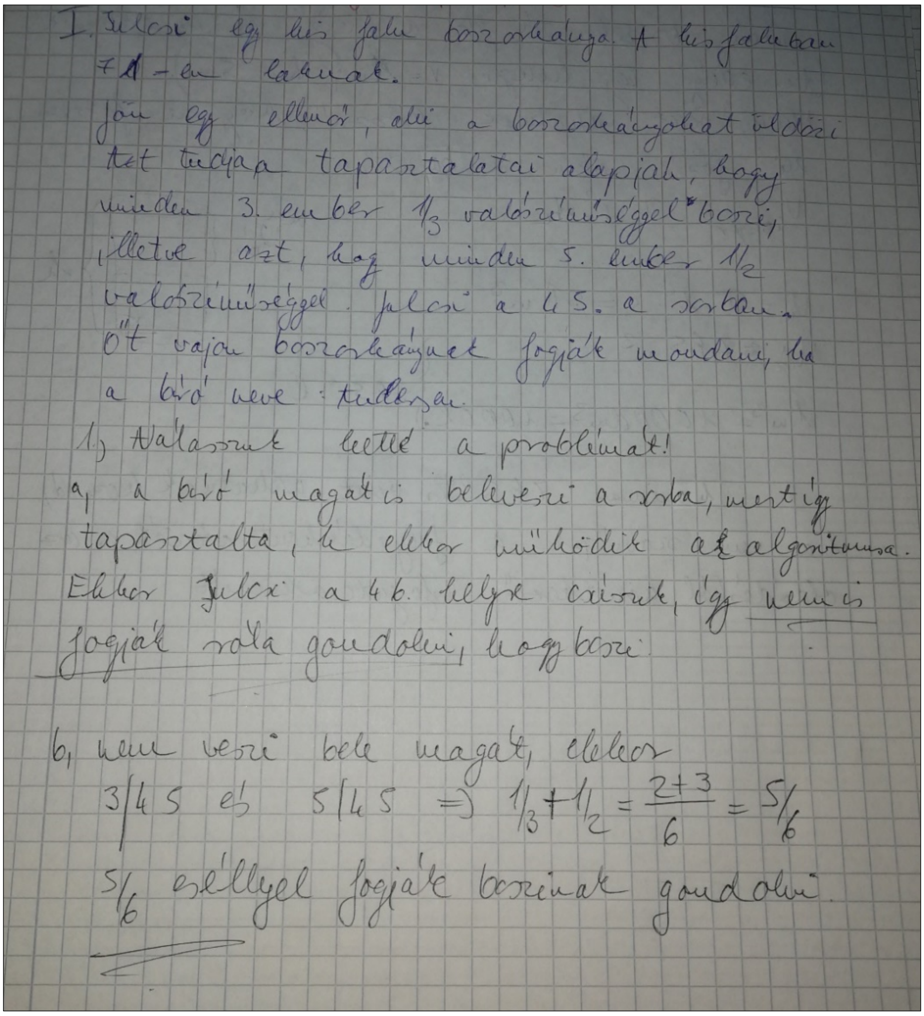
Ahogyan fent írtuk, a csoportmunka sokszor nem, vagy nem a várt módon valósult meg, ezért úgy döntöttünk, nem releváns összehasonlítani a csoportos és önálló feladatalkotást.

Ezen kívül a következő észrevételeket tettük:

- a hallgatók többször eltértek a feladat utasításaitól
- a résztvevők jelentős része nincs tisztában a középiskolás korú diákok tudásszintjével
- a rávezető feladatsort gyakran a hivatalos megoldás lépéseire készítették
- a második fordulóra a hallgatók nagy többsége elfáradt, valószínűleg azért, mert ez már a félév végére esett, így összességében ekkor gyengébb színvonalú feladatok születtek, függetlenül a készített feladatok típusától
- a rávezető feladatok gyakran túl könnyűek voltak, sőt, volt olyan is, amikor szinte egyáltalán nem is kapcsolódtak az eredeti feladathoz, ezért nem valósult meg a rávezetés

Először is a javítás során megfigyelhettük, hogy bár megkértük a hallgatókat, hogy küldjenek megoldásokat is az általuk kitűzött feladatokhoz, ennek ellenére sokan csak vázlatos, néhányan pedig hibás saját megoldást küldtek a feladataikhoz. Ez több szempontból is problémás. Egyrészt egy leendő matematika szakos tanárnak tudnia kell, mit nevezünk megoldásnak, meg kell tudnia oldani egy saját maga által kitűzött feladatot. Ez a problémakör már az előző TDK-nk során is felmerült. Ekkor a hallgatók nem mindegyike küldött megoldást, és érkeztek hozzánk voltak megoldhatatlan és értelmetlen feladatok. Másrészt, ha nem küldenek megoldás menetet, csak egy számot, végeredményt, akkor nem tudjuk eldönteni hol a hiba. Ez alatt azt értjük, hogy mi megoldottuk a feladatokat, de néhány esetben más eredmény jött ki nekünk, mint a feladat kitalálójának. Ilyen esetekben nem tudtuk eldönteni, hogy a feladatban található esetleges félreérthető részek okozták a hibát, vagy a megoldás menete, ha a beküldő nem csatolt teljes megoldást a feladatához. Egy másik szempont, hogy a megoldásnak tükröznie kell az önálló feladatkitűzés esetében a szintet, ahova a kitűző szánta, a rávezető feladatkészítésnél pedig elő kell, hogy készítse a feladatmegoldáshoz szükséges gondolatokat. Ezen hibák elkerülése végett írtuk le részletesen a jelentkezőknek a fordulók elején kiküldött levelekben, hogy milyen megoldásokat várunk az elkészített feladataikhoz. A kiküldött levelek a mellékletekben találhatóak (*1., 2., 3., 4. melléklet*).

