

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

RÉKASI ANNA – STIRLING ANNA KRISZTINA

---

**A PROBLÉMAFELVETÉS ÉS  
FELADATKÉSZÍTÉS EGY LEHETSÉGES  
MEGJELENÍTÉSE MATEMATIKAÓRÁN**

---

MATEMATIKA – FIZIKA OSZTATLAN TANÁRSZAK

TDK

Témavezető:

**Szabó Csaba**

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

# TARTALOMJEGYZÉK

Tartalomjegyzék	2. old.
Absztrakt	3. old.
1. Bevezetés	3. old.
1.1. Problémafelvetés és feladatkészítés	4. old.
1.2. Miért beszélünk feladatkészítésről és problémafelvetésről is?	5. old.
1.3. Miért fontos a problémamegoldás matematikaórán?	6. old.
1.4. Példák osztálytermi gyakorlatra	7. old.
2. A kutatás leírása	12. old.
3. Interjúk a résztvevő tanárokkal	14. old.
4. Összegzés	25. old.
5. Előre tekintés	31. old.
Hivatkozások	33. old.
Mellékletek	37. old.

## **Absztrakt**

A diákok problémafelvetési képességének vizsgálata egyre hangsúlyosabbá válik a matematikadidaktika kutatásában. A problémafelvetés képessége a NAT alapkompenciái között is szerepel. Ennek ellenére ritkán jelennek meg az oktatásban olyan feladatok, amik kifejezetten ezt a kompetenciát hivatottak fejleszteni. A 2019/20-as tanév tavaszán kidolgoztunk egy olyan módszert, amellyel felső tagozatos és középiskolai matematikaórákon foglalkozhatnak a diákok problémafelvetéssel és feladatkészítéssel. A módszert úgy alakítottuk ki, hogy távolléti oktatásban is alkalmazható legyen és felkerült az oktatási hivatal honlapjára is, mint a tanulást támogató hasznos anyag. A dolgozatban bemutatjuk ezt az általunk kidolgozott módszert, valamint a diákok által felvetett problémák és feladatok értékelésére kidolgozott, kutatók számára készült szempontrendszerünket is, amit korábbi tapasztalataink és a nemzetközi szakirodalom alapján állítottunk össze. Négy iskola kilenc csoportja kipróbálta a módszert 2020 tavaszán. A résztvevő szaktanárokkal interjúkat készítettünk, melyek alapján tovább fejlesztettük a módszert és a komplex kutatói szempontrendszerét.

## **1. Bevezetés**

A matematika oktatás egyik fontos szerepe, hogy a tanulók a mindennapi éltükből vett jelenségeket fel tudják írni matematikai modellek segítségével. Ez a matematikai modellalkotás megjelenik például szöveges feladatok értelmezésekor és megoldásakor, amikor a valamilyen valós életről (vagy meséből) vett problémát lefordítunk a matematika nyelvére, majd a matematikai probléma megoldása után a kapott eredményt visszafordítjuk az eredeti problémaszituáció kontextusába. Ugyanígy matematikai modellalkotással foglalkozik az, aki matematikai feladatokat, problémákat alkot. Ezen dolgozat témája a közoktatásban tanuló diákok problémafelvetési, modellalkotási, illetve feladatkészítési képességének vizsgálata, a feladatkészítés, mint tanulói tevékenység megjelenése matematikaórán, és egy ehhez kapcsolódó módszer bemutatása.

Korábban foglalkoztunk már az ELTE matematika tanárszakos hallgatóinak problémafelvető, feladatkészítő képességeivel (Rékasi, Stirling 2018, 2019), jelen dolgozatban a problémafelvetés és feladatkészítés tevékenységének vizsgálatát általános iskolás középiskolás korú diákokra is kiterjesztjük.

A tudományos vizsgálatok során a problémafelvetésre régóta kiemelten fontos szellemi tevékenységként tekintenek. Einstein szerint egy érdekes probléma megfogalmazása gyakran fontosabb, mint maga a megoldás (Einstein & Infeld 1938). Kilpatrick észrevette, hogy a való életben gyakran a problémamegoldónak problémákat kell felvetnie vagy felfedeznie a problémamegoldás folyamata során (Kilpatrick 1987). Jacques Hadamard a jó problémák felismerésének és felvetésének képességét a magas színvonalú matematika fontos részének tartotta (Hadamard 1945). Ezek szerint, ha a matematikaoktatás célja a diákok matematikai gondolkodásának kialakítása és fejlesztése, ésszerűnek tűnik, hogy a problémafelvetés is legyen a tananyag része.

### 1.1. Problémafelvetés és feladatkészítés

Az oktatásban a matematika elsajátításához és műveléséhez elengedhetetlen, hogy létezzen megfelelő matematikafeladatok és -problémák, amiken keresztül a diákság megismerkedhet a matematikai gondolkodással, amik megoldásával mélyülhet a matematikatudásuk. Természetesen adódik a kérdés, hogy *honnan* jönnek ezek a „megfelelő” feladatok és egyáltalán *mitől jó* a jó feladat? A problémafelvetés kutatásában ilyen és ehhez hasonló kérdésekre keressük a választ. (Singer 2011.)

A problémafelvetés modernkori kutatását Silver és Kilpatrick munkái alapozták meg (Silver 1994; Kilpatrick 1987). Vizsgálata az utóbbi egy-másfél évtizedben lett a matematika-didaktika vizsgálatának egyik központi témája (Koichu et.al. 2011, Cai et.al. 2015).

A problémafelvetés a versenyzőknek és a felvételizőknek is nagyon hasznos és szükséges, hiszen sok olyan feladat van, amihez eredeti formájában esetleg nem tudnak hozzáfogni, csak azt például részfeladatokra bontva vagy variálva. A problémafelvetés kutatása ezért is aktuális és fontos. Pólya György (Pólya 1977) is leírja, hogy a problémamegoldás folyamatában fontos szerepe van az új problémák felvetésének. Pintér Klára (Pintér 2012) doktori disszertációjában a problémamegoldás több különböző modelljét is leírja, melyekben szintén szerepet kap a problémafelvetésnek valamilyen módja – mint például új kérdések felvetése, vagy a feladat variálása.

Florence Mihaela Singer, Nerida F. Ellerton és Jinfai Cai szerkesztésében 2015-ben megjelent egy könyv *Mathematical Problem Posing* címmel, melyben számos tanulmány vizsgálja a problémafelvetés kutatásának mai helyzetét (Cai et.al. 2015). A könyvben szerepel egy tanulmány, mely összefoglalja a téma legfontosabb kérdéseit Singer, Ellerton és Cai szerint:

a) *Miért fontos a problémafelvetés az iskolai matematikaoktatásban?*

- b) Miért nem képesek a diákok és a tanárok matematikailag fontos problémákat alkotni?
- c) *Lehet-e hatékonyan képezni a diákokat és a tanárokat a magas színvonalú problémák alkotására?*
- d) Mit tudunk a problémafelvetés kognitív folyamatáról?
- e) Milyen kapcsolat van a problémamegoldás és a problémafelvetés között?
- f) Alkalmas-e a problémafelvetés a matematikai tanulási eredmények és a kreativitás vizsgálatára?
- g) Hogyan jelenik meg a problémafelvetés a tantervben?
- h) *Hogyan teljesít egy olyan osztály, ahol a tanulók foglalkoznak problémafelvetéssel?*
- i) Hogyan lehet használni a technológiát a problémafelvetésben?
- j) *Milyen hatással van a diákok eredményeire, ha foglalkoznak problémafelvetéssel?*

Jelen munkánk a dőlt betűvel kiemelt (a, c, h, j) kérdésekkel kapcsolatos leginkább. Korábban vizsgáltuk a b) és e) kérdéseket is (Rékasi, Stirling 2018, 2019).

## **1.2. Miért beszélünk feladatkészítésről és problémafelvetésről is?**

Matematika-feladatok osztályozásakor az angol nyelvű szakirodalom megkülönböztet *problem*, *task* és *exercise* elnevezésű feladatokat. Ennek mintájára nevezzük mi az elkészült „matekpéldákat” összefoglalóan feladatoknak, ezeken belül pedig megkülönböztetünk gyakorlófeladatokat és problémákat. A matematika-feladatok osztályozása többféle szempont alapján történhet. A Módszertani példatárban (Vásárhelyi 2013) a feladatok osztályozásáról a következőt olvashatjuk: “Egy feladat zárt, ha megadott kezdeti feltételek mellett keressük meghatározott kérdésekre a választ. Így a tankönyvekben, példatárakban szereplő feladatok többsége zártnak tekinthető. Egy feladat megoldása során valamilyen kezdeti állapotból (kiindulási feltételek) valamilyen végállapotba (a feltett kérdés megválaszolása) szeretnénk eljutni. *Ha egy feladat esetében a kezdeti állapotból a végállapotba jutás módja nem adott közvetlenül, azaz nehézségekbe ütközünk a megoldás során, akkor problémáról beszélünk.* Egy feladat problémakaraktere objektív és szubjektív tényezőktől is függ, hiszen ugyanaz a kérdésfeltevés lehet például a megoldó felkészültségétől függően nehéz probléma, vagy éppen rutinfeladat. A nyitott feladatok általában nem oldhatók meg rutinszerűen, így helyette a ”nyitott probléma” elnevezés gyakran helytálló lehet, és valószínűleg ezért is használják így gyakran (Pehkonen 1995).”

A nemzetközi irodalom általában *problem posing*-ról, azaz problémafelvetésről beszél, a „non-problem” jellegű eredményekre sokszor a problémafelvető tevékenység rossz (vagy legalábbis nem elég jó) melléktermékeként tekintetek. Mi azonban fontosnak tartjuk a nem probléma jellegű gyakorlófeladatok alkotásának képességét is, ezért a vizsgálatunkat erre is kiterjesztjük. Ahogy az írás-olvasás megtanulásakor szükség volt arra, hogy egy-egy betűvel vagy betűelemmel oldalakat teleírjunk, úgy ennek analógiájaképpen elmondhatjuk, hogy a jó matematikai problémamegoldást pedig gyakorlófeladatok (*exercise*-ok) megoldásának kell megelőznie. Gyakorló matematikatanárokkal történt beszélgetéseinkből is az derült ki, hogy szükség lenne a tankönyvekben és feladatgyűjteményekben több és változatosabb nehézségű gyakorlófeladatra, mert ezek hiányában a diákoknak nehézséget okoz a tananyag elsajátítása és begyakorlása (Rékasi, Stirling 2019).

### **1.3. Miért fontos a problémafelvetés matematikaórán?**

A matematikaoktatásban mindig is egyértelmű volt, hogy a problémamegoldásnak fontos szerepe van a matematikai ismeretek elsajátításában. Egy meglehetősen korai példa erre a Krisztus előtti második évezredben írt Rhind papyrusz, ami aritmetikai, algebrai és geometriai feladatokat tartalmaz megoldásokkal (Imhausen 2016). Ennél kevésbé egyértelmű az a kérdés, hogy a problémafelvetésnek van-e helye és haszna a matematikatanításban.

Több okból is hasznos, ha a diákok matematikaórán foglalkoznak problémafelvetéssel és feladatkészítéssel. Egyrészt a problémafelvetés eszközöket ad a kezükbe, amikkel nehezebb, elsőre nem megfogható problémákat átalakíthatnak ismerősebb, jobban kezelhető problémákra. Másrészt, több, diákok problémafelvetésével foglalkozó kutatás is leírja, hogy a feladatkészítés, problémafelvetés és egymás problémáiban való elmélyülés nagymértékben növeli a diákok matematikatudását (Cunningham 2004, Rosli et. al. 2014). Rendszerezi, mélyíti a feladatok témakörével kapcsolatos ismereteket és mindezt egy különleges, szórakoztató formában teszi (Van Harpen, Presmeg 2015).

