EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

RÉKASI ANNA – STIRLING ANNA KRISZTINA

MATEMATIKA TANÁRSZAKOS HALLGATÓK PROBLÉMAFELVETÉSI ÉS PROBLÉMAMEGOLDÁSI KÉSZSÉGEINEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

MATEMATIKA – FIZIKA OSZTATLAN TANÁRSZAK

TDK

Témavezetők:

Szabó Csaba
egyetemi tanár
Algebra és Számelmélet Tanszék

Korándi József
adjunktus
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Tartalomjegyzék

Absztrakt 2

1. Bevezetés 2

2. Kutatásunk leírása 7

3. Eredményeink 8

4. Összefoglalás 19

Hivatkozások 21

Melléklet 23

Absztrakt

A probléma felvetés és probléma készítés a NAT alapkompetenciái közt szerepel. Ennek a kompetenciának szükségessége fokozottan jelenik meg egy matematikatanárnál. A matematikai tanári gyakorlat során rendszeresen adunk problémákat a diákoknak, ezek többnyire tankönyvekből, feladatgyűjteményekből, vagy versenyfeladat-gyűjteményekből való problémák. Dolgozatunkban a magyarországi matematikatanár-szakos hallgatók problémafelvetési képességét vizsgáljuk elsősorban az ötletesség, kreativitás és a beöltöztetés szempontjából. A felmérésben résztvevő diákok először egy tesztet töltöttek ki, majd önállóan készítettek matematikai feladatokat. Ezeket egy általunk összeállított pontrendszer alapján értékeltük, melyben legnagyobb szerepe a kreativitás vizsgálatának volt. A kapott pontszámokat többek között összevetettük az egyetemen eltöltött évek számával, az előzetes tudással, stb. Többek közt kimutattuk, hogy a problémamegoldási és a problémafelvetési készség közt összefüggés van, valamint hogy az egyetemen eltöltött évek számának növekedésével nő a hallgatók problémafelvetési készsége. A kutatás minden részét mi végeztük, a témaválasztástól az értékelésig, kivéve az első értesítés kiküldését, melyben több oktató is segítségünkre volt.

1. Bevezetés

„A tanulók matematikai fejlődése és a tanulási folyamat során alapvető, hogy ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai stb.) és leírásokat. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságának eldöntését segítő készségek kialakítása, valamint az ezeket megalapozó képességek fejlesztése.” (2.)

Dolgozatunk témája a matematika tanárszakos hallgatók problémafelvető-képességének vizsgálata. A problémafelvetés, ahogy láttuk, mint kompetencia megjelenik a Nemzeti Alaptanterv követelményei között, elsősorban, mint a valós életben megjelenő probléma egyszerűsítése egy megoldható formára, amihez hozzá tartozik még annak ellenőrzése, hogy az így kapott eredmény alkalmazható-e a valódi feladat/probléma megoldására. Ha ez egy diáktól elvárandó, akkor még inkább elvárandó egy matematika tanártól. Különösen igaz ez amiatt, hogy a magyarországi matematikaoktatás köztudottan problémaközpontú.

A NAT-ban is olvashatjuk, hogy a matematika célja modellezni az életet, matematikai nyelven megfogalmazni olyan problémákat, melyek visszavezethetők a mindennapi életre.
Az általános- és középiskolai matematikaoktatás egyik központi célja a problémamegoldási képesség fejlesztése. (Bereczki-Zámbó, Muzsnay, Szeibert, 2017)
Ezért tartottuk érdekesnek azt vizsgálni, mennyire van meg ez a képesség matematika tanár szakos hallgatók esetében.

A 2018-ban az EU által elsődlegesen megjelölt (1.) 8 matematikai kompetencia közül kettőt emelnénk ki, melyek a mi kutatásunk szempontjából a leginkább lényegesek. Ezek a kompetenciák a következők:

(3.) A matematikai problémamegoldás

- felismerni, megfogalmazni és osztályozni a problémákat
- önállóan alkotni problémákat
- ellenőrizni, értékelni a problémamegoldási folyamatot
- stratégiákat/sejtéseket alkotni
- megoldani különböző fajta problémákat (változatos kontextusban, a matematikán kívülieket is, nyílt végűeket is)

(4.) A matematikai modellalkotás

- lefordítani a matematika nyelvére a különböző területekről vett problémákat
- a modellen belül dolgozni
- az eredményeket visszafordítani az eredeti kontextusba
- megmutatni a különbséget az adott problémaszituáció és a matematikai modellje között

A problémafelvetés azért játszik kiemelten fontos szerepet a matematikaoktatásban, mert a valóságban nem botlunk lépten-nyomon modellezhető és megoldható feladatokba. Ráadásul a modellezési feladatok megoldásához szükséges matematikai hátteret is el kell sajátítani, ami csak egyszerűbb feladatok megoldásán keresztül valósulhat meg.

A problémafelvetés metodikájának kutatása 1994-ben kapott egy nagyobb lendületet, amikor Silver (1994) összefoglalta az addig problémafelvetés kapcsán megjelent néhány eredményt. Ebben a munkában már különféle kritériumokat fogalmaz meg a problémafelvetés típusaira. Ezután a cikk után számtalan olyan munka jelent meg, amelyek különböző taxonómiákat, szempontrendszereket állítanak fel a problémafelvetés módszertanának leírására, illetve törekszenek sztenderdizálható elnevezések bevezetésére. A legtöbb kutatásban a résztvevőknek konkrétan adott szituáció vagy már kész feladat alapján kellett újabb feladatot készíteni. A problémafelvetés ilyen formája nem igényel kreativitást, illetve másfajta kreativitást igények, mint amit mi szeretnénk annak nevezni. Az eddigi kutatásokat feldolgozó cikkekben vagy nem vizsgáltak kreativitást, vagy mást neveztek kreativitásnak (Silver E. A. 1994; Kontorovich, Koichu, Leikin, Berman, 2011), mint amit Magyarországon ezért kidolgoztunk egy saját szempontrendszert az értékeléshez.

Ez a szempontrendszer a következő:

1. értelmes, érthetően megfogalmazott (0-2 pont)
2. érdekes (nem tucatfeladat, megragadja a diák figyelmét), egyéni (0-3 pont)
3. beöltöztetettség és ennek igényessége (0-2 pont)

Silver (1994) a kreativitást az alábbi három szempont alapján vizsgálta:

- folytonosság: a felvetett problémák vagy kérdések száma
- rugalmasság: hány különböző kategóriába sorolhatók a készített problémák
- eredetiség: mennyire különböznek a felvetett problémák az eddig ismertektől

Mivel ez a cikk az egyik első a témában, ezért a további kutatásokat elemző cikkek legtöbbje hasonló szempontrendszert használ, Silver cikkére hivatkozva. Például egy a matematikai problémafelvetés kreativitásának mutatóiról szóló cikk (Kontorovich, Koichu, Leikin, Berman, 2011) is ugyanezzel a három szemponttal jellemzi és elemzi a kreativitás mértékét. Az ezen cikkben leírt kutatásban 15 matematikából jól teljesítő tizedik osztályos diák problémafelvető képességét mérték csoportokban. Kimutatják, hogy a fenti három szempont megadása bizonytalanságot okoz a diákok körében, és ezt a bizonytalanságot más csoport máshogy kezeli. A felmerülő legfontosabb, eddig figyelembe nem vett szempont az az, hogy a kitűzött feladat mennyire helyénvaló. Azaz, mennyire felel meg a feltételek közt nem megadott írtalan szabályoknak. Például nem szélsőséges a megfogalmazása, vagy kellően matematikai-e a feldat. Az egyik csoport például azt is megkérdezte egy témakör kapcsán, hogy milyen színű a labda. Kutatásuk alapján arra az eredményre jutottak, hogy a fent említett három szempont nem tükrözi kellően a feladatkitűzéssel szemben támasztott követelményeket. Kimutatták, hogy az adott válaszok és a felvetett matematikailag releváns, helyénvaló problémák száma szoros összefüggésben áll a csoportban lévő diákok szakértelmével, azaz matematikai tudásával. Ezen eredményeket a későbbiekben összevetjük majd a mi kutatásunk eredményeivel, ezzel is mérve, hogy mennyiben változtatnak a körülmények a felmérés kimenetelén.