A saját tematikus feladatok készítésénél gyakori hiba volt a megoldásokban, hogy olyan adatokat használtak, amiket a feladatban nem adtak meg, vagy olyan ismeretet használtak a megoldáshoz, mely a feladat szövegéből nem derült ki. Erre egy példa, mikor a feladat készítője meglehetősen pontatlanul írta le a feladatot, valószínűleg e miatt is történhetett, hogy szinte érthetetlen a feladat, még az általa küldött megoldással is:



I. Julcsi egy kis falu boszorkánya. A kis faluban 71-en laknak.
Jön egy ellenőr, aki a boszorkányokat üldözi. Azt tudja a tapasztalatai alapján, hogy minden 3. ember 1/3 valószínűséggel boszi, illetve azt, hogy minden 5. ember 1/2 valószínűséggel. Julcsi a 45. a sorban. Őt vajon boszorkánynak fogják mondani, ha a bíró neve: Tudorján.

1.) Válasszuk ketté a problémát!

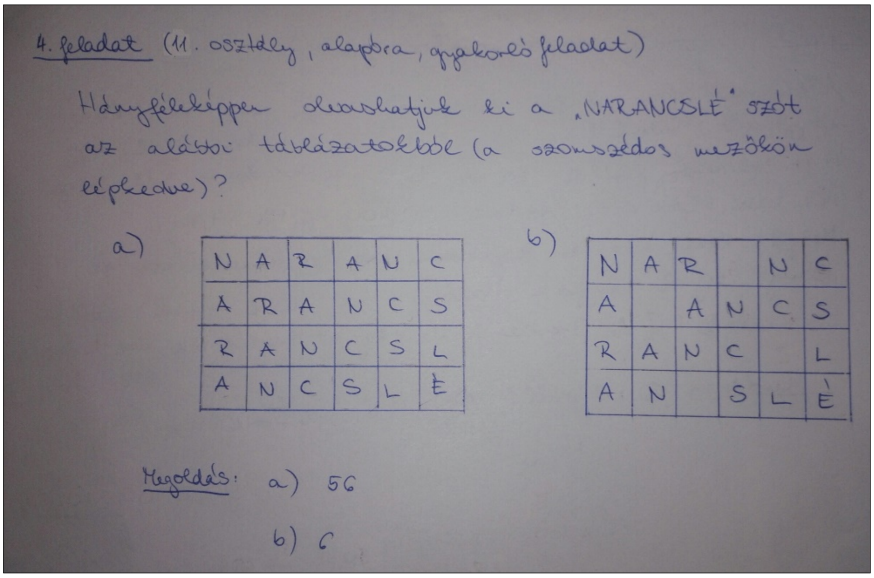
a) a bíró magát is beleveszi a sorba, mert így tapasztalta, s akkor működik az algoritmusa. Akkor Julcsi a 46. helyre csúszik, így nem is fogják róla gondolni, hogy boszi.

b) nem veszi bele magát, akkor

$3|45$ és $5|45 \Rightarrow 1/3 + 1/2 = \frac{2+3}{6} = 5/6$

$5/6$ eséllyel fogják boszinak gondolni.

Egy másik példában a megoldáshoz semmiféle leírást nem adott a feladat beküldője, csupán egy-egy számot írt oda:


4. feladat (11. osztály, alapóra, gyakorló feladat)

Hányféleképpen olvashatjuk ki a „NARANCSLÉ" szót az alábbi táblázatokból (a szomszédos mezőkön lépkedve)?

a)

N	A	R	A	N	C
A	R	A	N	C	S
R	A	N	C	S	L
A	N	C	S	L	É

b)