A szakirodalomban különböző kifejezéseket használnak a problémafelvetéssel kapcsolatban, melyek nem minden esetben vannak részletesen elmagyarázva. Gyakran megjelennek a „problem finding”, „problem sensing”, „problem formulating”, „creative problem discovering”, „problemizing”, „problem creating”, és „problem envisaging” kifejezések (Van, H. & Presmeg, Norma 2015; Dillon 1982; Jay & Perkins 1997). A problémafelvetés egy lehetséges meghatározása: az a folyamat, melynek során a problémafelvető matematikai tapasztalatok alapján konkrét helyzetek interpretációit

konstruálja, és ezek alapján értelmes matematikai problémákat fogalmaz meg (Van, H. & Presmeg, Norma 2015; Stoyanova & Ellerton 1996).

Stoyanova és Ellerton (Stoyanova & Ellerton 1996) a diákok problémafelvetési helyzetét háromféle kategóriába sorolja: szabad („*free*”), részben-strukturált („*semi-structured*”) és strukturált („*structured*”). Szabadnak akkor neveznek egy problémafelvetési szituációt, ha a problémafelvetést végző diáknak egy adott kitalált, vagy természetű helyzethez kell matematikai problémát kitalálnia. Részben-strukturált a problémafelvetés, ha a diákok egy nyílt végű szituációt kapnak és ezt kell megvizsgálniuk, korábbi matematikai tapasztalataik és ismereteik alapján kiegészíteniük és problémákat gyártani hozzá. Strukturált problémafelvetésről pedig akkor beszélnek, amikor egy már meglévő matematikai probléma alapján kell további kérdéseket feltenniük a diákoknak. Ezekre a következő pontban mutatunk példát.

#### **1.4. Példák osztálytermi gyakorlatra**

A diákok tanórai problémafelvetésének vizsgálata meglehetősen újkeletű (English 1998; Silver & Cai 1996; Papadopoulos 2020). Az alábbiakban néhány kutatás módszereit és diákok által készített feladatokat mutatunk be különböző országokból és korosztályokból. Ezek érdekesek lehetnek a bennük megjelenő különböző probléma-felfogások, problémafelvetési helyzetek és a diákok által felvetett problémák miatt is. Az itt felsorakoztatott példák későbbi magyarországi eredményekkel is összevethetők lesznek.

Egyes kutatási eredmények szerint már általános iskolások is képesek értelmes és bizonyos szempontból jó matematikai problémák felvetésére. Blomqvist és Gade (Blomqvist & Gade 2015) Charlotta Blomqvist osztályával (22 fő) végeztek felmérést, két tanév során. Ekkor diákok negyedik és ötödik osztályba jártak. A diákok három különböző szakaszban készítettek matematikai problémákat „lappar”-ok (papírcédulák, amiken tankönyvbeli szavak, számok voltak) segítségével.

A három szakasz, melyekben a svéd diákok problémafelvetéssel foglalkoztak:

- i) írásbeli kérdések megfogalmazása (3 alkalom)
- ii) problémafelvetés párban (5 alkalom)
- iii) problémák megfogalmazása egymásnak (3 alkalom)

Gade és Blomqvist leírják, hogy a diákok nagy lelkesedéssel készítettek egymással és egymásnak feladatokat, és szívesen megvitatták egymással az egyes problémákat.

Xianwei Van Harpen és Norma Presmeg középiskolás diákokkal végzett kísérletet az Egyesült Államokban és Kínában (Van, H. & Presmeg 2015). 55 jiaozhoui, 44 sanghaji, 13 tizenegyedik osztályos és 17 tizenkettedik osztályos amerikai diák vett részt a kutatásban, akik mind emelt szinten tanultak matematikát az iskoláikban. Kínában nagy kulturális különbségek vannak területi tagozódás szerint, ezért vizsgálta Van Harpen és Presmeg egy déli nagyváros diákjait és egy északi kisváros (Jiaozhou kb. 840 000 fős) diákjait is. Az egyesült államokbeli diákok egy közép-nyugati, kb. 120 000 fős városban tanultak.

A diákok matematikatudását és képességeit egy „mathematics content test” (matematikai tartalmú teszt) és egy „problem-posing test” (problémafelvetési teszt) alapján mérték fel. A matematikai ismeretek felmérésére szolgáló részhez a National Assessment of Educational Progress (NAEP) 12. évfolyamoknak szóló tesztjét adaptálták, ami az USA-ban egy folyamatos, reprezentatív országos felmérés az amerikai diákok tantárgyi tudásáról és képességeiről. Ez a teszt 50 kérdésből állt, aritmetika, algebra, geometria, statisztika és valószínűségszámítás témakörökben. Az amerikai hallgatók 36,5, a sanghaji hallgatók 36,2, a jiaozhoui diákok 45,8 pontos átlagot értek el az elérhető 50-ből. A három csoportból 32 fő ért el 39 vagy több pontot, velük később interjú is készült.

A problémafelvetés során a diákoknak szabad, részben-strukturált és strukturált helyzetben kellett problémákat felvetniük. A feladat-utasításokra olvashatunk három példát a cikkben:

1. feladat (szabad problémafelvetési helyzet): Tíz lány és tíz fiú áll egy sorban. Vessen fel minél több problémát, ami valamilyen módon felhasználja a megadott információkat!
2. feladat (félig-strukturált helyzet): A megadott ábrán látható egy háromszög és a bele írható köre. Alkosson minél több problémát, melyek valamilyen módon kapcsolódnak ehhez a képhez!
3. feladat (strukturált helyzet): Tegnap este buli volt az unokatestvéred házában és a csengő tízszer szólalt meg. Első csengetésre csak egy vendég érkezett. Valahányszor megszólalt a csengő, hárommal több vendég érkezett, mint ahányan az előző csengésre érkeztek.
  - a) Hány vendég lép be a tizedik alkalommal? Válaszát részletezze!
  - b) Tegyen fel minél több kérdést, ami valamilyen módon kapcsolódik ehhez a feladathoz!

Van Harpen és Presmeg interjúkat is készített a diákokkal. Ezekből kiderült, hogy bár a diákok korábban nem nagyon foglalkoztak problémafelvetéssel, mégis, a felmérés alapján mindannyian képesek voltak valódi/megfelelően jó problémákat felvetni a teszt során, bár ezek



nagyon különbözőek voltak. Az interjúk szerint az amerikai diákok számára volt talán a legkönnyebb a feladat, ők a problémafelvetést „something fun”-nak találták, csak hagyták, hogy eszükbe jussanak a dolgok. A sanghaji diákok nehezen találták az új problémák kitalálását, mert nagyon sok problémát oldottak meg már korábban, amiktől nehezen tudtak elvonatkoztatni. A jiaozhoui diákok a problémák matematikai tartalmára fektették a hangsúlyt. A matematikai ötletet pedig megpróbálták a valósághoz kapcsolni és így alkotni problémákat.

A diákok mindannyian úgy látták, hogy a problémafelvető tevékenység segíti a matematikatudás rendszerezését és fejlesztő hatású, azonban, főként, mivel az egyetemi felvételikben problémamegoldásra van szükség, ezt sokkal fontosabb gyakorlatnak tartják a problémafelvetésnél.

Rosli, Capraro és Capraro tanulmányukban több olyan kutatást is vizsgáltak, melyek diákok problémafelvetésével foglalkoztak (Rosli et. al. 2014). A tanulmányuk célja az volt, hogy vizsgálja és rendszerezze a problémafelvetés hatékonyságát tárgyaló kutatásokat, és bemutassa a problémafelvetési tevékenység szerepét a matematikatanításban. Amikor a diákok problémafelvetéssel foglalkoznak matematikaórán, diákközpontúbbá válik az oktatás azzal, hogy a hallgatók részt vehetnek a saját problémák megalkotásában és megoldásában (Barlow és Cates 2006). Mikor a diákok saját problémákat vetnek fel, olyan témákban, amik fontosak számukra, a megfogalmazott problémákat sajátjuknak érezhetik, ez pedig növeli a felelősségtudatukat. Emellett azzal, hogy a diákok egymás problémáit is megoldják, vizsgálják és kritizálják, a matematikatudásuk is jelentősen nő (Cunningham 2004).

Rosli, Capraro és Capraro különböző kulcsszavak (pl. “problem posing”, “problem writing”, “problem formulation”, “problem generation”) alapján kerestek a témával foglalkozó kutatásokat. Mi ezek közül kiválasztottunk néhányat, amik a saját, matematikaórákon zajló kísérleteinkhez hasonlóak:

Forrás		Minta elemszáma	Résztevők (adatai?)	Problémafelvetési stratégia
Demir (2005)	Msc szakdolgozat	82	10. évfolyam, törökország	„what-if-not” (mi lenne, ha) stratégia, részben strukturált és strukturált szituációk, szabad problémafelvetés
Dickerson (1999)	doktori disszertáció	200	7.évfolyam, USA	„what-if-not” stratégia, strukturált szituációk,

				szituációk eljátszása, nyílt végű feladatok
English (1997)	Educational Studies in Mathematics	27	4.évfolyam, Ausztrália	probléma-struktúrák felismerése, problémakészítés adott elemekből, új problémák modellezése már meglévő struktúrák alapján
English (1998)	Journal for Research in Mathematics Education	54	3.évfolyam, Ausztrália	„Creation of number sentences problems,” problémafelvetés nem cél-specifikus szituációk alapján, kép alapján és irodalom alapján
Kesan, Kaya, & Guvercin (2010)	International Online Journal of Educational Sciences	64	8.évfolyam, Kazahsztán	nincs kijelölt stratégia
Priest (2009)	doktori disszertáció	31	7.évfolyam, Ausztrália	strukturált szituációk, problémafelvető tevékenységek problémák vizsgálatával
Schloemer (1994)	doktori disszertáció	40	10- 11.évfolyam, USA	„what-if-not” stratégia
Xia, Lu, & Wang (2008)	Journal of Mathematics Education (Experiment 1)	327	„Junior high school”, Kína	nincs kijelölt stratégia

Xia, Lu, & Wang (2008)	Journal of Mathematics Education (Experiment 2)	213	9.évfolyam, Kína	nincs kijelölt stratégia
------------------------	---	-----	------------------	--------------------------

Rosli, Capraro és Capraro összegzéséből is látható, hogy az iskolai problémafelvetést vizsgáló kutatások nagyon sokfélék. Különböző korú, elemszámú mintákat vizsgálnak, a táblázatban nincs feltüntetve, de nagyon gyakran a matematikában tehetséges gyerekekkel foglalkoznak a kutatók és nem az „átlagos” osztályokkal. Szintén nem tüntettük fel, de sok kutatás kifejezetten leendő tanárokat (gyakran leendő alsó tagozatos tanárokat) vizsgál. Korábbi kutatásainkban (Rékasi, Stirling 2018, 2019) mi is kifejezetten matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési és feladatkészítési képességeit vizsgáltuk.

Láthattuk, hogy a „*what-if-not*” stratégiát Többször használták különböző osztályokban a diákok problémafelvető tevékenységéhez. Ennek a stratégiának a lényege, hogy egy már meglévő feladatot oly módon variálunk, hogy valamilyen elemét változtatjuk. Erre egy példa: „*itt van egy feladat egy szabályos háromszöggel, mi lenne, ha nem szabályos lenne, hanem egyenlőszárú?*”(1.)

Ilana Lavy és Irina Bershadsky (Lavy, Bershadsky 2003) esettanulmányukban a „*what-if-not*” stratégiát kifejezetten geometriafeladatok készítéséhez használták. A kutatásban huszonnyolc tanárszakos hallgató vett részt, akiknek adott problémák alapján kellett új problémákat felvetniük a „*what-if-not*” stratégiával. Lavy és Bershadsky szerint ez a stratégia arra készítheti a tanulót, hogy újragondolja az általa használt (geometriai) fogalmakat, miközben új problémákat generál, kapcsolatokat létesít az adott és az új fogalmak között, és ennek eredményeként elmélyíti azok megértését.