Christou et al (2005) empirikus taxonómiát javasoltak a problémamegoldás vizsgálatára. A taxonómia a következőket foglalta magában: mennyiségekre vonatkozó információk kiválasztása és kezelése, mennyiségekre vonatkozó információk megértése jelentés társításával, mennyiségre vonatkozó információk más formára való „fordítása”. Ezzel analóg módon, de már nem problémamegoldásra, hanem problémafelvetésre vonatkoztatva Stoyanova cikkében (1998) három fő esetet különböztetnek meg:

1. Új probléma felvetése egy már megoldott problémára alapozva
2. Kérdések feltevése megadott történet vagy feltételek alapján
3. Probléma kitűzése tartalmi megkötés nélkül, a célközönségre fókuszálva, azaz úgy, hogy problémamegoldók egy bizonyos köre számára legyen érdekes az adott probléma

Poulos (2017) kutatásai során a feladatkészítők pedagógiai célkitűzéseit vizsgálja. Ezek a célok négy, egymással szoros összefüggésben lévő pontban fogalmazhatók meg:

1. Lehetőséget adni a diákoknak igazi, mély matematikai tanulásra
2. Megerősíteni a diákok pozitív hozzáállását a matematikához
3. Szellemi kihívást állítani a tanulók elé
4. Meglepni a hallgatókat.

Patákova (2013) a matematika tanárokat, mint problémakitűzőket három típusba sorolja: Újonc, Szakértő és Specialista. A mi szemszögünkből a legfontosabb kategória a szakértőké. Szakértő lényegében az, aki Poulos (2017) szempontjait figyelembe véve tud feladatokat készíteni. A szakértők tevékenysége minden szempontból tudatos. Általában tudják előre, hogy kell kinéznie egy problémának, nagyon széles az eszköztáruk, magas mércéket állítanak maguk elé és azokat el is érik. Ezért kézenfekvő, hogy a tanárképzésben szakértő szintű feladatkészítőket kellene képezni. A cikkből kiderül, hogy ilyet keveset találunk, hiába gondolnánk esetleg azt, hogy a tanárok többsége (legalább) ebbe a csoportba kellene, hogy tartozzon. Besorolása szerint azok a szakértők, akik gyakorlott problémafelvetők, de nem rendszeresen gyakorolják ezt a tevékenységet.

Törökországi (Lavy, Shriki, 2007) kutatások azt mutatják, hogy a leendő tanárok általában szokványos problémákat tűznek ki. Újítani nem mernek és attól is tartanak, hogy nem tudják megoldani a saját maguk által kitűzött problémákat. Olvashatunk elemzéseket arról is, hogy különböző, feladatmegoldásban szakértőnek nevezhető matematikusok és tanárok feladatkészítési technológiái mennyire különböznek, illetve hogy milyen mértékű és jellegű kreativitást kíván meg a versenyfeladatok megalkotása. Kontorovich és Koichu (2012) több esettanulmánya azt vizsgálja, hogy ezekben a szakértőkben milyen, egymással összefonódó kognitív és érzelmi folyamatok játszanak irányító szerepet a feladatkitűzés során, például min múlik, hogy egy szakértőben egy feladat kitűzésekor megjelenik-e a felfedezés vagy az újdonság érzése.

A problémafelvetés szakirodalmán belül kétségkívül a versenyfeladatok kitűzéséről szóló szakirodalom a leggazdagabb – aki azt tud, az mindent tud. Ebben a dolgozatban nem foglalkozunk a versenyfeladatok kitűzésével. Erről bővebben olvashatunk Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna és Szeibert Janka egy korábbi TDK dolgozatában (2017). A terület egyre növekvő irodalmában és szempontrendszereiben való eligazodáshoz Kontorovich és Koichu (2009) nyújt segítséget az olvasónak. Megállapítják, hogy az eddigi szempontrendszerek hiányosak vagy elnagyoltak. Az áttekintő kép biztosításán túl cikkükben vázolnak egy, a matematikai probléma-felvetési folyamat elemzésére alkalmas elméleti keretrendszert. Ez a keretrendszer széleskörűen elfogadott probléma-megoldási modellekre épül, de magába foglal speciálisan a probléma-felvetéssel kapcsolatos elméleti elemeket is. A mi dolgozatunk ehhez a keretrendszerhez is hozzájárul egy újfajta mérték megalkotásával.

Crespo és Sinclair (2008) cikke egy olyan kutatást ír le, melyben 22 tanító szakos hallgató problémafelvető képességét vizsgálták. A résztvevők egy problémafelvető kurzus hallgatói voltak, ezért a végén osztályzattal értékelték teljesítményüket. Vizsgálták a problémafelvetés motivációját, valamint, hogy két strukturált környezetben milyen problémákat készítenek a hallgatók. Többféle problémát is kellett alkotniuk a kurzus során. Crespo és Sinclair az elkészített problémákat két korábban szinte teljesen vizsgálatlan szempont alapján értékelte:

- a kutatás és feltárás fontossága a problémaalkotásban
- a matematikai probléma megoldásának esztétikuma

Azonban ez a kutatás, valamint az ezzel foglalkozó cikk mégsem lehet mérvadó a mi elemzésünkhöz, ugyanis a hallgatók által elkészített feladatok értékelése nem olyan szempontok szerint történt, amiket mi matematikailag relevánsnak gondolunk.

A fenti cikkekből is kiderül, hogy mind kreativitás, mind értelmezés, mind bonyolultság szempontjából számos kritériumrendszert állítanak fel a téma kutatói. Ezek a szempontok nagyon gyakran mesterségesen felvetett szempontok, a mi benyomásunk szerint ezek egy leendő tanár számára nem mérvadóak.

Hawkins (2000) leírja, hogy az általa elvégzett kutatás eredményei alapján a legtöbb diák nem tud spontán feladatot készíteni. Ennek vizsgálata minket is foglalkoztatott, így ezzel az írással a későbbiekben összevetettük saját tapasztalatainkat is.

2. Kutatásunk leírása

Kutatásunk célja az volt, hogy megvizsgáljuk a matematika tanárszakos egyetemi hallgatók problémamegoldási és -felvetési képességét, valamint az ezek közötti kapcsolatot, és esetleges változását évfolyamonként. Azt feltételeztük, hogy a magasabb évfolyamra járó hallgatóknak mind a problémafelvetési, mind a problémamegoldási képességük jobb, mivel egyre több szaktárgyi és módszertani kurzust végeztek el. Ezen kívül azt is vártuk, hogy azok a hallgatók, akik jobb problémamegoldó képességgel és szaktárgyi tudással rendelkeznek, ők jobb, kreatívabb problémákat fognak alkotni.