N	A	R		N	C
A		A	N	C	S
R	A	N	C		L
A	N		S	L	É

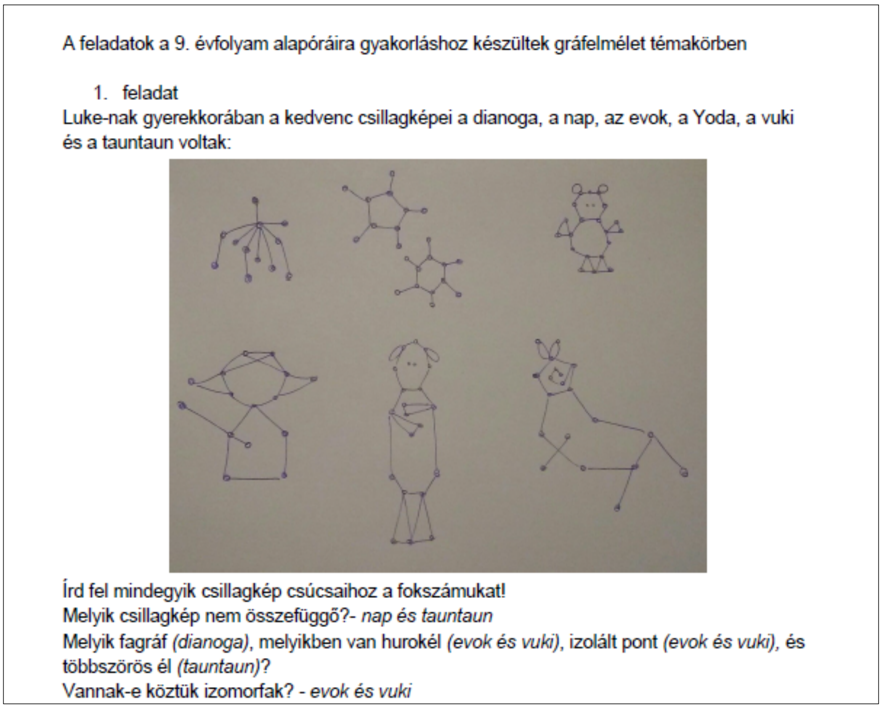
Megoldás: a) 56

b) 6

Itt is fennáll az előbbi dilemmánk, mert a b) feladatrészre nekünk az övétől eltérő eredmény jött ki. Mivel nem írt részletes megoldást a feladat készítője, ezért nem tudjuk, hogy ő oldotta-e meg rosszul, vagy mi értelmeztük tőle eltérően a feladatot.

A rávezető feladatok esetében több résztvevőnél is előfordult, hogy megpróbálta beöltöztetni a feladatot, ám ettől elromlott a feladat matematikája. A saját, témára készített feladatok között akadtak nagyon ötletesek, a témához valóban kapcsolódó feladatok is. A rávezető feladatoknál kevésbé volt szempont a feladatok beöltöztetettsége.

Ezek közül választottuk a következő példánkat:


A feladatok a 9. évfolyam alapóráira gyakorláshoz készültek gráfelmélet témakörben

1. feladat

Luke-nak gyerekkorában a kedvenc csillagképei a dianoga, a nap, az evok, a Yoda, a vuki és a tauntaun voltak:

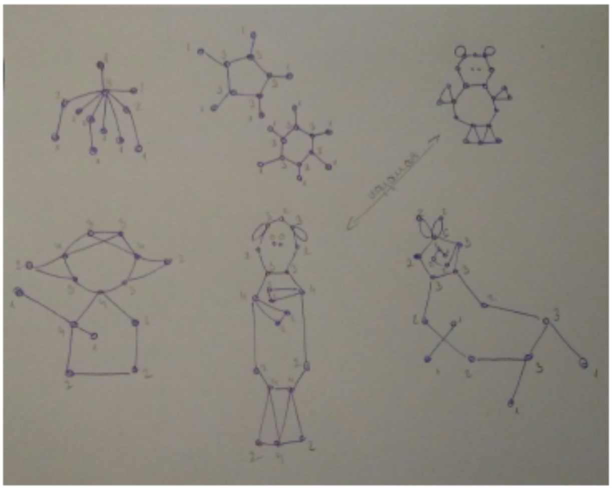
Írd fel mindegyik csillagkép csúcsaihoz a fokszámukat!

Melyik csillagkép nem összefüggő?- *nap és tauntaun*

Melyik fagráf *(dianoga)*, melyikben van hurokél *(evok és vuki)*, izolált pont *(evok és vuki)*, és többszörös él *(tauntaun)*?

Vannak-e köztük izomorfak? - *evok és vuki*

Ezen feladat beküldője a megoldás mellé egy ábrát is mellékelt megoldásainak indoklására:



A feladatok megfelelő szintezésével mindkét fordulóban voltak jelentősebb, illetve kevésbé jelentős gondok. Annak ellenére, hogy külön kértük a résztvevőket, hogy az adott témára készítendő saját feladataiknál tüntessék fel, hogy mely gimnáziumi korosztálynak szánták, mégis sokan nem tették ezt meg, ezzel lehetetlenné téve, hogy ilyen szempont szerint érdemben értékeljük a feladataikat.

Sok esetben tapasztaltuk, hogy az adott feladat kitalálói feladatmegoldásban jártas egyetemistáknak tekintik a középiskolásokat. Erre az alapján következtettünk, hogy esetenként jóval nagyobb matematikai gyakorlatot és fejlettebb készségeket feltételeztek annál, mint amennyivel egy középiskolás diák rendelkezik, annak ellenére, hogy nekik szánják ezeket a feladatokat. Vagyis úgy tűnik, nincsenek tisztában azzal, hogy a középiskolás diákok milyen feladatokat tudnak megoldani és mikor.

A rávezető feladatok javítása közben egyértelművé vált, hogy sokan a választott feladathoz általunk elküldött hivatalos megoldás bizonyos lépésekre kérdeztek rá a rávezető feladatsor egyes feladataival. Erre a leglátványosabb példa egy olyan feladatsor, melynek összeállítója ki is emelte a hivatalos megoldás egyes lépéseit, melyre a rávezető feladatokat készítette:

A választott feladat: Arany Dani 2016/17, Kezdők I. kategória, döntő, 1. feladat
http://www.bolyai.hu/ADverseny/2016/AD_osszes_1617.pdf (10. Old.)

Lépés: *A jobb oldalon szereplő $9k^2+13$ kifejezés 3-mal vett osztási maradéka bármely k pozitív egész szám esetén 1, tehát a baloldalnak is 3-mal osztva 1 maradékot kell adnia.*
Rávezetés: A 5k kifejezés melyik 5-el osztható számot adja meg, ha
$k=0$; $k=3$; $20k^2-3=77$?