Kovács Zoltán (Kovács 2017) tanárszakos hallgatók problémafelvetését vizsgálta, speciálisan a „*what-if-not*” technika segítségével. Az esettanulmány bemutatja, hogy a leendő tanárok problémafelvető képessége fejlesztendő de fejleszthető is, és a problémafelvető képesség összefüggésben áll a problémamegoldó képességgel.

## 2. A kutatás leírása

Kutatásunk célja az volt, hogy elkészítsünk egy középiskolában és felső tagozaton használható keretrendszert, mellyel a diákok problémafelvetési, feladatkészítési tevékenységben vehetnek részt. Ezt a módszert először speciálisan a 2020 tavaszán zajló távolléti oktatásra dolgoztuk ki, de alkalmazható osztálytermi, jelenléti oktatásban is. A keretrendszernek része a problémafelvetési/feladatkészítési tevékenység módjának leírása, valamint az elkészült feladatok vizsgálatához háromféle értékelési szempontrendszer (diákoknak, szaktanároknak és nekünk kutatóknak) is. Ezeket a későbbiekben be fogjuk mutatni.

Az elmúlt két év során matematika tanárszakos hallgatók körében vizsgáltuk a problémafelvetés képességét (Rékasi, Stirling 2018, 2019). Ezen kutatásaink tapasztalatai alapján kialakult bennünk egy kép arról, hogy milyen szempontok szerint célszerű vizsgálni a problémafelvetési, feladatkészítési képességet. Tapasztalataink alapján kidolgoztunk egy módszert, melynek segítségével felmérhető, a későbbiekben pedig fejleszhető a középiskolás korú diákok problémafelvetési, feladatkészítési képessége. Ezt a módszert később a felhasználók segítségével finomítottuk. A folyamatot a 2019/20-as tanév tavaszán, a távoktatás keretein belül több magyarországi középfokú oktatási intézmény tanárai kipróbálták osztályaikban/csoportjaikban. A következő iskolákban próbálták ki a módszert:

- Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (egy tanárnő 3 csoportja)
- Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium (egy tanárnő egy csoporttal)
- ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium (egy tanárnő 3 csoportja)
- Németh László Gimnázium, Általános Iskola Hódmezővásárhely (egy tanárnő 2 csoportja)

A folyamathoz készítettünk a tanároknak egy dokumentumot (1. melléklet), melyben leírtuk, hogy miből áll a kutatásunk, a felmérő és fejlesztő módszer. Ezt a dokumentumot az Oktatási Hivatal is átvette, honlapjára is felkerült, így bármely iskola tanárai elérhették azt (1.).

A résztvevő csoportokba járó diákok 3-4 főből álló csapatokat alkottak. Ezen csapatok megalakulásának módját a csoportot tanító szaktanárra bíztuk. Ez után a diákoknak ezekben a csapatokban kellett egy minimum 4-5 feladatból álló feladatsort készítenie. Ezen a feladatsoron nem kellett egymáshoz kapcsolódónak lennie a feladatoknak. Az általunk kiküldött dokumentumban ismertettünk feladatkészítési stratégiákat:

a) feladatkészítés megadott adatok alapján:

*pl.: kapnak egy táblázatot egy cukrászda forgalmáról, vagy egy kosárcsapat eredményeiről...*

b) új feladat létrehozása meglévő problémák alapján, vagy azokhoz kapcsolódóan (feladatvariálás):

*pl.: „what-if-not” technika: itt van egy feladat egy szabályos háromszöggel, mi lenne, ha nem szabályos lenne, hanem egyenlőszárú? ... ezzel a technikával felfedezhetők új problémák már meglévő feladatok variálásával.*

c) feladat készítése valós szituáció modellezésével

*pl.: banki, pénzügyi szituációk modellezése*

d) adott témára készített feladatok:

*pl.: űrhajó, kosárlabda, bevásárlóközpont, kertészkedés, túrázás, filmek, buszok...*

Ezek közül a stratégiák közül a tanárok szabadon válogathattak, illetve ezek ismertetésének módja is rájuk volt bízva.

Az elkészült feladatokat a diákok a szaktanárnak küldték el. Javasoltuk, hogy ezekhez a feladatsort készítő csapat készítsen, és adjon be saját megoldást is. A beérkezett feladatokat a szaktanár átnézte, és egy általunk meghatározott szempontrendszer szerint értékelte (2. melléklet). Az értékelés Google Forms-ban történt. Erre mi hoztunk létre egy felületet, így kaphattunk visszajelzést a diákok eredményéről, illetve ide töltötték fel nekünk a tanárok a kész feladatsorokat, lehetőleg a diákok saját megoldásaival együtt.

Ez után, a szaktanár által átnézett és értékelt feladatsorokat másik csapatok kapták meg, akiknek meg kellett oldaniuk azt. A megoldásaikat szintén egy általunk létrehozott Google Forms felületre kellett feltölteniük, továbbá ugyanott tudták értékelni a kapott feladatokat egy, a tanárihoz nagymértékben hasonlító, szempontrendszer alapján (2. melléklet).

Ezt a folyamatot a szaktanárok többször is végig csinálhatják csoportjaikkal. Ebben az esetben az első forduló szolgál annak felmérésére, hogy a tanulók hogyan tudnak csapatban problémát felvetni, feladatot készíteni. A következő fordulókkal, és a folyamatos visszajelzésekkel pedig fejleszthetik a diákok problémafelvetési, feladatkészítési képességét.

Végül a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumból, és a Debreceni Fazekas Mihály Gimnáziumból érkeztek be hozzánk feladatsorok és megoldások. A Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanárnője két fordulót is végig csinált a csoportjaiba járó diákokkal. Az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló gimnázium és Kollégiumból és Németh László Gimnázium, Általános Iskola Hódmezővásárhely

tanárnőjétől egyelőre nem kaptunk feladatokat, viszont kapcsolatban vagyunk a tanárnőkkel, akik jelezték nekünk, hogy elkezdtek csoportjaikkal a módszer kipróbálását.

### 3. A szempontrendszerünk

A problémafelvetés modernkori vizsgálatának fellendülését Silver és Kilpatrick híres cikkeihez szokás kötni (Silver 1994; Kilpatrick 1987). Az utóbbi időben egyre nagyobb hangsúlyt kap a szakirodalomban a feladatkészítés és problémafelvetés vizsgálata (Rosli et. al. 2014; Singer, Ellerton, Cai 2015; Koichu, Kontorovich 2009, 2011, 2012; Papadopoulos, Patsiala 2020), azonban a felvetett problémák minőségének vizsgálatára még nincsen egységes rendszer. Nagyon sokfélék a szempontok és a hangsúlyok, ezért általában az adott kutatások témájától függ, milyen szempontrendszer szerint vizsgálják a felvetett problémákat a kutatók.

Silver (Silver 1994) például az alábbiak szerint vizsgálta a felvetett problémákat:

- folytonosság: a felvetett problémák vagy kérdések száma
- rugalmasság: hány különböző kategóriába sorolhatók a készített problémák
- eredetiség: mennyire különböznek a felvetett problémák az eddig ismertektől

Emellett a szempontrendszer mellett megjelennek a kreativitást vizsgáló szempontok is (Kontorovich et al. 2011). Szintén kiemelik annak a fontosságát, hogy kitűzött feladat legyen „helyénvaló”. Azaz, feleljen meg a feltételek közt nem megadott írtalan szabályoknak, mint például nem szélsőséges vagy félreérthető a megfogalmazása, legyen matematikailag pontos (és matematikai – tehát ne azt kérdezze, hogy milyen színű volt a labda).

Crespo és Sinclair (Crespo, Sinclair, 2008) tanárszakos hallgatók problémafelvetését vizsgálta a probléma megoldásának esztétikuma és a kutatás és feltárás fontosságának a probléma megoldásában való megjelenése alapján.

Rosli és munkatárai 2015-ben írt cikkükben 11 szempontot sorakoztat fel a diákok/tanárjelöltek által felvetett problémák értékelésére:

- Az információ forrása (source of information)
- Megoldhatóság (solvable)
- Hasonló problémát már látott/oldott meg (similar problem seen/worked)
- Életről vett probléma (Real-life situation)
- Realisztikus, értelmes, érthető (realistic, made sense, understandable)
- Matematikailag pontos/ megfelelő (mathematically appropriate)
- Magával ragadó, vonzó (engaging)

- Nehézségi szint (difficulty level)
- Eredetiség és kreativitás (originality and creativity)
- Kihívást jelentő (challenging)
- Korosztálynak megfelelő (age appropriateness). Ez a tanulmányban a középiskolások számára megoldható feladatokat jelentette.

Mi leginkább ezt a szempontrendszert tartjuk a mi kutatásainkban is alkalmazhatónak, erről részletesen is írtunk egy korábbi TDK dolgozatunkban (Rékasi, Stirling 2019).

Látható, hogy rengeteg különféle értékelési szempont jelenik meg a problémafelvetés szakirodalmában, mely szempontok közül néhányat nem is biztos, hogy mindenki feltétlenül fontosnak ítél. Szintén nehézség, hogy sokszor ezek a szempontok nehezen definiálhatók, vagy a leírásuk alapján nem egyértelmű, hogy ki mit ért alattuk pontosan.

A MIDK2020 konferencián a problémafelvetés és problémamegoldás több szakértőjével is volt alkalmunk beszélni, például Kovács Zoltánnal (Nyíregyházi Egyetem) és Ioannis Papadopoulosal (Aristotle University of Thessaloniki) (Papadopoulos, Patsiala 2020). Előadásunk után megkérdezték tőlünk, hogy van-e saját szempontrendszerünk a feladatok értékelésére. Ioannis Papadopoulos a konferencián plenáris előadást tartott „*Navigating in the diverse landscape of problem posing*” címmel (3.). Ebben az előadásban bemutatta a problémafelvetés nemzetközi szakirodalmának különböző aspektusait, a problémafelvetésről és annak értékeléséről alkotott különböző nézeteket és szempontrendszereket.

Az első nehézség, amivel a problémafelvetéssel foglalkozni akaró kutató szembesül, hogy párhuzamosan több értelmezése is van a problémafelvetésnek. Sok különböző szempont létezik, melyek közül az egyik legfontosabb, hogy a problémafelvetést tanárok vagy diákok végzik-e? Ez nagyon fontos különbségtétel, mert amikor diákok alkotnak feladatokat, ők a matematikatudásuk határait feszegetik, növelve ezzel a matematikai megértésüket és tudásukat. A diákok a saját megértési szintjükre készítenek feladatokat, problémákat. Ezzel szemben, amikor szaktanárok foglalkoznak problémafelvetéssel, az ő céljuk a diákjaik segítése, fejlesztése, tanítása. Ezért a két csoport más céllal és a saját tudásukhoz képest más szintre készít feladatokat.