Mivel ezeket az összefüggéseket akartuk vizsgálni, így ehhez dolgoztuk ki a módszerünket. A felmérés két fordulóból állt, melyek egy általunk kijelölt konkrét témakör köré épültek. Ez a derékszögű háromszögek témaköre volt. Először egy általunk összeállított négy feladatból álló feladatsort küldtünk ki a matematika tanárszakos hallgatóknak több évfolyamon is. Ezeket a feladatokat a diákoknak önállóan kellett megoldaniuk otthon, megadott idő (45 perc) alatt. Ehhez bármilyen segédeszközt használhattak, de nem kérhettek másoktól segítséget hozzá. Az általunk kiküldött feladatsort mellékeljük a dolgozat végén (1. melléklet). A második fordulóban a hallgatóknak kellett 3 feladatot készíteniük szintén a derékszögű háromszögek témaköréhez kapcsolódóan. A 3 feladatnak különböző szintűnek kellett lennie. Ezeket a szinteket a beküldők a feladatok mellett feltüntették. Ilyen szintek például: 12. osztályos fakultáció, 8. osztályos versenyfeladat, stb.

Az első forduló feladatainak megoldásához a derékszögű háromszögek témakörének több különböző tétele, összefüggése is szükséges volt, például Pitagorasz-tétel, Thálesz-tétel, szögfüggvények, stb. Így próbáltunk ötleteket, segítséget adni a második fordulóban önállóan kitalált feladataik lehetséges témaköreihez.

A megoldott és kitalált feladatok értékelése a következő szempontok szerint történt:

1. Megoldott feladatok: A négy feladatot nem teljesen egységesen pontoztuk, mivel nem ugyanolyan típusúak. Azonban voltak szempontok, amiket mindegyiknél figyelembe vettünk. Ezek a következők:
   - Megértette-e a feladatot (1 pont)
   - Követhető a megoldás gondolatmenete (1 pont)

Ha az előbbi nem teljesült, akkor a saját értelmezése szerint javítottunk tovább.
Ezeket a szempontokat is beleszámítva az első feladat 7, a második 7, a harmadik 6, a negyedik 7 pontot ért. így tehát összesen 27 pontot lehetett elérni az első fordulóban.

2. Kitalált feladatok:

- értelmes, érthetően megfogalmazott (0-2 pont)
- érdekes (nem tucatfeladat, megragadja a diák figyelmét), egyéni (0-3 pont)
- beöltöztetettség és ennek igényessége (0-2 pont)

Ezen kívül rendszereztük a hallgatók által megalkotott feladatokat a szerint is, hogy milyen módon jelenik meg benne a derékszög (például Pitagorasz-tétel alkalmazásával, vagy szögfüggvények használatával), valamint hogy honnan való lehet a feladat (például hasonlít-e az általunk kitűzöttekhez).

Az előzetes tudás alaposabb feltérképezéséhez a kutatás elemzése során az Algebra és számelmélet3 kurzus hallgatóinál összevetettük eredményeinket a kurzuson írt zárthelyi dolgozatok eredményeivel is. Azért ezen kurzus hallgatóinak eredményeit vizsgáltuk meg legalaposabban, mert a résztvevők 49%-a jár erre az órára ebben a félévben, mivel most a másod- és a harmadévesek jelentős része is felvette ezt a tantárgyat.
A kutatásban való részvételre a felhívást több tárgy keretében kapták meg, például véges matematika, algebra és számelmélet.

Annak érdekében, hogy minél több hallgató részt vegyen a kutatásban, pluszpontokat kaphattak a beküldött feladatokért, melyeket beszámítottak nekik abból a tantárgyból, melynek keretében megkapták a felhívást. Ezért a lehetőségért külön köszönet jár Takáts Marcella tanárnőnek és Hermann Péter, Héger Tamás, Szabó Csaba tanár uraknak.

3. Eredményeink

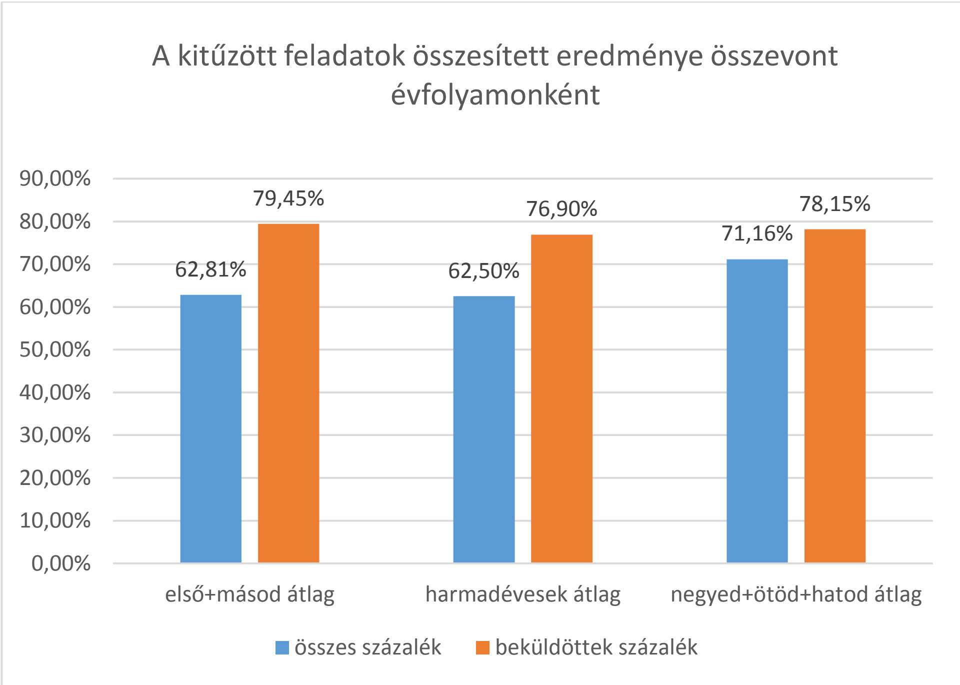
Az első fordulót összesen 58 fő küldte be, melyből 4 elsőéves, 23 másodéves, 16 harmadéves, 7 negyedéves, 6 ötödéves és 2 hatodéves.
A második fordulót 44 fő küldte be, melyből 4 elsőéves, 16 másodéves, 11 harmadéves, 5 negyedéves, 6 ötödéves és két hatodéves.
Az Algebra és számelmélet3 zárthelyit a második forduló beküldői közül 29 hallgató írta meg. Mivel ezek a csoportok nem teljes mértékben ugyanazokból a hallgatókból állnak, így minden összehasonlításnál csak azokat vettük figyelembe, akikre az összehasonlítás mindkét

szempontja vizsgálható. Fontos kiemelni, hogy ezek reprezentatív mintának tekinthetők, mivel minden csoport elegendő alanyt tartalmazott ahhoz, hogy következtetéseket vonhassunk le az eredményekből. Ezen kívül arra is figyeltünk az elemzés során, hogy olyan eredményből ne vonjunk le általános következtetést, melyben nem áll rendelkezésre megfelelő mennyiségű adat.