Lépés: *Mivel egy négyzetszám 3-mal osztva csak 0 vagy 1 maradékot adhat,…*
Rávezetés: Mutasd meg, hogy öt egymást követő négyzetszám összege mindig osztható 5-tel!

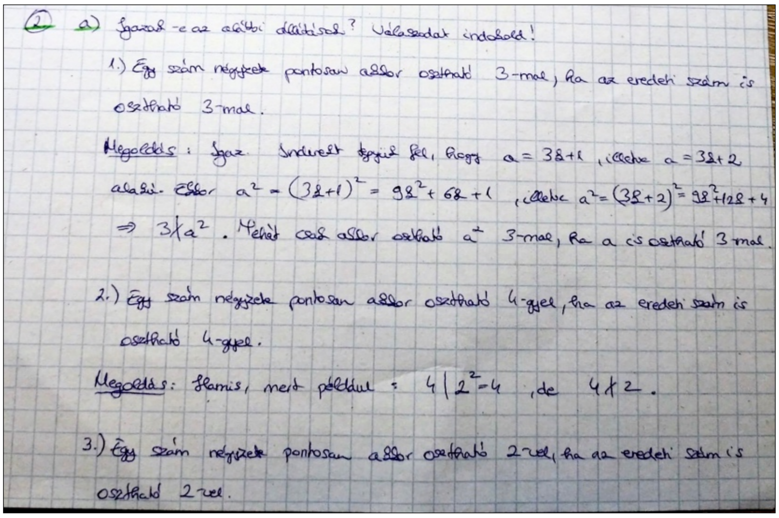
Legyen $a=5k+1$. Ez lehetne 5k, 5k+2… is, a megoldás szempontjából lényegtelen, hiszen nekünk csak az 5-ös osztási maradék kell, az pedig körbeér. Legfeljebb az a k, ami egyel több vagy kevesebb lesz.
Ekkor $a^2=25k^2+10k+1$=> 5-el osztva 1 maradék.
$(a+1)^2=25k^2+20k+4$=> 5-el osztva -1 maradék.
$(a+2)^2=25k^2+40k+9$=> 5-el osztva -1 maradék.
$(a+3)^2=25k^2+60k+16$=> 5-el osztva 1 maradék.
$(a+4)^2=25k^2+80k+25$=> 5-el osztva 0 maradék.

Összesen 1-1-1+1=0 maradék.

Általánosítás: $(5k+c)^2=25k^2+10kc+c^2$

Lényeg: vizsgáljuk a maradékok osztályát!

Ennek a rávezető feladatsor készítési stratégiának a következménye valószínűleg az, hogy egy adott feladathoz igen sokan meglehetősen egyforma rávezető feladatokat készítettek. Például az *Arany Dániel matematikaverseny 2016/17, Kezdők I. kategória, döntő, 1.* feladathoz összesen húszan készítettek rávezető feladatsort (ez volt a legnépszerűbb versenyfeladat) és közülük 13 fő (vagy csapat) készített olyan feladatot, amelyben egy négyzetszám lehetséges osztási maradékait kell vizsgálni. Ezen kívül még három megoldásban szerepelt ehhez nagyon hasonló jellegű feladat. A következőkben látható néhány példa ilyen feladatokra:


2 a) Igazak-e az alábbi állítások? Válaszodat indokold!

1.) Egy szám négyzete pontosan akkor osztható 3-mal, ha az eredeti szám is osztható 3-mal.

Megoldás: Igaz. Indirekt tegyük fel, hogy $a = 3k+1$, illetve $a = 3k+2$ alakú. Ekkor $a^2 = (3k+1)^2 = 9k^2+6k+1$, illetve $a^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$ $\Rightarrow 3 \nmid a^2$. Tehát csak akkor osztható a^2 3-mal, ha a is osztható 3-mal.

2.) Egy szám négyzete pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az eredeti szám is osztható 4-gyel.

Megoldás: Hamis, mert például: $4 \mid 2^2=4$, de $4 \nmid 2$.

3.) Egy szám négyzete pontosan akkor osztható 2-vel, ha az eredeti szám is osztható 2-vel.

a) Mutassuk meg, hogy a négyzetszámok 3-mal vett maradéka mindig 0 vagy 1 lehet.

m.o.: Egy szám három általános alakja lehet:

$3k$; $3k+1$; $3k+2$

Ha ezeket négyzetre emeljük, akkor:

$(3k)^2 = 9k^2$; $(3k+1)^2 = 9k^2+3k+1$; $(3k+2)^2 = 9k^2+6k+4$

Ha ezeket megvizsgáljuk 3-mal elosztva:

→ $9k^2$ osztható 3-mal: 0 maradékot ad.

→ $\underbrace{9k^2}_{3|} + \underbrace{3k}_{3|} + 1$: 1 maradékot ad

→ $\underbrace{9k^2}_{3|} + \underbrace{6k}_{3|} + 4$: 1 4 3-mal elosztva 1 maradékot ad.

Tehát a lehetséges maradékok: 0, 1.

b) Milyen maradékot adhat két négyzetszám összege 3-mal osztva?