Papadopoulos a problémafelvetésre ötféle definíciócsoportot különböztet meg:

- (i) problémafelvetés, mint új problémák generálása
- (ii) problémafelvetés már meglévő problémák újraformálásával
- (iii) a problémafelvetés egyszerre jelentheti új probléma létrehozását és korábbi újraformálását (i)+(ii)

- (iv) problémafeltevés, mint új kérdések feltevése és régi kérdések új szemszögből való vizsgálata
- (v) problémafelvetés, mint modellezési folyamat

A problémafelvetést különböző környezetekben vizsgálja a szakirodalom, ezeket Papadopoulos a következőképpen csoportosította:

- problémafelvetés önmagában vizsgálva, mint matematikai konstrukció
- problémafelvetés más matematikai konstrukciókkal együtt vizsgálva és összehasonlítva, (például problémamegoldással, vagy matematikai kreativitással)

Különböző célokkal lehet problémafelvetést tanítani vagy vizsgálni – emiatt is nagyon sokféle a problémafelvetés szakirodalma. A problémafelvetés-feladat készítés lehet

- a tanárképzés része, a leendő tanárok fejlesztése céljából
- oktatási vagy pedagógiai eszköz, akár problémamegoldás tanítása céljából
- diagnosztikai eszköz, a tanulók konceptuális megértésének, nehézségeinek, tudásának felmérésére

Látható, hogy a problémafelvetés nagyon sokféle párhuzamos értelmezésben él együtt, ezért Papadopoulos hangsúlyozta, hogy nagyon pontosan és világosan kell fogalmazni a problémafelvetéssel foglalkozó kutatásokban, hogy egyértelmű legyen, hogy a sok fogalom alatt, ki mit ért. Beszélgetésünk során bíztatott minket egy saját szempontrendszer kidolgozására.

A diákok által elkészített és beküldött feladatokat egy általunk összeállított szempontrendszer szerint értékeltük. Ezen szempontrendszer összeállításánál figyelembe vettük, hogy a szakirodalomban számos különböző pontozási rendszer létezik. Azonban nincsen olyan ezek között, mely mindenki által elfogadott, úgymond „ideális” lenne.

Szempontrendszerünkben az egyes szempontokat eddigi tapasztalataink, illetve a szakirodalomban olvasottak alapján alkottuk meg. A rájuk kapható részpontokat, és azok egymáshoz viszonyított értékét a legutóbbi kutatásunkat figyelembe véve alakítottuk ki. Ez úgy zajlott, hogy először meghatároztuk, mit várunk, egy „jó” feladattól, melyek azok a szempontok, amelyek hangsúlyosabbak. Például fontosabb, hogy matematikailag helyes legyen, mint hogy illeszkedjen az adott korosztályhoz, mert a matematikailag helytelen feladatokat senkinek nem lehet odaadni, viszont az adott korosztályhoz nem illő más korosztály számára még jó lehet. Ezután sok beküldött feladatot átolvasva tovább finomítottunk a szempontrendszerünkön.

Az értékelési szempontok kialakításához a kutatócsoporttal és a kutatásban résztvevő szaktanárokkal közös ötletelés keretében először meghatároztuk, mit várunk, egy „jó”



feladattól. *(Ezért szeretnénk megköszönni a sok-sok segítségüket a munka során.)* Az ötletelés eredményeképpen a következő elvárásokat fogalmazzuk meg:

- Amikor az adott tananyagot tanítom, akkor jó szívvel fel tudjam adni, ne kelljen rajta sokat változtatni
- Legyen megfelelően, didaktikusan beilleszthető valahová a tananyagba (legyen olyan tananyagrészt, amihez illeszkedik)
- Tükrözze a tananyagot
- Többféle szándékkal feladhatok egy feladatot, de legyen olyan tanulási cél, amihez illeszthető az adott feladat (például egy gyakorlófeladatnál nem feltétlenül szükséges az ötletes beöltöztetés, viszont alkalmasnak kell lennie a gyakorlásra)
- Mit jelent a jó beöltöztetés?
  - Amire rá akar kérdezni a feladat, valóban arra kérdezzen rá (erre számos ellenpélda olvasható Muzsnay Anna és Szabó Csaba beöltöztetett feladatokról szóló cikkében (Muzsnay, Szabó 2017))
  - A megoldás során diszkutálni kellhet a beöltöztetés miatt (a valós szituációt lefordítani a matematika nyelvére és vissza)
  - Legalább valamennyire legyen ötletes a feladat

Az itt felsorolt elvárásokat a korábbi TDK dolgozatainkban, és más szakirodalmakban összeállított szempontokkal is összevetettük (Rékasi, Stirling 2018, 2019). Meghatároztuk, mely szempontokat tartjuk hangsúlyosabbnak. Az így kapott pontozási vázlatot teszteltük a beérkező problémák első változatán majd összevetettük az elvárásokkal és új ötletelés után finomítottuk, így született a végleges pontrendszer.

A szempontrendszer két kategóriára osztható. Az első a szakmai rész. Ezen belül 4 szempont van, melyek alapján pontoztuk a feladatokat. A másik rész az élvezetességi rész. Ezen belül is 4 szempontot határoztunk meg. A szempontok a következő (2. táblázat) táblázatban láthatóak.

<b>Szakmai rész</b>	<b>pont</b>	<b>Élvezetességi rész</b>	<b>pont</b>	
Valamilyen Tananyaghoz illő	8 pont	Újszerű/eredeti /ötletes	6 pont	Az összegük, kivéve, ha az összeg nagyobb mint 6. Ekkor 6 pont.
Nehéz/könnyű (kihívás)	4 pont	Matematikai élmény	6 pont	
Matematikailag helyes	8 pont	Beöltöztetés	6 pont	6 pont
Korosztályhoz illő	5 pont	Korszerűség	4 pont	4 pont
Összesen 25 pont		Összesen 16 pont		

(4. táblázat)

Az élvezetességi részben az ötletesség és a matematikai élmény összesen legfeljebb 6 pontot ér. Szerettük volna, hogy aki nem öltöztetett be egy feladatot, az is elérhessen ebben a hatpontos részben 6 pontot, amennyiben matematikailag viszont élményszerű, újszerű a feladata. Ugyanígy, aki matematikailag nem igazán élményszerű feladatot készített, viszont a feladat beöltöztetésének ötlete nagyon kreatív és újszerű, ő is elérhessen 6 pontot ilyen szempontból. Tehát ez a pontszám úgy alakul ki, hogy a minimumát vesszük az (újszerű/eredeti/ötletes + matematikai élmény) pontszámösszegnek és a 6 pontnak.

A szempontrendszer részletes kifejtése, azaz, hogy milyen esetekben hozzávetőlegesen hány pontot adtunk egy adott szempontra, az 5. és 6. táblázatban szerepel.

<b>Szakmai rész</b>	<b>pont</b>	<b>Részletek</b>				
Valamilyen Tananyaghoz illő	8 pont	Teljesen jól beilleszthető valamilyen tananyagba, nem kell változtatni rajta (8pont)	Beilleszthető a tananyagba, esetleg számok kicserélésével, de akár így is (6-7pont)	Kisebb változtatásokkal, esetleg picike pontosítással bevihető órára is (3-5 pont)	Nem igazán tudnám bevinni órára, de azért látom, hogy hova szeretne volna elhelyezni (1-2pont)	Semmilyen tananyaghoz nem illeszkedik (0pont)
Nehéz/könnyű (kihívás)	4 pont	Pont jó kihívást jelent, nem túl nehéz, de nem is unalmas (4 pont)	-	Kicsit túl könnyű, vagy kezd túl bonyolulttá válni (2-3pont)	-	Túl könnyű, vagy túlságosan nehéz (0-1 pont)
Matematikailag helyes	8 pont	Matematikailag teljesen korrekt (8 pont)	Vannak benne apróbb matematikai pontatlanságok, de érthető, hogy mit szeretett volna (5-7pont)	Úgy tűnik, hogy a beöltöztetés eléggé elrontotta a feladat matematikáját, de alapvetően jó lenne (3-4pont)	Matematikailag elég pontatlan, de azért látszik, hogy nem teljesen rossz (1-2pont)	Teljesen hibás matematikailag (0pont)

Korosztályhoz illő	5 pont	A megjelölt korosztály számára ideális, bevihető, feladható (5pont)	Kicsit nehéz még, de körülbelül eltalálta a szintet (4pont)	Nehéz, vagy túl könnyű a korosztálynak, de azért van olyan osztály, ahova be lehetne vinni kicsi változtatásokkal (2-3pont)	-	- Nem igazán lehet bevinni a korosztálynak, mert túl nehéz <i>vagy</i> - Teljesen át kellene variálni (0-1pont)
--------------------	--------	---	---	---	---	--

(5. táblázat)

Élvezetességi rész	pont	Részletek				
Újszerű/eredeti /ötletes	6 pont	<p>- Nagyon ötletes <i> vagy </i> - Nagyon ötletesen alakított át egy általa már ismert/látott feladatot (6pont)</p>	Újszerű (4-5pont)	<p>- Nem nagyon ötletes, de azért látszik, hogy próbálkozott <i> vagy </i> - Lehet, hogy ő szereti ezt a típust, de nem igazán kreatív (3pont)</p>	<p>Meglehetősen „tucatfeladat”, de próbálta kicsit megváltoztatni, inkább kevesebb mint több sikerrel (1-2pont)</p>	<p>Egyáltalán nem ötletes, teljes mértékben tucatfeladat (0pont)</p>
Matematikai élmény	6 pont	<p>- Nagyon élményszerű a megoldása <i> vagy </i> - Valamilyen nagyon újszerű matematikai ötlet kell hozzá (6 pont)</p>	Újszerű ötlet kell hozzá (4-5pont)	<p>- Nem nagyon újszerű a matematikai élmény, de azért látszik, hogy próbálkozott (3pont)</p>	<p>Próbálkozott kicsit élményszerűvé tenni, de nem igazán sikerült (1-2pont)</p>	<p>Egyáltalán nem nyújt matematikai élményt a megoldása (0pont)</p>

Beöltöztetés	6 pont	Jól van beöltöztetve (6pont)	- Beöltöztetgette, de kicsit rossz <i>vagy</i> - kicsit elromlott valamitől (például: attól, hogy túlbonyolította) (5 pont)	- Nem nagyon öltöztette be, de azért látszik, hogy próbálkozott <i>vagy</i> - Elromlott a beöltöztetés valamitől (2-4pont)	- Meglehetősen rosszul van beöltöztetve <i>vagy</i> - Szinte egyáltalán nincs beöltöztetve (1pont)	- Egyáltalán nem öltöztette be, teljesen csak a konkrét feladatot írta le <i>vagy</i> - Nagyon rosszul öltöztette be, teljesen értelmetlen (0pont)
<b>Élvezetességi rész</b>	<b>pont</b>	<b>Részletek</b>				
Korszerűség	4 pont	Nem korszerűtlen (3-4pont)	-	Korszerűtlen, de nem nagyon (2 pont)	-	- Teljesen korszerűtlen, és nem igazán tehető azzá (0-1pont)

(6. táblázat)

Célunk volt még az is, hogy jól elkülöníthetők legyenek a kiemelkedően jó és a kirívóan gyenge feladatok egymástól. Az egyes szempontokra ezért határoztunk meg ilyen magas maximális pontszámot, mert az így kapott szélesebb skálán jól elkülönülnek a gyenge, közepes és jó feladatok. Ha kevesebb pontot érnének az egyes szempontok, a kapott szűkebb skálán nehéz lenne az egymáshoz nagyon közeli pontszámok alapján kiválasztani, hogy melyik feladat kiemelkedően jó, melyik nagyon összecsapott, és melyek közepes színvonalúak.

A szakmai részre (25 pont) magasabb pontszámot adtunk, mint az élvezetességi részre (16 pont). Ezt azért így állítottuk össze, mert egy feladat szempontjából fontosabbnak tartjuk, hogy be lehessen vinni tanórára és fel lehessen adni diákoknak, mint azt, hogy mennyire élményszerű a megoldása. Természetesen sok pontot lehet szerezni azzal is, ha egy feladat érdekes, megoldása élvezetes. Viszont, ha egy feladat matematikailag nem helyes, vagy egyáltalán nem illeszkedik semmilyen korosztályhoz, azt nem lehet bevinni tanórára. Míg, ha egy feladat nem különösebben kreatív, de matematikailag helyes, akkor az könnyebben könnyebben átalakítható érdekes feladattá, vagy bevihető egy olyan órára, melynek a gyakorlás a célja. Ilyen órán sok feladatot megoldunk adott témakörben, melyek között helyet kaphatnak kevésbé élményszerű, de a gyakorlás szempontjából hasznos feladatok is.