A korábban leírt szempontok alapján a következő összehasonlításokat végeztük el:

- Az általunk kitűzött feladatok eredményeinek összehasonlítása csoportosított évfolyamonként (1. ábra)
- Kitalált feladatok eredményeinek összehasonlítása csoportosított évfolyamonként (2. ábra)
- Az általunk kitűzött feladatok megoldási és a legjobb (legmagasabb összpontszámú) kitalált feladat (3. ábra)
- Az általunk kitűzött feladatok megoldási és a két gyengébb (alacsonyabb összpontszámú) kitalált feladat (4. ábra)
- Az Algebra és számelmélet3 zárthelyi és a legjobb (legmagasabb összpontszámú) kitalált feladat (5. ábra)
- Az Algebra és számelmélet3 zárthelyi és a két gyengébb (alacsonyabb összpontszámú) kitalált feladat (6. ábra)
- A legjobb (legmagasabb összpontszámú) és a két gyengébb (alacsonyabb összpontszámú) kitalált feladat (7. ábra)

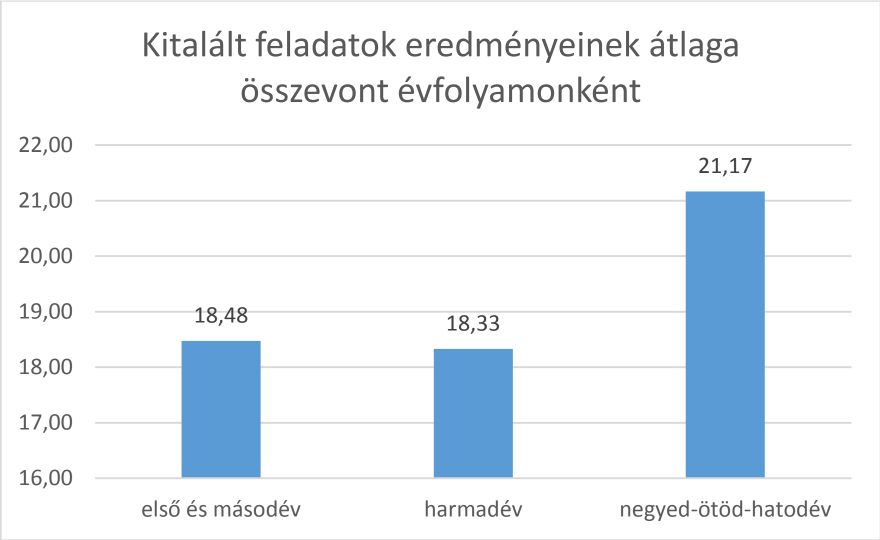
(1.ábra)



A hallgatókat három csoportra osztottuk: kezdő, haladó és végzős csoportokra. A kezdők közé kerültek az első és másodéves hallgatók, haladók a harmadévesek és végzősök a negyed-. Ötöd-, illetve az új tanterv szerint már létező hatodévesek. Az így kapott csoportok közül az első 27 főből, a második 16 főből, a harmadik pedig 15 főből állt.

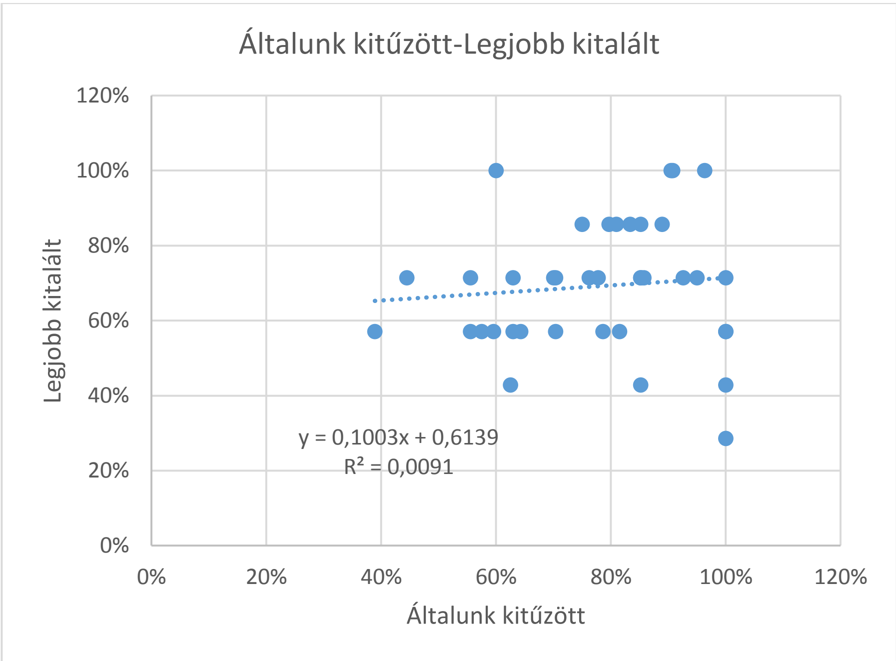
A feladatok javításakor észrevettük, hogy sokan nem oldottak meg minden feladatot, és az is látható volt, hogy nem mindenki tartotta be a meghatározott időkeretet. Ezért külön megvizsgáltuk az egyes hallgatók megoldásait aszerint, hogy milyen eredményeket értek el az összes feladatban, és csak azokban a feladatokban, amelyekkel érdemben foglalkoztak. Ezzel a második kategóriával akartuk biztosítani azt, hogy azok a hallgatók, akik betartották az időkeretet és ezért nem oldották meg az összes feladatot, ne kapjanak lényegesen kevesebb pontot azokhoz képest, akik a megadott 45 percen túl oldották meg a feladataik nagy részét.

(2.ábra)

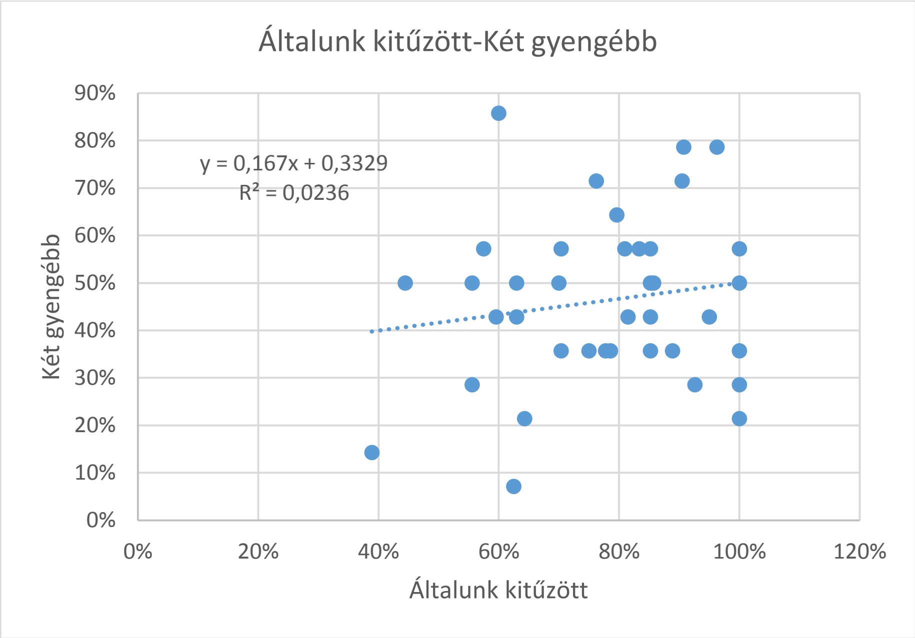


A hallgatók által kitalált feladatoknál szintén ugyanazt a három összevont kategóriát használtuk, mint a beküldött feladatok esetében.