Lehetséges eseteket sorba véve:

1. $(3k)^2 + (3l)^2 = 3(3k^2+3l^2)$ → 0 maradék
2. $(3k)^2 + (3l+1)^2 = 3\cdot(3k^2+3l^2+2l)+1$ → 1 maradék
3. $(3k)^2 + (3l+2)^2 = 3\cdot(3k^2+3l^2+4l+1)+1$ → 1 maradék
4. $(3k+1)^2+(3l+1)^2 = 3\cdot(3k^2+2k+3l^2+2l)+2$ → 2 maradék
5. $(3k+1)^2+(3l+2)^2 = 3\cdot(3k^2+2k+3l^2+4l+1)+2$ → 2 maradék
6. $(3k+2)^2+(3l+2)^2 = 3(3k^2+4k+1+3l^2+4l+1)+2$ → 2 maradék

⇒ osztási maradékok összeadódnak

(négyzetszám 3-mal osztva 0 v. 1 maradék → 2 négyzetszám összege 3-mal osztva $0+1=1$, $1+1=2$, $0+0=0$)

Az első fordulóhoz tartozó instrukcióinkat tartalmazó levelet 2019. április 27-én küldtük ki. Ennek a fordulónak a leadási határideje 2019. május 7. volt. A második forduló kezdete 2019. május 14., határideje pedig 2019. május 27. volt. Általánosságban észrevehető volt, hogy a második fordulóra már jobban elfáradtak a résztvevők, vagy kevesebb idejük és energiájuk maradt a kutatásban való részvétellel foglalkozni, mivel ekkor már elkezdődött a félév végi zárthelyi-időszak és a vizsgaidőszak is az egyetemen. Sokan megszokták, hogy a határidő után néhány nappal is elfogadjuk a feladataikat (hiszen mi minél nagyobb mintát szerettünk volna az országban lévő kevés matematika tanárszakos hallgatóból), viszont az utolsó forduló határideje a szemeszter végére esett, így a részvételért járó jutalompontokat már megkapták a hallgatók, akkor is, ha a legutolsó feladataikat meg nem küldték el. Így a fáradtság és a motiváció csökkenése miatt kevésbé alaposan kidolgozott munkákat küldtek.

Ahogy a fentiekben írtuk, a második fordulóban készített feladatok kevésbé jól sikerültek. Ezért, hogy a félév-végi fáradtság okozta különbségek hatását kiküszöböljük, azt is vizsgáltuk, hogy melyik feladatkészítési sorrend esetében javult, vagy javult jobban a résztvevők munkája. Ez alapján is elmondhatjuk, hogy a rávezető feladatkészítés segíti az önálló problémafelvetést.

A résztvevők által elkészített rávezető feladatsorokban a feladatok gyakran sokkal könnyebbek voltak, mint a versenyfeladat, amelyre fel kellene készíteniük a megoldót. Ennek következtében egyáltalán nem töltötték be a rávezető szerepüket.

Néhány esetben olyan feladat is szerepelt a beküldött rávezető feladatsorokon, ami egyáltalán nem kapcsolódott a versenyfeladathoz, amihez eredetileg készült. Ilyenkor valószínűleg a készítő csak nagy vonalakban megnézte, milyen témakörhöz kapcsolódik az általa kiválasztott versenyfeladat – például számelmélethez – majd írt egy a versenyfeladathoz nem illő, de algebra/számelmélet témakörű feladatot.

Kiválasztott feladat:

Kezdők I. kategória, 3. (döntő) forduló

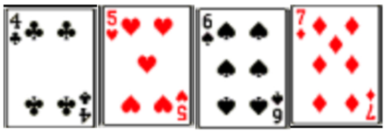
Feladatok

1. Valamely a, b, c prímszámokra és k pozitív egész számra teljesül a következő egyenlőség: $a^2 + b^2 + c^2 = 9k^2 + 13$. Adjuk meg k összes lehetséges értékét!

Rávezető feladatok:

1. **feladat:**

Az adott számkártyákból állítsd elő az összes lehetséges 4 jegyű számot! (Minden kártyát csak egyszer használhatsz!)



a) Mennyi az adott számok 3-mal vett osztási maradéka?
b) Miért?

5. Összefoglalás

Munkánk során a matematika tanárszakos hallgatók feladatkészítő és problémafelvető képességét vizsgáltuk különböző feltételek mellett. A résztvevő hallgatókat véletlenszerűen két csoportra bontottuk. Az első csoportnak először kellett rávezető feladatsort készítenie egy adott versenyfeladathoz. Ez után önállóan kellett feladatokat alkotniuk egy adott témához. A második csoportnak először kellett tematikus feladatokat készíteniük önállóan. Nekik ezt követően, a második fordulóban kellett egy adott versenyfeladathoz rávezető feladatsort írniuk.

Előzetesen úgy gondoltuk, hogy elvárható lenne leendő matematikatanároktól, hogy tudjanak elfogadható minőségű, iskolai gyakorlatban használható matematikafeladatokat alkotni, azonban az előző kutatásunk eredményeit ismerve számítottunk arra, hogy sok esetben ez nem fog megvalósulni (Rékasi, Stirling, 2019). A beküldött feladatok részletes elemzése után a következő megállapításokat tettük:

A hallgatók többször eltértek a feladat utasításaitól, nem jelöltek meg kitűzött életkort, vagy nem írtak megoldást a feladataikhoz. Ez több okból is probléma, például azért, mert így a javítás során nem lehetett eldönteni, hogy ha egy feladatban hiba van, akkor a megfogalmazás, vagy pedig a megoldás menete hibás. A résztvevők jelentős része nincs tisztában a középiskolás korú diákok tudásszintjével, nem megfelelő nehézségű feladatokat készítenek, vagy olyan ismeretekre, matematikai fogásokra kérdeznek rá, amiket középiskolás diákok nem ismernek. A rávezető feladatsort gyakran a hivatalos megoldás lépéseire készítették, így nem valósult meg, amit a feladat kitűzésekor kértünk: "Ezeket a feladatokat úgy készítsétek el, hogy ezek megoldása mozgósítsa a középiskolás/gimnazista diákok adott témakörben való jártasságát, készségeit, valamint szélesítse látókörüket. A rávezető feladatok ne felépítsék a feladatot...".