A szakmai rész a következő szempontokat tartalmazza: valamilyen tananyaghoz illő, nehéz/könnyű (kihívás), matematikailag helyes, korosztályhoz illő. Ezen belül a valamilyen tananyaghoz való illeszkedés és a matematikailag helyesség éri a legtöbb pontot. Ennek az oka, hogy ha egy feladat túl könnyű vagy túl nehéz, az feladható egy ennek megfelelő szintű csoportnak, esetleg át is alakítható a csoport szintjére, ezért ez a szempont kevésbé hangsúlyos, mint a tananyaghoz illés és a matematikai helyesség. Szintén hiba, ha egy feladat nem illik a megadott korosztályhoz, viszont ennek ellenére lehet jó a feladat. Ezzel szemben, ha egy feladat semmilyen tananyaghoz nem illeszkedik, vagy matematikailag hibás, azt nehezebb kijavítani, így ezt nagyobb hibaként értékeljük. Ezért ér több pontot a tananyaghoz illeszkedés és a matematikai helyesség, mint a nehézség/könnyűség és a korosztályhoz való illeszkedés.

Az élvezetességi részben a korszerűség ér kevesebb pontot a többi szempontnál. Tapasztalataink szerint egy feladat lehet teljesen jó annak ellenére, hogy nincsenek korszerűnek mondható elemei – például mert a beöltöztetése nem függ a korszaktól, vagy nincs is beöltöztetve, de a megoldása a matematikai tartalom miatt élményt nyújt a megoldónak. A teljesen korszerűtlen feladatokat a diákok kevésbé érezhetik fontosnak, ezért került bele az értékelésünkbe, ugyan kisebb súllyal, ez a szempont is. Korszerűtlen feladatok például a magnószalagokról, vagy az egyre ritkábban használatos mechanikus villamosjegy-lyukasztókról szóló feladatok.

Olyan feladatokat szeretnénk jónak nevezni, melyeket jó szívvvel be tudunk vinni matematika órán változtatás nélkül. Ezt azért így határoztuk meg, mert ha minden rossz, vagy félig-meddig rossz feladatot, vagyis amiket eredeti formájukban nem tudunk jó szívvvel feladni matematika órán, kijavítgatnánk, átalakítanánk nekünk és a csoportjainknak megfelelő formára, akkor nem is lenne szükség új feladatokra, és új feladatgyűjteményekre, hiszen a már létező feladatokat ki-ki a maga módján javítgatná. Azonban tapasztalható, hogy ez a javítás nem történik meg, újabb és újabb tankönyvekben jelennek meg érthetetlenül vagy félreérthetően megfogalmazott, vagy más módon hibás feladatok, amiket a matematikatanárok változtatás nélkül feladnak. Ez nem feltétlenül az ő hibájuk, hiszen teljesen jogos az a jóhiszemű feltételezés a tanár részéről, hogy a tankönyvben olyan feladatokat talál, amiket feladhat a diákjainak, akár önálló munkára is.

A kísérletben részt vevő diákok által készített feladatokat több különböző szempontból nevezzük „jó”-nak. Megkülönböztetünk olyan feladatot, ami szakmailag jó, és olyat, ami élvezetességileg jó. Ami mind szakmailag és élvezetességileg is jó, azt nevezzük összességében jó feladatnak. Ha egy feladat élvezetességileg jó, és szakmailag nem nagyon rossz, akkor már feladható lehet egy matematikaórán. Hasonlóképp, egy szakmailag jó feladatot már lehet jól alkalmazni matematikaórán, akkor is, ha nem nyújt különösen nagy élvezetet a megoldása. Tehát, ha egy csapat az egyik szempont szerint „jó” feladatokat készített, azt már nagyon sikeres feladatkészítésnek nevezhetjük. A célunk az volt, hogy olyan feladatokat nevezzünk jónak, amiket be tudnánk vinni egy matematikaórára, és szívesen be is vinnénk. Ezt figyelembe véve szakmailag jónak nevezzük azt a feladatot, amelyik minimum 20 pontot elért a szakmai rész összpontszámából (ez 25 pont) és minimum az egyik szakmai szempontból (valamilyen tananyaghoz illő, nehéz/könnyű (kihívás), matematikailag helyes, korosztályhoz illő) elérte a maximum pontszámnak legalább a 80%-át. Hasonlóan élvezetességileg jónak nevezzük azt a feladatot, amelyik minimum 12 pontot elért az élvezetességi rész összpontszámából (ez 16 pont) és minimum az egyik élvezetességi szempontból (újszerű/eredeti/ötletes + matematikai élmény, beöltöztetés, korszerűség) elérte legalább a 80%-át a maximum pontszámnak.

A szakmailag jó, és az élvezetességileg jó feladatok minimumfeltételét úgy határoztuk meg, hogy sok feladatot megnéztünk. Ezek alapján láttuk, hogy körülbelül milyen pontszám fölötti értékeket érnek el azok a feladatok, amiket szakmailag vagy élvezetességileg jónak tartunk, jónak szeretnénk nevezni. A szakmailag jónak nevezett feladatoknak azért kell elérnie legalább az egyik szakmai szempontból minimum 80%-ot, mert olyan feladat nem nevezhető jónak, ami mondjuk minden szempontból a középmezőnyben van. Hasonlóan szabtuk meg ezt a feltételt az élvezetességi szempontok esetében is.



#### 4. Interjúk a résztvevő tanárokkal

A módszer kipróbálása után interjút készítettünk azokkal a tanárokkal, akik jelezték felénk, hogy elkezdték a feladatot a diákjaikkal. Az interjúkat videohívásban készítettük, Zoomon és Skype-on. Sajnos a Németh László Gimnázium, Általános Iskola Hódmezővásárhely tanárnőjével betegség miatt még nem tudtunk interjút készíteni, de már zajlanak az egyeztetések egy későbbi beszélgetéshez.

Az interjúkból készítettünk egy összefoglaló táblázatot:

<b>Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium</b>	<b>ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimnázium és Kollégium</b>	<b>Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium</b>
9. és 10. osztály	8. és 10. osztály	10. osztály
<p>-A tanárnő állította össze a csapatokat.</p> <p>-Szempont volt, hogy ne legyen nagyon gyenge csapat.</p> <p>-Hasonló habitusú diákokat igyekezett egy csapatba osztani.</p> <p>Kellett cserélnie a tanárnőnek csapattagokat idő közben.</p>	<p>-A 10. osztályosoknál rájuk bízta a csapatok kialakítását, körülbelül egy hét alatt alakultak a csapatok (szimpátia alapján).</p> <p>-A 8. osztályos csoportban a tanárnő állította össze a csapatokat, hogy senki ne legyen kirekesztve.</p> <p>Egyszer kellett cserélnie a tanárnőnek csapattagokat.</p>	<p>-A tanárnő állította össze a csapatokat.</p> <p>-Olyan diákokat tett egy csapatba, akik egyébként is beszélgetnének egymással, de figyelve arra, hogy ne legyenek nagyon gyenge csapatok.</p>
-Általában jól működött a csapatmunka.	-A 8. osztályos csoportban sokan eleve nem kapcsolódtak be a feladatokba, az online oktatás miatt.	<p>-Általában jó csapatmunka volt, és fejlődött is a diákoknak ezen képessége.</p> <p>-Volt olyan tanuló, aki kicsit kiesett a csapatmunkából.</p> <p>-Voltak olyan tanulók, akiket noszogatni kellett.</p>

	<p>-Nehéz volt megvalósítani a csapatmunkát az online oktatás miatt.</p> <p>-Voltak csoportfelelősök.</p>	
<p>-A tanár nő folyamatosan figyelemmel kísérte a csoportok munkáját.</p> <p>-Létrehozott online felületen csapatokat (Microsoft Teams-ben), ahol tudtak a diákok beszélgetni egymással.</p> <p>-Voltak beadási részhatáridők.</p>	<p>-Egy határidő volt a feladatok beadására.</p>	<p>-A tanár nő heti kétszer vagy háromszor 10 percet beszélgetett csapatonként a diákokkal erről a feladatról.</p> <p>-Voltak beadási részhatáridők.</p>
<p>-Volt olyan, hogy a tanár nő visszaküldte javításra a diákok által elkészített és beadott feladatsort. Viszont volt olyan csapat, akik végül nem javították ez alapján a visszajelzés alapján.</p>	<p>-Ha a tanár nő szólt, vagy kérdezett valamit (például ha szólt, hogy valamelyik feladaton javítsanak), akkor volt, hogy csak napok/egy hét múlva válaszoltak a diákok.</p>	<p>-Volt olyan csapat, akiknek a tanár nő visszaküldte javításra, főleg a hamar beadott feladatokat</p>
<p>-A tanár nő készített egy Prezit, amin elmagyarázta a feladatot a diákoknak.</p> <p>-Ezt a Prezit meg is osztotta a diákokkal.</p> <p>-A tanár nő mind a 4 feladatkészítési módszert elmesélte, de a diákok választhattak közülük.</p>	<p>-A tanár nő ismertette mind a 4 feladatkészítési stratégiát a diákokkal.</p> <p>-Úgy gondolja, hogy jobb lett volna, ha csak egy stratégiát mond el, és azzal kell dolgozniuk a tanulóknak.</p>	<p>-A tanár nő írt egy pár oldalas dokumentumot a feladatról, amit elmesélt, és megosztott a tanulókkal (akik később minden részletre visszakérdeztek).</p> <p>-Adott példafeladatokat is.</p> <p>-3 feladatkészítési stratégiát mondott el (adott témára készített feladatok,</p>

<p>-Azt kérte, hogy legyen vicces és ötletes a feladatok megoldása.</p>		<p>feladatvariálás, feladat készítése valós szituáció modellezésével).</p> <p>-Egy feladatsoron nem csak egy féle feladatkészítési stratégiával dolgozhattak a tanulók.</p>
<p>-Egy Microsoft Teams felületre kellett feltölteniük a diákoknak a feladataikat. Ezt a felületet a tanár hozta létre csapatonként.</p> <p>-Ugyanitt jelzett vissza a tanár folyamatosan a tanulóknak.</p>	<p>-Volt egy Google Classroom a feladatoknak, de nem mindenki oda töltötte fel ezeket.</p> <p>-Túl sok különböző féle formátumban küldték be a diákok a feladataikat/megoldásaikat.</p>	<p>-Google Classroomba kellett feltölteniük a tanulóknak a feladatokat word vagy pdf formátumban (de ez nem mindig teljesült).</p> <p>-A megoldásokat ugyanide kellett feltölteniük, de azt lehetett képként is.</p>
<p>-Sok munka volt a tanárnőnek a Google Forms-ba mindent bevinni.</p> <p>-Sok volt ennyi feladatot javítani csapatonként.</p>	<p>-Macerás volt a Google Forms használata a tanárnőnek.</p> <p>-Nagyon sok feladatot kellett egyszerre átnéznie, ami rengeteg munka, főleg távoktatásban.</p>	<p>-Nem volt túl sok plusz munka a Google Forms kitöltése a tanárnőnek.</p> <p>-Inkább a diákok koordinálása volt sok többletmunka.</p>
<p>-A diákok nem nagyon jeleztek vissza a tanárnőnek, hogy tetszik-e nekik ez a tevékenység (feladatkészítés).</p> <p>-A tanulóknak nem mindig tetszett, hogy egy kevésbé kreatív feladat is ugyanolyan</p>	<p>-Volt olyan diák, aki szívesen csinálta a feladatsort.</p> <p>-Nem érkezett negatív visszajelzés a diákok részéről, inkább csak érdektelenség.</p>	<p>-Volt olyan a diákok közül, akinek nagyon tetszett, hogy azt írhat bele a saját feladatába, amit ő akar.</p> <p>-Egymás feladatait szívesen megoldották a tanulók, és büszkén vállalták a saját jól sikerült feladataikat.</p>