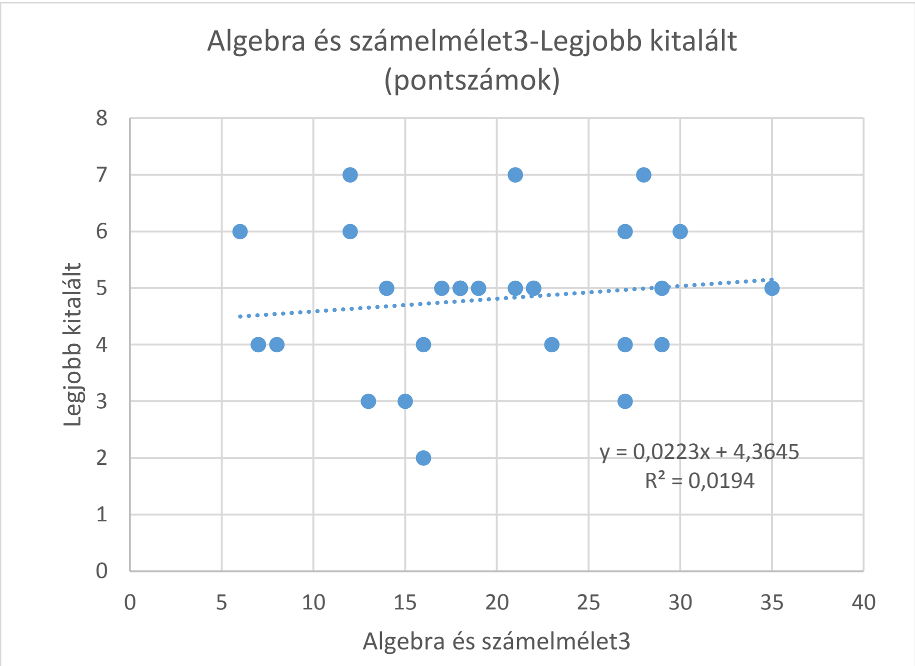
(3.ábra)



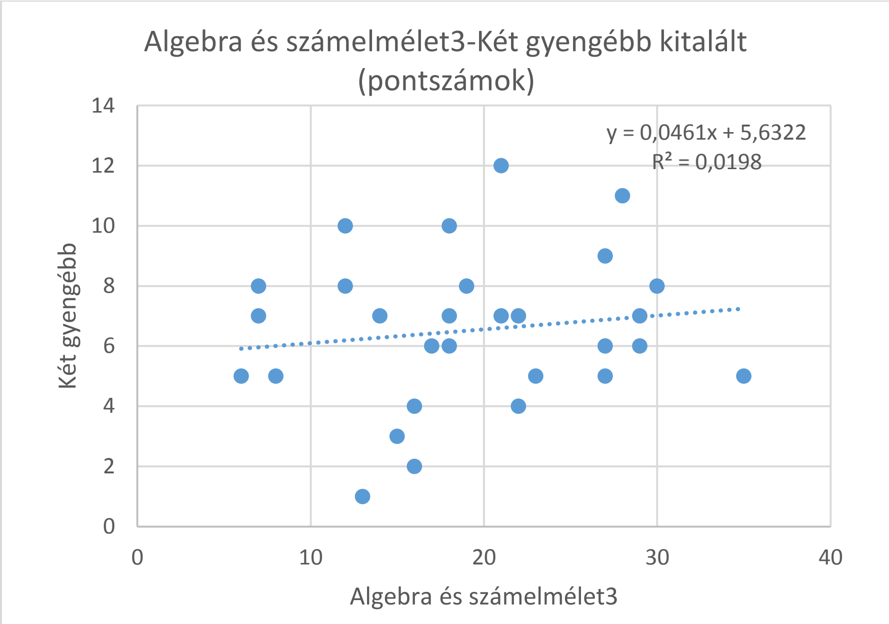
(4.ábra)


Általunk kitűzött-Két gyengébb
y = 0,167x + 0,3329
R² = 0,0236
Két gyengébb
Általunk kitűzött
0%
10%
20%
30%
40%
50%
60%
70%
80%
90%
0%
20%
40%
60%
80%
100%
120%

(5.ábra)

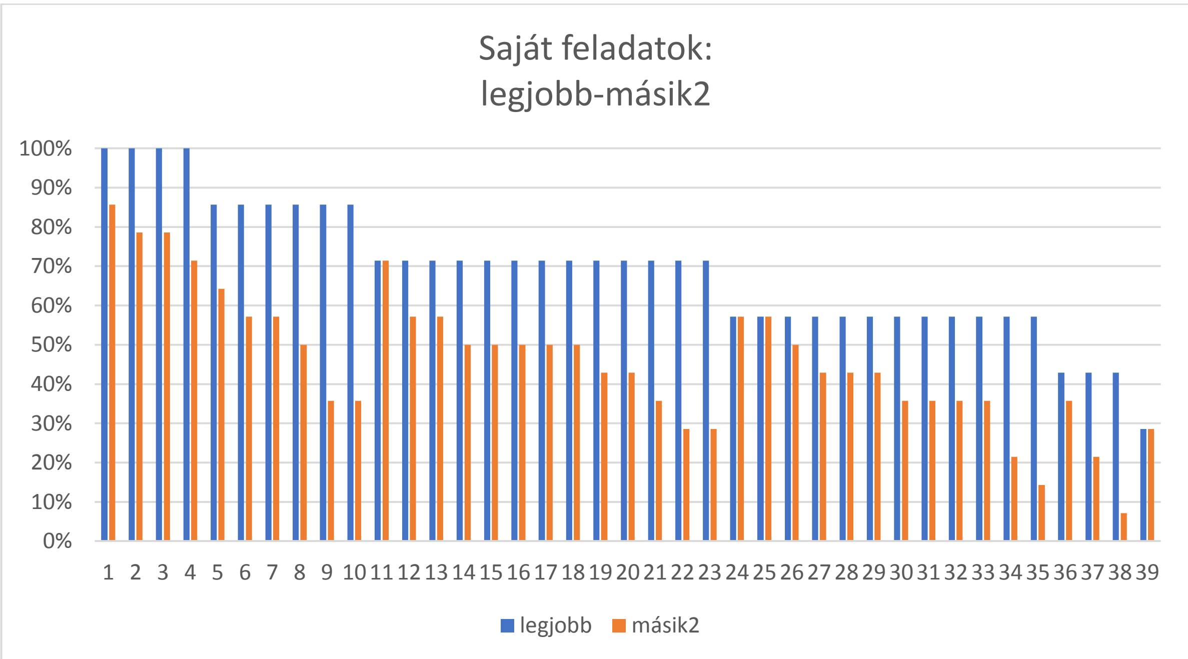

Algebra és számelmélet3-Legjobb kitalált (pontszámok)
y = 0,0223x + 4,3645
R² = 0,0194
Legjobb kitalált
Algebra és számelmélet3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
0
5
10
15
20
25
30
35
40

(6.ábra)



A feladatmegoldási és feladatkészítési készségek közti összefüggéseket (3.-6. ábrák) pontfelhő formájában ábrázoltuk, mivel így kevesebb a nagymértékű szórások miatti torzulás, és a változás mértéke pontosabban leolvasható, viszont az évfolyamonkénti változás így is látszik.