A második fordulóra a hallgatók nagy többsége elfáradt, így összességében ekkor gyengébb színvonalú feladatok születtek, függetlenül a készített feladatok típusától (rávezető vagy tematikus).

A rávezető feladatsor készítése segíti az önálló problémaalkotást, amit a saját, tematikus feladatok készítésével mértünk. Az egyetemet nem az ajánlott ütemterv szerint végző hallgatók gyenge feladatokat készítettek, gyengébbeket, mint bármely más hallgató. A matematika tanítása kurzusok elvégzésével nem hozható összefüggésbe a beküldött feladatok színvonala, vagyis, aki több matematika tanítása kurzust végzett már el, annak nem lettek jobbak a készített feladatai. A csoportmunka sok esetben nem valósult meg, így nem volt összevethető, hogy egyénileg, vagy csapatokban dolgoznak-e jobban a hallgatók.

Eredményeink több korábbi vizsgálat eredményeivel is összhangban vannak. Singer, Ellerton és Cai (2015) szükségesnek tartják, hogy a tanárokat és a diákokat problémafelvetésre képezzék, mert, bár gyakran képesek matematikailag helyes problémákat alkotni, ezek gyakran nem megfelelő minőségűek. Az általunk vizsgált feladatok többsége szintén helyes volt matematikailag, az azonban nem mondható el mindről, hogy iskolai keretek között alkalmazhatóak, megfelelő minőségűek lennének. Koichu és Kontorovich (2013) valamint Singer, Ellerton, Cai és munkatársaik (2015) kutatásai is azt mutatják, hogy a sikeres problémafelvetést segíti, ha a problémafelvetésben résztvevő hallgatók munkáját informálisan (képekkel, adatokkal, korábbi feladatokkal) segítik. Mi is azt láthattuk, hogy a meglévő keretek (például egy megoldott versenyfeladat) segítik a problémafelvetési - feladatkészítési folyamatot. Többen is hangsúlyozzák, hogy a tanárok vagy tanárszakos hallgatók színvonalas problémafelvetéséhez fontos, hogy rendelkezzenek problémamegoldási tapasztalattal és biztos matematikai tudással (L. Ma, 1999; Koichu, Kontorovich, 2015). A mi kutatásunkban ez látványosan megjelent abban, hogy azok a hallgatók, akik nehezen, többszöri próbálkozásra végzik el a matematika kurzusaikat, sokkal gyengébb pontszámokat értek el feladataikkal, mint minden más hallgató. Lavy és Shriki (2007) eredményei szintén megjelentek nálunk is: a leendő tanárok jelentős része szokványos, egymáshoz hasonló problémákat tűzött ki. Lavyék leírják, hogy a tanárjelöltek nem mernek újítani, tartanak attól, hogy nem fogják megoldani a saját maguk által kitűzött problémákat. A hozzánk beérkezett feladatok között valóban voltak olyanok, melyeket a feladat kitűzője helytelenül oldott meg, most is, és az egy évvel ezelőtti kutatásunkban is.

A Rosli, Capraro és munkatársaik kutatásában részt vevő hallgatóknak nehézséget okozott annak megítélése, hogy a kitűzött feladataik nehézségi szintjét megfelelően megítéljék, és hogy a kitűzött feladataikat adott évfolyamok tudásszintjéhez igazítsák. Mint korábban írtuk, a mi hallgatótársainknak is nehézséget okozott ez.

Konklúzióként elmondhatjuk, hogy érdemes a tanárszakos hallgatók problémafelvető képességét fejleszteni, hiszen matematikatanárokként fontos lesz számukra, hogy jól alkalmazható, érdekes feladatokat tudjanak alkotni. Számos nemzetközi kutatás hangsúlyozza a problémamegoldó és problémafelvető képességek fontosságát. Eredményeink alapján szükséges is ez a fejlesztés, és jó kezdeti módszernek látszik az, ha a problémafelvető tevékenységet már meglévő problémák elemzésével és variálásával, vagy hozzájuk kapcsolódó feladatok készítésével kezdjük. Ennek lehet az az oka, hogy így a rávezető feladatkészítés során már láttak jó problémát, alaposan körüljárták, foglalkoztak vele, gondolkodtak róla. Így némi rálátást nyerhettek a jó problémák karakterisztikájára, és saját problémák is eszükbe juthattak a problémamegoldási folyamat során. Összességében tehát azt mondhatjuk, hogy a matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési és feladatkészítési képessége:

Fejlesztendő, de nem reménytelen!

Hivatkozások:

(1.)Nemzeti Alaptanterv (2012) elérhetőség: http://ofi.hu/nemzeti-alaptanterv

Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva és Wintsche Gergely (2013). *Matematikai módszertani példatár*
elérhetőség:http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/160.pdf
(utoljára megnyitva: 2020. 02. 04.)

Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szeibert Janka 2017. *Matematikatanár szakos hallgatók probléma-felvetési készségeinek fejlesztése* (TDK dolgozat, 2017)

Cai, J., & Hwang, S. (2002). *Generalized and generative thinking in U.S. and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing.* The Journal of Mathematical Behavior, 21, 401–421.

Cai, Jinfa & Hwang, Stephen & Jiang, Chunlian & Silber, Steven. (2015). *Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions.* 10.1007/978-1-4614-6258-3_1.

Hawkins, D. 2000. *The roots of literacy.* Boulder: University Press of Colorado.

Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). *Dissecting success stories on mathematical problem posing: A case of the Billiard Task.* Educational Studies in Mathematics, 83, 71–86.

Lavy, Ilana and Shriki, Atara 2007. *Problem posing as a means for develeoping mathematical knowledge of prospective teachers.* Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Eds: Woo, J.; Lew, H.; Park, K.; Seo, D.) 129-136 2007.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Niss, Mogens(2015). *Mathematical competencies and PISA*, Elérhetőség:
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-10121-7_2
(utoljára megnyitva: 2020. 03.03.

Pehkonen, E. 1995. *Introduction: Use of open-ended problems.* ZDM, 1995/2 55–57.

Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina (2018): *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési és problémamegoldási készségeinek összehasonlítása.* TDK dolgozat

Rosli, Roslinda & Capraro, Mary & Goldsby, Dianne & Gonzalez, Elsa & Capraro, Robert & Onwuegbuzie, Anthony. (2015). *Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing.* 10.1007/978-1-4614-6258-3_16.

Silver, E. A. 1994. *On mathematical problem posing.* – In: For the Learning of Mathematics 14(No.1), p. 19-28.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). *An analysis of arithmetic problem posing by middle school students.* Journal for Research in Mathematics Education, 27(5), 521–539.

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). *Posing mathematical problems: An exploratory study.* Journal for Research in Mathematics Education, 27, 293–309.

Stickles, P. (2011). *An analysis of secondary and middle school teachers' mathematical problem posing.* Investigations in Mathematics Learning, 3 (2), 1–34.

1. melléklet:

Kedves Mindenki!

Köszönjük szépen az első fordulóban beküldött feladatmegoldásokat! Aki még esetleg nem küldött 30 pontnyit, Őket szeretnénk megkérni, hogy még pótolják ezt május 2. (csütörtök) reggel 8:00-ig.

Még 2 fordulója lesz a kutatásunknak ebben a félévben. Két részre osztottunk Benneteket. Az első csoportba tartozóknak, akik ezt az emailt kapjátok, a következő fordulóban az alábbi listából kell egy feladatot választaniuk:

- Oktv 2015/16, II. Kategória, döntő, 3. feladat https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2015_2016_donto/mat2_javut_d_oktv_1516.pdf

- OKTV 2017/18, II. Kategória, döntő, 1. feladat https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2017_2018_donto/mat2_javut_d_oktv_1718.pdf

- Arany Dani 2017/18, Kezdők/III. kategória, döntő, 1. feladat. http://www.bolyai.hu/ADverseny/2017/AD_2017-2018-kiadvany.pdf (17. Old.)

- Arany Dani 2017/18, Haladók/I. kategória, 2. forduló, 1. feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2017/AD_2017-2018-kiadvany.pdf (25. Old.)

- Arany Dani 2016/17, Kezdők I. kategória, döntő, 1. feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2016/AD_osszes_1617.pdf (10. Old.)

- Arany Dani 2016/17, Kezdők II. kategória, döntő, 1. feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2016/AD_osszes_1617.pdf (12. Old.)

- Arany Dani 2015/16, Haladók II. Kategória, második forduló, 1. feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2015/AD_osszes_1516.pdf (35. Old.)

Ezek a feladatok megoldásaikkal együtt szerepelnek a linkekben. A feladatotok az, hogy az általatok választott feladathoz készítsetek minimum 3, maximum 5 rávezető feladatot. Ezeket a feladatokat úgy készítsétek el, hogy ezek megoldása mozgósítsa a

középiskolás/gimnazista diákok adott témakörben való jártasságát, készségeit, valamint szélesítse látókörüket. A rávezető feladatok ne felépítsék a feladatot, hanem bizonyos lépéseire kérdezzenek rá/ ezekhez adjanak ötletet. Kérünk titeket, hogy a saját feladatokhoz készítsetek megoldást, vagy megoldásvázlatot is. Az elkészült műveket szokás szerint emailben fotózva vagy más olvasható formátumban szeretnénk kérni.
Ennek a fordulónak a leadási határideje: május 7. (kedd) reggel 8:00
Szeretnénk megkérni Titeket, hogy a csapatok/résztvevők mostantól ne beszéljék meg egymással, hogy mi a feladatuk. Ez az eredmények kiértékelése miatt fontos nekünk.
Nagyon hálásak vagyunk a munkátokért!
Köszönettel:
Annák

2. melléklet:

Kedves Mindenki!

Köszönjük szépen az első fordulóban beküldött feladatmegoldásokat! Aki még esetleg nem küldött 30 pontnyit, Őket szeretnénk megkérni, hogy még pótolják ezt május 2. (csütörtök) reggel 8:00-ig.

Még 2 fordulója lesz a kutatásunknak ebben a félévben. Két részre osztottunk Benneteket. Nektek, akik ezt az emailt kapjátok, a következő fordulóban az alábbi listából kell választanotok egy témakört, és mellé teljesen szabadon választható egy korosztály (9.-től 12. osztályig), valamint szint (pl.: fakt, alapóra, verseny,…stb.). Mindenkit kérünk, hogy a választott témát, korosztályt és szintet is írja fel a feladatok mellé.