<p>jó osztályzatot kapott, mint egy sokkal kreatívabb.</p>		<p>-Volt olyan tanuló, akinek nagyon idegen volt ez a tevékenység (feladatkészítés). -Alapvetően élvezték a diákok, de túl hosszú idő után már „nyűg”. -Volt olyan tanuló, akinek teher volt, hogy nem a megszokott utakon kellett, zárt végű feladatokat megoldania.</p>
<p>-A tanárnőnek tetszett, hogy kicsit más, felfrissítő tevékenység az órán ez a folyamat. -Máskor is használná a csoportjaiban. -Voltak szórakoztató feladatok. -Tetszett a tanárnőnek, hogy a diákok belevihették a kreativitásukat.</p>	<p>-Az alapötlet tetszett a tanárnőnek, szerinte az online oktatás miatt lett nehéz -Szívesen kipróbálná ezt a tevékenységet jelenléti oktatásban a diákokkal.</p>	<p>-A tanárnőnek alapvetően tetszett a tevékenység. -Úgy gondolja, hogy sokat fejlődtek a diákok a kommunikációban. -Már korábban is csináltatott saját feladatokat a tanulókkal.</p>
<p>Lehet, hogy jobb lenne kevesebb (például 2) feladatot készíttetni egyszerre a diákokkal, mert:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- kevés az idő rá a tanévek folyamán.</li> <li>- jobban csapatban dolgoznának, ha nem jutna mindenkinek 1-1 feladat. (így nem kiosztanák egymás közt a feladatokat, hanem közösen ötletelnének)</li> <li>- megunják.</li> </ul>		

Az interjúkból kiderült, hogy bár számos szempontból egyformán tervezték meg, és koordinálták a folyamatot a tanárnők, mégsem teljesen ugyanaz történt a három iskolában. Mindhárom tanárnő figyelembe vette a csapatok összeállításánál, hogy nagyon gyenge csapatok ne alakuljanak ki. Ennek érdekében, ha szükséges volt, akkor menet közben is cseréltek a csapatok között diákokat.

A csapatmunkát az online oktatás nagy mértékben nehezítette, mivel így sokkal nehezebben tudtak a diákok egymással kommunikálni. Ennek ellenére a legtöbb csapatnál jól működött a csapatmunka. Voltak azonban olyan csapatok is, ahol a beküldött feladatokból egyértelműen kiderült, hogy a diákok felosztották egymás között, hogy ki melyik feladatot találja ki és oldja meg. Ennek elkerülésére kaptunk javaslatot a tanárnőktől. Ha a csapatoknak 4-5 helyett 2 feladatot kellene elkészíteniük, akkor valószínűleg jobban együtt dolgoznának rajtuk. Ekkor nem valósulhatna meg az, hogy a 4 csapattag közül mindenkinek jut egy feladat, amin teljesen egyedül dolgozik.

A Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, és a Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium tanárnője a csoportjaikkal matematika órák keretében is foglalkozott a feladatkészítéssel. Ezekben a csoportokban a diákoknak bizonyos mennyiségű feladatokkal részhatáridőkre el kellett készülniük. Természetesen előfordult, hogy valakik nem készültek el időben, de ezt a tanárnők felügyelték. Az ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimnázium és Kollégium tanárnőjének csoportjaiban a tanulók egyetlen határidőt kaptak, amikor az összes feladatot be kellett küldeniük. Ebben az esetben is voltak olyanok, akik nem adták le időben a feladatsorukat.

Mindhárom tanárnő elmondta, hogy miután átnézték a diákok elkészült feladatait, utána küldtek nekik visszajelzést. Ebben a visszajelzésben a tanárnők sok esetben javasolták/kérték, hogy nézzék át, javítsák bizonyos feladataikat a tanulók. Voltak tanulók, akik ezt meg is tették, majd újra beadták az így elkészült feladatsort. Ezzel szemben voltak csapatok, akik nem javították a feladataikat, sőt voltak, akik csak egy hét múlva válaszoltak tanárnőjüknek.

A tanárnőkkel mind egyetértettünk abban, hogy mivel a diákok többsége most vett részt először ilyen tevékenységben, ezért nem a nagyon szigorú osztályozás volt a cél. Nem szeretttük volna elvenni a kedvüket az önálló problémafelvetéstől.

A tanárnők különböző módon ismertették csoportjaikkal a feladatot. Volt, aki Prezit készített a tudnivalókról, volt, aki egy dokumentumot mesélt el, majd küldött ki a diákoknak. Mind a hárman több különböző feladatkészítési stratégiát is elmondtak a tanulóknak, akik válogathattak ezek közül. Az ELTE Apáczai Csere János Gyakorlógimnázium és Kollégium

tanárnője azt mondta nekünk, hogy utólag úgy gondolja, jobb lett volna, ha csak egyetlen stratégiát ismertet a diákokkal, és ezzel kell mindenkinek dolgoznia.

Két tanárnő jelezte nekünk, hogy számára sok többletmunkával járt a Google Forms felület használata a folyamat során. A Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium tanárnője viszont külön kiemelte, hogy ő nem érezte sok plusz munkának a felület kitöltését. Számára inkább a diákok, a csapatok koordinálása jelentett többletmunkát.

A tanulóktól általában nem érkezett negatív visszajelzés a tanárnők felé erről a tevékenységről. Mind a három iskolában voltak diákok, akiknek nagyon tetszett a folyamat. A Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium tanárnőjétől megtudtuk, hogy diákjai általában szívesen oldották meg egymás feladatait. Elmondta azt is, hogy a tanulók büszkén vállalták saját jól sikerült feladataikat. Ez egybevág azzal, amit Cunningham 2004-es cikkében olvashatunk (Cunningham 2004). A Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium tanárnőjének elmondása alapján a diákok valóban sajátjuknak érezték a problémákat, és fontosak voltak számukra ezek a feladatok.

Az interjú során megtudtuk, hogy mindhárom tanárnőnek tetszett a módszer alapötlete. A Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanárnőjének legjobban az tetszett, hogy a diákok a kreativitásukat is belevihették a feladataikba, illetve hogy az órán ez a folyamat egy kicsit más, felfrissítő tevékenység volt. Azt mondta, szívesen használná ezt a módszert máskor is a csoportjaiban. Az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló gimnázium és Kollégium tanárnője szívesen kipróbálná ezt a tevékenységet tantermi oktatás keretein belül. Az interjú során megbeszéltük, hogy elkezdi a kísérletet „élőben” is, de sajnos egy héten belül újra bezártak a középiskolák, így ez egyelőre nem kezdődhetett el. Szerinte az online oktatás önmagában nagyon megnehezítette az egész folyamatot. A Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium tanárnője úgy gondolja, hogy a folyamat során a tanulók kommunikációja is sokat fejlődött. Ő már korábban is készített saját feladatot a diákjaival.

Mind a három, általunk megkérdezett tanárnő véleménye megegyezett abban, hogy érdemes lenne kipróbálni ugyanezt a folyamatot, viszont 4-5 helyett csupán 2 feladattal. Erre több különböző okot is mondtak. Először is, hogy a tanévek során kevés idő áll rendelkezésre ilyen tevékenység elvégzésére, mert egy tananyagrésze körülbelül két hónap jut, amiből a második hónapban lennének a diákok olyan szinten, hogy olyan jó feladatokat készítsenek, amiket érdemes egymással megoldatni. Ebben az egy hónapban pedig csak csoportonként 1-2 feladat elkészítésére, alapos ellenőrzésére majd megoldására jutna idő. Másodszor, amint korábban már részletesen kifejtettünk, a diákok valószínűleg 2 feladaton jobban csapatban gondolkoznának, hiszen ezt kevésbé evidens kiosztani egymás között egyéni munkára.

Harmadszor, a diákok közül sokan egy idő után megunják a saját feladatok alkotását, kifogynak az ötletekből, ilyenkor érdemes egy kis időre pihentetni ezt a tevékenységet, és később újra elővenni.

## 5. Összegzés

A 2019/20 tanév tavaszi félévében kidolgoztunk egy módszert, melynek segítségével középiskolás (távolléti) matematikaórákon problémafelvetéssel és feladatkészítéssel foglalkozhatnak a diákok. A folyamat megsegítésére készítettünk a tanároknak egy dokumentumot (1. melléklet), melyben leírtuk, hogy miből áll a kutatásunk, a felmérő és fejlesztő módszer. Ez a dokumentum az Oktatási Hivatal honlapjára is felkerült, így az ország bármely iskolájának tanárai elérhették (1.). Négy iskola tanárai vették fel velünk a kapcsolatot, összesen 9 csoporttal (ezek osztályokat vagy féléves osztályokat jelentenek). Jelen dolgozat megírásáig két iskolából négy csoport feladatait kaptuk meg és javítottuk ki.

A módszer kidolgozása mellett értékelési rendszert is készítettünk az elkészült feladatok vizsgálatához és javításához. Két egyszerűbb rendszer alapján értékelték a tanárok és a diákok az elkészült feladatokat (a diákok csapatokban készítettek feladatokat, minden csapat megoldotta egy másik csapat feladatait és értékelté is azt). Mi pedig egy komplexebb, részletesebb szempontrendszer alapján vizsgáltuk az elkészült feladatokat.

A 2020/21 tanév őszi félévében interjúkat készítettünk a résztvevő tanárnőkkel (sajnos a hódmezővásárhelyi Németh László Gimnázium, Általános Iskola Hódmezővásárhely tanárnőjével betegség miatt még nem tudtunk interjút készíteni) a módszerrel kapcsolatos tapasztalataikról, véleményükről. Ezeket az interjúkat a 3. fejezetben írtuk le részletesen.

Az interjúk tapasztalata, hogy a résztvevő tanárok hasznosnak találták a problémafelvetési, feladatkészítési tevékenységet. A csapatos feladatkészítések során sok csoportban nagy mértékben fejlődött a gyerekek kommunikációja, amellett, hogy a matematikai tudásuk is rendszereződött, és gyakorolhatták a pontos matematikai fogalmazást is. Mindazonáltal nem minden csapatban valósult meg a csapattmunka, néhány csapat nem tudott jól együtt dolgozni – ez részben a távoktatás miatti nehezített körülményekből adódott.

Sok diák nagyon szívesen készített saját feladatokat, élvezték, hogy kicsit kipróbálhatják a tanár-szerepet, és más oldalról közelíthetik meg a matematikai problémákat. Egymás feladatsorait is szívesen oldották meg és büszkék voltak a jól sikerült feladataikra. Voltak olyan diákok is, akiknek nehézséget okozott, hogy nem a szokásos zárt végű matematikafeladatokat kell megoldaniuk, ahol a munka végeztével biztosan tudják, hogy valami ellenőrizhető, jó

eredményre jutottak. A tanárnők azt a nehézséget is említették, hogy 4-5 feladatból álló feladatsorokat készíteni lehet, hogy sok munka volt a diákoknak, egy idő után volt, akinek monotonná vált, hogy ilyen hosszú ideig kell feladatkészítéssel foglalkozniuk (ez főleg azokban az osztályokban volt jelentős, ahol két forduló is lezajlott a kísérletből).