(7.ábra)



Ezen az ábrán (7.ábra) személyenként tüntettük fel a hallgatók által kitalált feladatok eredményeit (százalékban), oly módon, hogy összevetettük a legjobb pontszámú feladatukat a két gyengébbel.

Az általunk kitűzött feladatok megoldásának eredményessége gyakorlatilag egyáltalán nem változott annak függvényében, hogy melyik évfolyamra járt a megoldó (1.2. ábra). Ezzel szemben a hallgatók által kitalált problémák a tanulmányok előrehaladtával jelentősen jobbak lettek. A negyedik-ötödik-hatodik évfolyam kategóriája kiemelkedően jobb feladatokat tűzött ki, mint a másik három évfolyam (2.2. ábra). Ebből levonható az a következtetés, hogy amíg a problémamegoldó képesség nem fejlődik az egyetemi évek alatt, addig a problémafelvető képesség mutat fejlődést.

Ezek után összevetettük a fent leírt két képességet. Mind az általunk kitűzött feladatokkal, mind az Algebra és számelmélet3 zárthelyi dolgozat eredményeivel összevetettük a tanulók által kitalált feladatokat. Azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a legjobb feladat eredménye alig, vagy egyáltalán nem nő a problémamegoldó képesség függvényében, a két gyengébb feladat esetében azonban jelentős növekedés látható. A kutatás első fordulójában, a kitalált feladatok témakörében megírt teszt eredményeinél jelentősebb különbség látható a két gyengébb feladat színvonalának növekedése és a legjobb feladat színvonalának növekedése között, mint az Algebra és számelmélet3 zárthelyi dolgozat esetében. Az azonban mindkét vizsgálatnál feltűnő volt, hogy a mintát az adott módon vizsgált problémafelvető készségük alapján (tehát az általunk kitűzött feladatok, valamint az Algebra és számelmélet zárthelyi dolgozat eredményei alapján) három csoportra osztva, a leggyengébb csoportba tartozók legjobb saját feladata láthatóan gyengébb volt a többiekénél, míg a közepesen és a legjobban teljesítő csoport legjobb saját feladata közel azonos színvonalúnak mondható.

A fentiek alapján mondhatjuk, hogy egy, az általunk kidolgozott szempontrendszer alapján jónak mondható feladatot szinte bármely tanárszakos hallgató meg tudott alkotni, három feladat kitűzése során azonban már nagy eltérések láthatóak az egyes hallgatók munkái között. Ezt úgy értjük, hogy szinte mindenki tudott alkotni egy olyan feladatot, mely a saját másik két feladatához képest sokkal jobban sikerült. Ezen feladatok színvonala között is voltak különbségek, ennek ellenére a legjobb feladatok többsége általában véve is jónak mondható. Ezért úgy gondoljuk, hogy a másik két, gyengébb feladat eredménye a jó mérőszám annak megmutatására, hogy milyen szintű az egyes személyek problémafelvető képessége.

Voltak olyan diákok, akik három, szinte teljesen azonos minőségű feladatot alkottak, ezek azonban közepes, vagy gyenge feladatok lettek. Ezzel szemben azon néhány hallgató, akiknek a legjobb feladata kiemelkedően jól sikerült, nekik a másik két feladatuk is jobb lett, mint a többiek szinte bármelyik feladata (7. ábra).

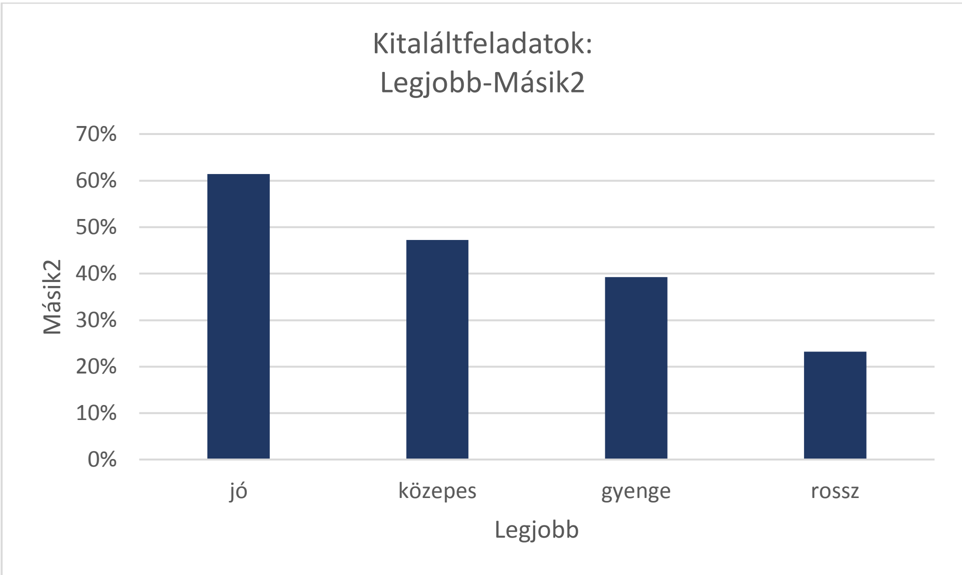
Ahogyan már említettük, a hallgatók által készített feladatok színvonala nagyon különböző volt. Születtek olyan feladatok, amiket jónak, kreatívnak találtunk, és olyanok, amiket különböző szempontok alapján értelmetlennek, vagy nem kreatívnak ítéltünk.

Az egyik általunk jónak, kreatívnak tartott feladat a következő:
„Schrödinger macskája felmászott egy almafára, de beakadt a lába, ezért nem tudott semmilyen irányban elmozdulni. Schrödinger 70°-os szögben támasztotta neki létráját az egyenes törzsű fának, kiszabadította és visszavitte a fától 84m-re lévő házába. Mekkora utat tett meg Schrödinger macskával a kezében, ha az állat a 8,9m-es fa háromnegyedénél akadt fenn? (10. osztály, alapóra)"
Bár ez a feladat nem egy nagyon bonyolult, komoly matematikatudást igénylő feladat, mi a jól sikerült feladatok közé soroltuk. Elemi módszerekkel megoldható, de igényel némi odafigyelést a folyamat során. A megfogalmazása érthető, értelmes, minden fontos adat megjelenik a szövegben. A beöltöztetése felkelti az olvasó figyelmét. Úgy gondoljuk, hogy ezt a feladatot fel lehetne adni egy 10. osztályos alapórán.