- paradicsom
- utazás
- internet
- vasárnap
- boszorkány
- narancslé
- űrutazás

A választott szituációhoz kell minimum 3, maximum 5 db feladatot készíteni önállóan. A feladatok legyenek minél kreatívabbak, a cél, hogy keltsék fel az általatok választott középiskolai/gimnazista korosztály érdeklődését. Kérjük, hogy a kitalált feladatokhoz mellékeljetek mintamegoldást/ megoldásvázlatot is. Az elkészült műveket szokás szerint emailben fotózva vagy más olvasható formátumban szeretnénk kérni.

Ennek a fordulónak a leadási határideje: május 7. (kedd) reggel 8:00

Szeretnénk megkérni Titeket, hogy a csapatok/résztvevők mostantól ne beszéljék meg egymással, hogy mi a feladatuk. Ez az eredmények kiértékelése miatt fontos nekünk.

Nagyon hálásak vagyunk a munkátokért!

Köszönettel:

Annák

3. melléklet:

Kedves Mindenki!

Köszönjük szépen az előző fordulóban beküldött feladatmegoldásokat! Aki még esetleg nem küldte el, Őket szeretnénk megkérni, hogy még pótolják ezt május 19. (vasárnap) este 20:00-ig.

Ez a kutatásunk utolsó fordulója ebben a félévben. Akik ezt az emailt kapjátok, ebben a fordulóban az alábbi listából kell választanotok egy témakört, és mellé teljesen szabadon választható egy korosztály (9.-től 12. osztályig), valamint szint (pl.: fakt, alapóra, verseny,…stb.). Mindenkit kérünk, hogy a választott témát, korosztályt és szintet is írja fel a feladatok mellé.

- paradicsom
- utazás
- internet
- vasárnap
- boszorkány
- narancslé
- űrutazás

A választott szituációhoz kell minimum 3, maximum 5 db feladatot készíteni önállóan. A feladatok legyenek minél kreatívabbak, a cél, hogy keltsék fel az általatok választott középiskolai/gimnazista korosztály érdeklődését. Kérjük, hogy a kitalált feladatokhoz mellékeljetek mintamegoldást/ megoldásvázlatot is. Az elkészült műveket szokás szerint emailben fotózva vagy más olvasható formátumban szeretnénk kérni.

Ennek a fordulónak a leadási határideje: május 27. (hétfő) reggel 8:00

Nagyon hálásak vagyunk a munkátokért!

Sok sikert kívánunk a zh-khoz és a vizsgákhoz :)

Köszönettel:

Annák

4. melléklet:

Kedves Mindenki!

Köszönjük szépen az előző fordulóban beküldött feladatmegoldásokat! Aki még esetleg nem küldte el, Őket szeretnénk megkérni, hogy még pótolják ezt május 19. (vasárnap) este 20:00-ig.

Ez a kutatásunk utolsó fordulója ebben a félévben. Akik ezt az emailt kapjátok, ebben a fordulóban az alábbi listából kell egy feladatot választanotok:

- Oktv 2015/16, II. Kategória, döntő, 3.
feladat https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2015_2016_donto/mat2_javut_d_oktv_1516.pdf

- OKTV 2017/18, II. Kategória, döntő, 1.
feladat https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2017_2018_donto/mat2_javut_d_oktv_1718.pdf

- Arany Dani 2017/18, Kezdők/III. kategória, döntő, 1.
feladat. http://www.bolyai.hu/ADverseny/2017/AD_2017-2018-kiadvany.pdf (17. Old.)

- Arany Dani 2017/18, Haladók/I. kategória, 2. forduló, 1.
feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2017/AD_2017-2018-kiadvany.pdf (25. Old.)

- Arany Dani 2016/17, Kezdők I. kategória, döntő, 1.
feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2016/AD_osszes_1617.pdf (10. Old.)

- Arany Dani 2016/17, Kezdők II. kategória, döntő, 1.
feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2016/AD_osszes_1617.pdf (12. Old.)

- Arany Dani 2015/16, Haladók II. Kategória, második forduló, 1.
feladat http://www.bolyai.hu/ADverseny/2015/AD_osszes_1516.pdf (35. Old.)

Ezek a feladatok megoldásaikkal együtt szerepelnek a linkekben. A feladatotok az, hogy az általatok választott feladathoz készítsetek minimum 3, maximum 5 rávezető feladatot. Ezeket a feladatokat úgy készítsétek el, hogy ezek megoldása mozgósítsa a középiskolás/gimnazista diákok adott témakörben való jártasságát, készségeit, valamint szélesítse látókörüket. A rávezető feladatok ne felépítsék a feladatot, hanem bizonyos lépéseire kérdezzenek rá/ ezekhez adjanak ötletet. Kérünk titeket, hogy a saját feladatokhoz készítsetek megoldást, vagy megoldásvázlatot is. Az elkészült műveket szokás szerint emailben fotózva vagy más olvasható formátumban szeretnénk kérni.

Ennek a fordulónak a leadási határideje: május 27. (hétfő) reggel 8:00

Nagyon hálásak vagyunk a munkátokért!

Sok sikert kívánunk a zh-khoz és a vizsgákhoz :)

Köszönettel:

Annák