Ezek a tapasztalatok egybevágóan sok szakirodalomban leírt korábbi tapasztalattal. Xianwei Van Harpen és Norma Presmeg középiskolás diákokkal végzett kísérletet az Egyesült Államokban és Kínában és meginterjúvolták a résztvevő diákokat (Van, H. & Presmeg, 2015). A résztvevő diákok nagyon érdekesnek találták a problémafelvetést, és azt is hasznosnak tartották, hogy ez a tevékenység próbára teszi, rendszerezi és mélyíti a matematikai tudásukat. Ahogy azt a magyar diákoknál is láttuk, sokaknak (főleg a sanghaji diákoknak) nehézséget is okozott az új problémák felvetése. A folyamat számukra nagyon különbözik a szokásos problémamegoldási folyamatoktól, valamint nehezen vonatkoztattak el a korábban megismert és megoldott feladatoktól, hogy újakat találjanak ki. A jiaozhoui diákok sokszor egy matematikai problémát találtak ki először, majd ahhoz kerestek megfelelő beöltöztetést. Ilyet a magyar diákoknál is láthattunk, például volt, aki függvényekkel akart feladatot készíteni, és egy függvényekkel kapcsolatos matematikai problémához keresett aztán valamilyen valós (vagy mesei) szituációt.

A tanulók különböző módszerekkel fognak hozzá a feladatkészítéshez. A mi kísérleteinkben részt vevő diákok hallhattak négy féle módszerről, megadott adatok alapján történő feladatkészítés, feladatvariálás, valós szituáció modellezése és adott témára készített feladatok. A szakirodalom több különböző problémafelvetési módszert megnevez: „*problem finding*”, „*problem sensing*”, „*problem formulating*”, „*creative problem- discovering*”, „*problematizing*”, „*problem creating*”, és „*problem envisaging*” (Singer et. al. 2011; Dillon, 1982; Jay & Perkins 1997; Rosli et. al. 2014). A magyar diákok problémafelvetésében is sok különböző módszer jelent meg, voltak, akik ismert feladatokat variáltak jól-rosszul (volt szó szerinti másolás is – ezt nem neveznénk valódi feladatvariálásnak), volt, akinek a feladat, a csapat elmondása szerint „a fejéből pattant ki”, és megjelentek különféle modellezési feladatok, például a járványterjedésről.

Végeredményül elmondhatjuk, hogy a módszer jól alkalmazható volt az iskolákban, még a járványhelyzet okozta nehézségek ellenére is. A szaktanárokkal készített interjúk nagyon jól sikerültek és tanulságosak voltak. A résztvevő diákok és a tanáraik is élvezték a kísérletet, bár időnként sok munkával járt. A szempontrendszer is alkalmasnak bizonyult az elkészült feladatok értékelésére.



Összességében azt mondhatjuk, hogy a diákok problémafelvetési és feladatkészítési képessége

Fejlesztendő, de nem reménytelen!

## Irodalom

(1) Oktatási Hivatal honlapja, „A tanulást támogató további hasznos anyagok”:

[https://www.oktatas.hu/pub\\_bin/dload/kozoktatas/tavoktatas/probfelv.pdf](https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tavoktatas/probfelv.pdf) (utoljára megnyitva: 2020. 11. 02.)

(2) Nemzeti Alaptanterv (2012)

[https://ofi.oh.gov.hu/sites/default/files/attachments/mk\\_nat\\_20121.pdf](https://ofi.oh.gov.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf) (utoljára megnyitva: 2020. 11. 07.)

Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva és Wintsche Gergely  
2013. *Matematikai módszertani példatár*. elérhetőség:

<http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/160.pdf> (utoljára megnyitva: 2020. 11. 02.)

Blomqvist, Charlotta & Gade, Sharada 2015. From Problem Posing to Posing Problems via Explicit Mediation in Grades 4 and 5. 195-213. 10.1007/978-1-4614-6258-3\_9.

Cai, Jinfa & Hwang, Stephen & Jiang, Chunlian & Silber, Steven. 2015. *Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions*. 10.1007/978-1-4614-6258-3\_1.

Crespo, S., Sinclair, N. 2008. *What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems*. Journal of Mathematics Teacher Education, 11(5), 395-415.

Demir, B. B. 2005. *The effect of instruction with problem posing on tenth grade students' probability achievement and attitudes toward probability* (Unpublished master's thesis). Middle East Technical University, Turkey.

Dickerson, V. M. 1999. *The impact of problem posing intervention on the mathematical problem solving achievement of seventh graders* (Unpublished doctoral dissertation). Emory University, Atlanta, GA.

Dillon, J. T. 1982. Problem finding and solving. The Journal of Creative Behavior, 16, 97–111.

Einstein, A., & Infeld, L. 1938. *The evolution of physics*. New York, NY: Simon & Schuster.

English, L. D. 1997. *The development of fifth-grade children's problem posing abilities*. Educational Studies in Mathematics, 34, 183-217. <http://dx.doi.org/10.1023/A:1002963618035>

English, L. D. 1998. *Children's problem posing within formal and informal contexts*. Journal for Research in mathematics Education, 29(1), 83–106. doi: 10.2307/749719

Hadamard, J. W. 1945. *Essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

- Jay, E. S., & Perkins, D. N., 1997. Problem finding: The search for mechanism. In M. Runco (Ed.), *The creativity research handbook*, pp. 257-293. New Jersey: Hampton Press.
- Lavy, I., & Bershadsky, I. 2003. *Problem posing via “what if not?” strategy in solid geometry — a case study*. The Journal of Mathematical Behavior, 22(4), 369–387. <https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2003.09.007>
- Imhausen, Annette 2016. *Mathematics in ancient Egypt, a contextual history*. Princeton University Press. ISBN 978-0-691-11713-3
- Jay, E. S., & Perkins, D. N. 1997. Problem finding: The search for mechanism. In M. A. Runco (Ed.), *The creativity research handbook* (Vol. 1, pp. 257–293). Cresskill, NJ: Hampton Press.
- Kesan, C., Kaya, D., & Guvercin, S. 2010. *The effect of problem posing approach to the gifted student’s mathematical abilities*. International Online Journal of Educational Sciences, 2, 677-687.
- Kilpatrick, J. 1987. Formulating the problem: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. 2011. *Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they?* In M. Avotiņa, D. Bonka, H. Meissner, L. Ramāna, L. Sheffield & E. Velikova (Eds.), *Proceedings of the 6th International Conference Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students* (pp. 120-125). Latvia: Latvia University
- Kontorovich, I., Koichu, B. 2012. *Feeling of innovation in expert problem posing*. Nordic Studies in Mathematics Education (NOMAD) 17 (3-4), 199-212 2012.
- Kontorovich, I., Koichu, B. 2009. *Towards a comprehensive framework of mathematical problem posing*. Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 3, pp. 401-408).
- Muzsnay Anna, Szabó Csaba 2017. *Dressed up problems - the danger of picking the inappropriate dress*, TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE 15: (1-2) pp. 77-94.
- Papadopoulos, Ioannis & Patsiala, Nafsika. 2020. *Capturing Problem Posing landscape in a grade-4 classroom: A pilot study*. Conference: CERME 11 At: Utrecht, The Netherlands.
- Pintér Klára 2012. *A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról*. Doktori disszertáció.

- Pehkonen, E. 1995. *Introduction: Use of open-ended problems*. ZDM, 1995/2 55–57.
- Pólya György 1977. *A gondolkodás iskolája* Gondolat, Budapest.
- Priest, D. J. 2009. *A problem posing intervention in the development of problem solving competence of underachieving middle year students* (Unpublished doctoral dissertations). Queensland University of Technology, Brisbane, Australia.
- Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina 2018: *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési és problémamegoldási készségeinek összehasonlítása*. TDK dolgozat
- Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina 2019: *Matematika tanárszakos hallgatók problémafelvetési képességeinek vizsgálata fejlesztési céllal*. TDK dolgozat
- Rosli, Roslinda & Capraro, Mary & Capraro, Robert. 2014. *The Effects of Problem Posing on Student Mathematical Learning: A Meta-Analysis*. *International Education Studies*. 7. 227-241. 10.5539/ies.v7n13p227.
- Rosli, Roslinda & Capraro, Mary & Goldsby, Dianne & Gonzalez, Elsa & Capraro, Robert & Onwuegbuzie, Anthony. 2015. *Middle-Grade Preservice Teachers' Mathematical Problem Solving and Problem Posing*. 10.1007/978-1-4614-6258-3\_16.
- Schloemer, C. G. 1994. *Integrating problem posing into instruction in advanced algebra: Feasibility and outcomes* (Unpublished doctoral dissertation). University of Pittsburg, PA.
- Silver, E. A. 1994. On mathematical problem posing. – In: *For the Learning of Mathematics* 14(No.1), p. 19-28.
- Silver, E. A., & Cai, J. 1996. *An analysis of arithmetic problem posing by middle school students*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(3), 521–539. doi: 10.2307/749846
- Singer, F.M., Pelczer, I., & Voica, C. 2011. *Problem posing and modification as a criterion of mathematical creativity*, In: M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1133–1142).
- Singer, Michaela; Ellerton, Nerida; Cai, Jinfa; Leung, Eddie C.K.. 2011. In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 137-166. Ankara, Turkey: PME.
- Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. 1996. *A framework for research into students' problem posing in school mathematics*. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Melbourne, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Van, H. & Presmeg, Norma. 2015. *An Investigation of High School Students' Mathematical Problem Posing in the United States and China*. 293-308. 10.1007/978-1-4614-6258-3\_14.

Xia, X., Lu, C., & Wang, B. 2008. *Research on mathematics instruction experiment based on problem posing*. Journal of Mathematics Education, 1, 153-163.

## 1. Melléklet:



### Matematika Tanulásméleti és -Pszichológiai Kutatócsoport

Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar, Matematikai Intézet

Kutatócsoport vezető: Dr. Szabó Csaba egyetemi tanár, email: [csaba@cs.elte.hu](mailto:csaba@cs.elte.hu)

#### 1. PROBLÉMAFELVETÉS

A problémafelvetés képessége a jelenleg hatályban lévő Nemzeti Alaptantervben az alapkompenciák között szerepel. A NAT szerint *“a matematika célja modellezni az életet, matematikai nyelven megfogalmazni olyan problémákat, melyek visszavezethetők a mindennapi életre”*.

A problémamegoldás és a matematikai modellalkotás megjelenik a 2018-ban az EU által elsődlegesen megjelölt matematikai kompetenciák között is. A nyolc matematikai kompetencia közül most kettőt emelnénk ki, melyek meghatározóak a problémafelvetés, illetve feladatkészítés szempontjából:

#### 3) A matematikai problémamegoldás

- felismerni, megfogalmazni és osztályozni a problémákat
- önállóan alkotni problémákat
- ellenőrizni, értékelni a problémamegoldási folyamatot
- stratégiákat/sejtéseket alkotni
- megoldani különböző fajta problémákat (változatos kontextusban, a matematikán kívülieket is, nyílt végűeket is)

#### 4) A matematikai modellalkotás

- lefordítani a matematika nyelvére a különböző területekről vett problémákat
- a modellen belül dolgozni
- az eredményeket visszafordítani az eredeti kontextusba
- megmutatni a különbséget az adott problémaszituáció és a matematikai modellje között

A magyarországi általános- és középiskolai matematikaoktatás köztudottan problémaközpontú. Ezt továbbfejlesztve érdemes a problémáknak nem csak a megoldásával, hanem a felvetésének tanításával is foglalkozni.

## **2.1. FELADATKÉSZÍTÉSI PROJEKT**

A matematikaoktatás szokott keretei között ritkán adódik lehetőség arra, hogy a diákok problémafelvetéssel, feladatkészítéssel foglalkozzanak, holott egyre több nemzetközi kutatás foglalkozik a problémafelvetéssel, ezen belül is azzal, hogy milyen pozitív hatással van a diákok matematikai gondolkodására és kreativitására az, ha részt vesznek problémafelvető tevékenységben.