A következő feladat a gyengén sikerült feladatok egyike.
„Van egy derékszögű háromszögünk, melynek 3, 4, 5 az oldalhosszúsága. Ebbe a háromszögbe 0,5 sugarú köröket szeretnénk beírni. Hány darab kört tudunk beírni a háromszögbe? (8. osztály, versenyfeladat)"
Ez a feladat rendelkezik sok olyan jellegzetességgel, ami a rosszul beöltöztetett, vagy rosszul fogalmazott feladatoknál előfordul. Jelen formájában a feladat értelmetlen, hiszen ilyen feltételek mellett a háromszögbe végtelen sok 0,5 sugarú kört írhatunk. Ha azonban feltételezzük, hogy a készítő arra gondolt, hogy a körök csak érinthetik egymást, de nem lehetnek metszőek, akkor mi nem tudjuk megoldani a feladatot, valószínűleg a készítő sem, és szintén jogosan feltételezhető, hogy a nyolcadik osztályos versenyző diákok, akiknek a példát szánta a feladat készítője, szintén nem tudják megoldani. Valószínűleg a feladatot kitűző hallgató nem gondolta végig a példát vagy nem próbálta meg megoldani, ezért nem vette észre, hogy a beadott formában nem értelmes az elkészített feladat.

A hallgatók által elkészített saját feladatokat százalékos eredményeik alapján négy csoportra bontva (8.ábra) látható, hogy egy adott hallgató, legjobb feladata alapján akár a legjobbak között volt, akár a leggyengébbek között, a két gyengébb feladata átlagosan a legjobb feladata színvonalának körülbelül 66%-át érte el. Fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy ez nem minden hallgatóra igaz egyenként, mivel itt négy csoportról beszélünk, melyeken belül átlagoltuk a résztvevők eredményeit. Hasonlóan több másik esetben is kisebb csoportok átlagaival dolgoztunk, mivel véleményünk szerint így kaphatjuk a leginkább releváns képet az eredményekről. Azonban az a legtöbb hallgatóra igaz hogy a két gyengébb feladatának színvonala körülbelül 60-70%-a a legjobb kitalált feladatának. (9.ábra)

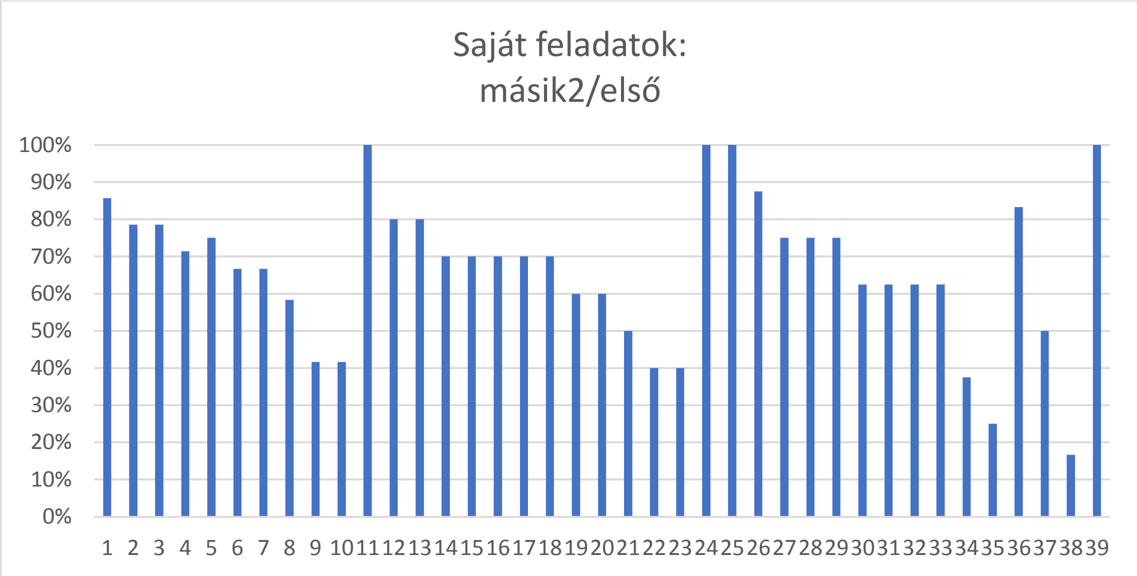
(8.ábra)



A 8. ábrán feltüntetett kategóriák létrehozásakor sorba állítottuk a hallgatókat a legjobb feladatuk pontszáma alapján, majd megnéztük, hogy a másik két feladatuknál milyen eredményeket értek el. A „jó", „közepes", „gyenge", rossz" kategóriák azt jelentik, hogy a feladatok a többi hallgatóéhoz képest milyen szinten vannak. A „jó" kategóriában a hallgatók első feladata az összpontszám 100-85%-át érte el, a „közepes" kategóriában 71%-os eredmények születtek, a „gyenge" kategóriában 57%-ot értek el a hallgatók, a „rossz" kategóriában pedig 42% és 28% közötti értékeket.

A 8.ábra egyes kategóriáiba tartozó hallgatók száma: „jó":10 fő, „közepes":13 fő, „gyenge": 12 fő, „rossz":4 fő. Ezek a létszámok azért nem egyformák, mert nem darabszám szerint bontottuk csoportokra a hallgatókat, hanem százalékos eredményeik szerint.

(9.ábra)



A 9.ábrán látható a hallgatók két gyengébb feladatának pontszáma elosztva a legjobb feladatuk pontszámával. Ezt az ábrát a 7.ábra sorrendje szerint rendeztük.

Az elemzés során vizsgáltuk azt is, hogy milyen módon jelenik meg a hallgatók kitalált feladataiban a derékszög, és hogy milyen forrásból származhat a feladat.
Bár a mi feladatsorunkban, amit a résztvevők az első fordulóban kitöltöttek, sok különböző, a derékszögű háromszögek témakörébe tartozó anyagrész megjelent (például a derékszögű háromszögek szögfüggvényei vagy a Thalesz-tétel), a hallgatók által alkotott feladatok 71%-a (összesen 77 db) a Pithagorasz-tételre épült. 16 feladatban szerepeltek szögfüggvények, valamint megjelent még néhány feladatban a Thalesz-tétel is. Többen voltak, akik az elkészített feladatsoruknak a „Pithagorasz-feladatok” címet, vagy valamilyen ehhez hasonló címet adták. Ebből azt látjuk, hogy annak ellenére, hogy mi a megírandó feladatok témakörének a derékszögű háromszögek témakörét adtuk, ők nem is kezdtek el ebben a témakörben az első, általános iskolában tanult tételen kívüli feladattípusokban gondolkodni.

A hallgatók által összesen kitalált 131 feladat közül (volt egy hallgató, aki csak 2 feladatot küldött be, a többiek hármat) csak 6 volt olyan, ami jól láthatóan az általunk kiküldött feladatok valamelyikére hasonlít, 29 feladatot találtunk „tucatfeladatnak”, vagyis olyannak, ami szinte minden tankönyvben vagy feladatgyűjteményben szerepel, és amiből rengeteget oldhattunk meg a közoktatásban töltött éveink alatt. A többiről úgy találtuk, saját készítésű, vagy egyedi. Ez azonban nem feltétlenül jelenti, hogy a feladat kreatív a mi szempontjaink mindegyike szerint, ez a szempont a feladatok pontozásában volt alaposabban vizsgálva.