Úgy gondoljuk, jelenleg a távoktatás keretei között az eddig bevált módszerekkel nehéz lehet új tananyagot tanítani vagy elsajátítani, újra kell gondolni a tanítási- és tanulási módszereket. Ez az időszak kiváló alkalom lehet az eddig megszerzett tudás feladatkészítéssel történő elmélyítésére, az új tananyag problémaközpontú elsajátítására. Ezért kidolgoztunk egy lehetséges projekt-oktatási módszert, melyben a diákok feladatokat készíthetnek egymásnak az éppen tanult tananyag témakörében vagy akár a korábban tanult témakörökben. A módszer alkalmazható órai munkaként is, melyet csoportmunkában házi feladatként is lehet folytatni. Az elkészült feladatsorokat és megoldásaikat a szaktanár érdemjegyekkel is jutalmazhatja, persze tanácsoljuk, hogy jóindulatúan, hiszen ez egy, a megszokottól eltérő, sok munkát igénylő tevékenység.

A projektben résztvevőknek semmilyen személyes adatát nem fogjuk tárolni és közzétenni, minden értékelés teljesen anonim módon történik.

## **2.2. A FELADATKÉSZÍTÉS MENETE:**

- A tanulók 3-4 fős csoportokat alkotnak.

Minden csoport kap egy nevet: *varos\_iskola\_osztaly\_sorszam*

(pl.: *bp\_apaczai\_12b\_3*; vagy bontott csoportok esetén: *bp\_sztangela\_10a1\_4*)

- Minden csoport valamilyen problémafelvető stratégia szerint, melyek leírása a 3. pontban található, elkészít egy legalább 4-5 feladtból álló feladatsort.

Ezek a feladatok legyenek lehetőség szerint kreatívak, izgalmasak, olyanok, amilyenek a többi csoport számára kihívást jelentenek, de nem túlságosan nehezek.

- A feladatsorokhoz érdemes a kitűzőknek megoldásokat készíteni, mert így tudják ellenőrizni, hogy érthető, jól megfogalmazott-e a feladat, helyesek-e a megadott adatok stb.
- Emellett a csoportok írják le, milyen módszerrel, vagy problémafelvető stratégiával készültek a feladataik  
(pl.: *egy már ismert feladatot variáltak; feladatmegoldás közben jutott eszükbe valamilyen új kérdés; nézegettek egy könyvet, és ott láttak hasonlót; stb*),
- És írják le, milyen célt, vagy célokat határoztak meg a feladatok készítésekor  
(pl.: *mindenképpen mágneses vonatokról szóló feladatot akartak készíteni, vagy rávezető feladatokat készítettek egy versenyfeladathoz, vicces feladatsort akartak csinálni, stb*)
- A feladatsort a szaktanár ellenőrzése után (matematikailag helyes-e a feladat, nem túl könnyű/nehéz-e) egy másik csoport megoldja, és egy szempontrendszer szerint értékeli. Az értékelés egy online google form- ban történik, melynek elérhetőségét lent mellékeljük.
- Egy feladatsor elkészítésére a diákoknak 2 hete van, ezután továbbadják a saját feladataikat és megoldják a többi csoporttól kapott feladatsort. A csoportok ciklikusan permutálódnak: Az 1. csoport a feladatsorát továbbadja 2. csoportnak, 2. csoport a feladatsorát továbbadja 3. csoportnak, és így tovább. Így minden csoport minden fordulóban készít egy feladatsort, a következőben pedig megold egy, a sajátjától különbözőt.  
A feladatkészítés történhet órai munka során, helyett, vagy házi feladatként is.
- A feltöltéskor a csapatnév végére fordulósám is kerüljön:  
*varos\_iskola\_osztaly\_sorszam\_fordulo*  
(a forduló jelentése, hogy ha több hét alatt több feladatsort készítenek a diákok, akkor így sorszámozódnak az elkészült munkák)

### **3.1. LEHETSÉGES FELADATKÉSZÍTÉSI STRATÉGIÁK**

- a) feladatkészítés megadott adatok alapján:

*pl.: kapnak egy táblázatot egy cukrászda forgalmáról, vagy egy kosárcsapat eredményeiről...*

- b) új feladat létrehozása meglévő problémák alapján, vagy azokhoz kapcsolódóan (feladatvariálás):

*pl.: „what-if-not” technika: itt van egy feladat egy szabályos háromszöggel, mi lenne, ha nem szabályos lenne, hanem egyenlőszárú? ... ezzel a technikával felfedezhetők új problémák már meglévő feladatok variálásával.*

c) feladat készítése valós szituáció modellezésével

*pl.: banki, pénzügyi szituációk modellezése*

d) adott témára készített feladatok:

*pl.: úrhajó, kosárlabda, bevásárlóközpont, kertészkedés, túrázás, filmek, buszok...*

### **3.2. A STRATÉGIÁK ISMERTETÉSE, ALKALMAZÁSA**

A diákok többféleképpen kaphatják meg az utasításokat és ismerkedhetnek meg a problémafelvető stratégiákkal:

1) A csoportok bármilyen stratégiával készíthetnek feladatsort, vagyis maguk dönthetnek arról, hogy keresgélnek-e feladatokat példatárakból, tankönyvekből, amiket átalakítanak, vagy „saját kútfőből” dolgoznak...

Írják le, hogy hogyan készült a feladat (pl. hogy megnéztek egy könyvet, és kicseréltek adatokat, vagy neten egy témára kezdtek keresgélni, stb) és milyen célt határoztak meg a feladatok kitűzésekor.

Küldjenek megoldást is a feladataikhoz.

2) Minden csoport a szaktanár által választott stratégia szerint dolgozik. (Például az 1. csoport *a*) stratégia szerint, 2. csoport *b*) stratégia szerint, 3. csoport *c*) stratégiával, ...lehetnek persze ismétlődések is)

Ekkor is írják le az egyes csoportok, hogy hogyan kezdtek neki a feladatsor készítésének, és milyen célt határoztak meg.

Küldjenek megoldást is a feladataikhoz.

3) Minden csoportnak elmondja a szaktanár, hogy milyen stratégiákból választhat (*a* fent felsorolt *a*, *b*, *c*, *d* stratégiák). Itt minden csoport kiválaszthatja, hogy melyekkel dolgozna szívesen. A különböző feladatokhoz használhatnak különböző stratégiákat is.

Ekkor is írják le az egyes csoportok, hogy hogyan kezdtek neki a feladatsor készítésének, és milyen célt határoztak meg.

Küldjenek megoldást is a feladataikhoz.



- 4) A csoportokat 2 részre osztjuk (mondjuk egy 30 fős osztályban 5-5db 3 fős csoport). Az egyik fele kap 2 stratégiát, amiből választhat, a másik fele pedig a másik kettőből választhat.
- Ekkor is írják le az egyes csoportok, hogy hogyan kezdtek neki a feladatsor készítésének, és milyen célt határoztak meg.
- Küldjenek megoldást is a feladataikhoz.

#### **4. A FELADATOK ÉRTÉKELÉSE**

Egy feladat vagy feladatsor értékelési szempontjai lehetnek:

- megoldható (0-1-2p)
- az adott korosztályhoz/tananyaghoz illő (0-1p)
- érthető a megfogalmazás (0-1p)
- matematikailag helyes (0-1p)
- beöltöztetettsége/valós szituációba való beépítése (ha van) jó, nem rontja el a feladat matematikáját (0-1p)
- kihívást jelent (0-1-2p)
- mennyire eredeti a feladat? (azaz hasonló problémát látott-e már, oldott-e már meg) (0-1-2p)
- élvezetes, ötletes, figyelemfelkeltő (nem „tucatfeladat”) (0-1p)

Ezek mellett a feladatokat megoldó diákok saját szavaikkal megfogalmazott véleményére is kíváncsiak vagyunk. A diákok az értékeléseket a <https://forms.gle/TAS8RzhXHbwJ6VXn9> helyen elérhető google form-ba írják.

A csoportok a feladatkészítésre és a feladatmegoldásra is kaphatnak pontokat. Ezek alapján lehet osztályozni is – persze ahogyan korábban is javasoltuk, jóindulatúan, hiszen ilyesmit eddig nem csináltak a diákok, miért lennének benne rögtön nagyon jók? Ha a feladatkészítésben az első három szempontra elég jó pontokat kapnak a diákok, az már kiváló teljesítmény, ez matematika tanárszakos hallgatóknak sem mindig megy könnyen!

#### **5.1.A SZAKTANÁR TEENDŐI A KÍSÉRLET SORÁN**

1. Írni egy emailt a [problemafelvetes.mat@gmail.com](mailto:problemafelvetes.mat@gmail.com) címre, hogy szeretne részt venni a kísérletben (feltüntetve az évfolyamot, az utasítások kiadásának választott módját (a 3.2. pontban leírtak)).
2. A diákoknak tájékoztatót küldeni a projektről
3. A csoportokat kialakítani (lehetőleg olyan diákokból, akik együtt tudnak működni). A csoportoknak legyen egy neve az 1.2. pontban feltüntetett módon.
4. Sorrend kialakítása a csoportok között, így fogják továbbadni az elkészült feladatsorokat (ez a névben szerepel, mint sorszám)
5. Ellenőrizni, hogy az elkészített feladatok matematikailag helyesek-e, és megfelelő szintűek-e
6. Pontozni a feladatokat és megoldásaikat az általunk összeállított szempontrendszer szerint
7. Az elkészült feladatsorokat a feladatok kitűzőinek megoldásaival együtt a <https://forms.gle/2hcSZeFfw4Yw9HFv6> helyen elérhető felületre feltölteni, valamint értékelni az ott olvasható szempontok alapján. A feladatsorokat javítatlan állapotban is várjuk, a javításra főként azért van szükség, hogy a következő fordulóban a többi csoport meg tudja oldani a kitűzött feladatokat.

### **5.2.A DIÁKOK TEENDŐI A PROJEKT SORÁN**

1. Csoportokban a szaktanár által kijelölt stratégiával egy legalább 4-5. feladatból álló feladatsort készíteni  
(határidő: az egyéb tananyagok és teendők függvényében 1-2 hét, ezt a szaktanár határozza meg).
2. A feladatsort megoldásokkal együtt elküldeni a szaktanárnak, aki ellenőrzi a feladatokat. Szükség esetén kijavítani a feladatokat a szaktanár javaslatai alapján.
3. A következő fordulóban a csoportok megoldják egy másik csapat feladatsorát. Megoldásaikat a <https://forms.gle/TAS8RzhXHbwJ6VXn9> helyen elérhető felületre feltöltik, valamint értékelik a feladatsort az ott olvasható szempontok szerint.

### **8. ELÉRHETŐSÉG**

A kutatás kapcsolattartói: Rékasi Anna, Stirling Anna Krisztina

email: [problemafelvetes.mat@gmail.com](mailto:problemafelvetes.mat@gmail.com)

Matematika Tanulásméleti és -Pszichológiai Kutatócsoport,

ELTE TTK, Matematikai Intézet

Kutatócsoport vezető: Dr. Szabó Csaba egyetemi tanár,

email: [csaba@cs.elte.hu](mailto:csaba@cs.elte.hu)

## 2. melléklet:

Tanári		Diák	
Szemponatok	Pontszám	Szemponatok	Pontszám
Megoldható	2	Mennyire kapcsolódik az idei tananyaghoz?	1
Korosztályhoz illő	1	Érthetően megfogalmazott	1
Érthetően megfogalmazott	1	Kihívást jelent	1
Matematikailag helyes	1	Mennyire újszerű?	2
Beöltöztettség/valós szituációba való beépítése (ha van)	1	Élvezetes, ötletes-e ?	1
Kihívást jelent	1		
Mennyire eredeti?	2		
Élvezetes, ötletes-e ?	1		

Lezárás dátuma: 2021. 01. 10.