Felmérésünk eredményei több korábbi kutatás eredményeit is alátámasztják. Jól látható nálunk is, ami Ilana Lavy és Atara Shriki cikkében (2007), hogy a leendő tanárok nagy része szokványos problémákat készít, valamint feltehető, hogy az általunk vizsgált hallgatók közül is sokan féltek attól, hogy a saját feladatukat nem fogják tudni megoldani. Nem is feltétlen ok nélkül gondolhattak ilyet, mivel előfordult, hogy a hallgatónak az általa kitalált feladatához mellékelt megoldása rossz volt.
A Christou (Christou, Mousoulides, Pittails, Pitta-Pantazi, Sriraman, 2005) taxonómiájára alapozó Stoyanova (1998) –féle problémafelvetési stratégiák megjelentek nálunk is, a leggyakoribb az első feladatkészítési mód volt, vagyis az egy, már megoldott problémára alapozó problémafelvetés.

A kísérletünk eredményei összehasonlíthatók még a 2011-ben Kontorovich, Koichu, Leikin, és Berman által végzettel. Az őáltaluk vizsgált négy csoportban a diákok 1, 2, 2, ill. 3-féle feladattípust gyártottak úgy, hogy az egyes csoportok 7, 9, 20 ill. 15 különböző feladatot készítettek. Így mindkét kísérlet alapján elmondható, hogy a diákok a problémafelvető munkájuk során nem, vagy nagyon kevéssé változtattak a problémákhoz használt matematikai ismeretek témakörén.

A Crespo és Sinclair (2008) által végzett kutatás a kiindulási helyzet szempontjából összevethető az általunk elvégzettel két szempontból is. Egyrészt a hallgatók motiválásának szempontjából, ugyanis náluk jeggyel, nálunk pedig pluszpontokkal történt az értékelés. Másrészt viszont Crespo és Sinclair kutatásának alanyai egy a témához kapcsolódó, problémafelvető kurzus hallgatói voltak, ezzel szemben a mi kutatásunk résztvevőinek többségének még nem volt módszertani órája korábban.

Hawkins (2000) leírja, hogy a diákok többsége nem tud spontán feladatokat kitalálni. Ezzel szemben a mi egyik hipotézisünk az volt, hogy legalább azok a hallgatók kreatív és egyedi feladatokat fognak alkotni, akiknek korábbi eredményeik kiemelkedőek voltak. Ennek ellenére a kutatásunk eredményei alátámasztják Hawkins eredményeit, mivel a hallgatók többsége legfeljebb egy használhatóan jó feladatot készített.

Ahogy a dolgozat elején leírtuk, az elsődleges matematikai kompetenciák közül a tanári gyakorlatban különösen fontosnak tartjuk a matematikai modellalkotás kompetenciáját. Ennek egyik jelentős alkalmazási területe a matematikai problémafelvetés, nevezetesen a beöltöztetett, szöveges feladatok alkotása. Az általunk elemzett feladatoknak 63%-a volt csak valamilyen módon beöltöztetett, ezek közül pedig összesen 59% volt jól beöltöztetve, a többi 41%

életszerűtlen modellel, vagy pontatlanul fogalmazott szövegezéssel, stb. bírt. Ebből látható, hogy bár az egyetemi tanárképzés során fejlődik a matematika tanárszakos hallgatók modellalkotási és problémafelvetési képessége, de a képzés jelenlegi formájában nem képes kellőképpen fejleszteni ezeket.

4. Összefoglalás

A problémafelvetés és a problémamegoldás kompetenciája kiemelkedően fontos a matematikatanárok esetében. A tanári gyakorlat során általában tankönyvekből vagy feladatgyűjteményekből adunk megoldandó problémákat a diákoknak. Mi azonban fontosnak gondoljuk, hogy egy matematika szakos tanár képes legyen önállóan is problémákat felvetni. Ezért kutatásunkban a problémafelvetési készséget vizsgáltuk az ELTE matematikatanár-szakos hallgatói körében. A felvetett problémákat elsősorban kreativitás, ötletesség, valamint beöltöztetettség szempontjából értékeltük. A felmérés két részből állt. Először a hallgatók egy általunk összeállított tesztet töltöttek ki, majd saját maguk készítettek matematikai feladatokat. Ezek értékeléséhez mi dolgoztunk ki egy pontrendszert, melyben legnagyobb hangsúlyt a kreativitás vizsgálatára fordítottunk. Az eredményeket összevetettük például a hallgatók előzetes tudásával, valamint az egyetemen eltöltött éveik számával is. Így többek közt kimutattuk azt is, hogy a problémafelvetési készség összefüggésben van a problémamegoldási készséggel, valamint az egyetemen eltöltött évek számával is.

Hipotéziseink, melyek szerint a magasabb évfolyamra járó hallgatóknak mind a problémafelvetési, mind a problémamegoldási képességük jobb, továbbá, hogy azok a hallgatók, akik jobb problémamegoldó képességgel és szaktárgyi tudással rendelkeznek, jobb, kreatívabb problémákat fognak alkotni nem mind igazolódtak be. Azt tapasztalhattuk, hogy a magasabb évfolyamokba járó hallgatók jobb problémákat alkotnak, mint az első-, másod- és harmadévesek, a problémamegoldó képesség azonban szinte azonos minden évfolyamon. Látható viszont összefüggés a problémamegoldó- és problémafelvető képesség között. Az eredmények alapján, aki átlagon felül teljesített akár Algebra és számelmélet3 tárgyból, akár az általunk kitűzött elemi geometria feladatsor megoldásában, szinte minden esetben jobb feladatokat alkotott, mint a kevésbé jól teljesítők.

Kutatásunk eredményei több korábbi vizsgálat eredményeit is alátámasztják. Többek között például Hawkins (2000) munkájának azon eredményét is, hogy a diákok többsége nem tud önállóan feladatokat kitalálni.

A kutatásban mi végeztük a következő részeket:

- Témaválasztás (problémafelvetési készség vizsgálata)
- Témaszűkítés (problémamegoldási és problémafelvetési készség vizsgálata az ELTE matematikatanár-szakos hallgatóinak körében)
- Témakör kijelölése: derékszögű háromszögek témaköre
- Kutatás megtervezése
- Dolgozat összeállítása a derékszögű háromszögek témakörében
- Dolgozat értékelési rendszerének kidolgozása
- Dolgozatok begyűjtése, majd javítása
- Feladatok begyűjtése, értékelési szempontok kidolgozása a szakirodalom alapján
- Feladatok javítása
- Beküldőkkel való kapcsolattartás, levelezés
- Adatok kiértékelése

Az első értesítés kiküldése volt az egyetlen olyan rész, melyet nem mi végeztünk. Ezt az egyetemen több tanár is elküldte a hallgatók több csoportjának, hogy minél több diákhoz eljusson ez az értesítés és vele együtt az általunk összeállított feladatsor elérhetősége.

Hivatkozások:

Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szeibert Janka 2017. *Matematikatanár szakos hallgatók probléma-felvetési készségeinek fejlesztése* (TDK dolgozat, 2017)

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., Sriraman, B. 2005. *An empirical taxonomy of problem posing processes*. ZDM, 37(3), 149-158.

Crespo, S., Sinclair, N. 2008. *What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems.* Journal of Mathematics Teacher Education, 11(5), 395-415.

Hawkins, D. 2000. *The roots of literacy*. Boulder: University Press of Colorado.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. 2011. *Indicators of creativity in mathematical problem posing: How indicative are they?* In M. Avotiņa, D. Bonka, H. Meissner, L. Ramāna, L. Sheffield & E. Velikova (Eds.), Proceedings of the 6th International Conference Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students (pp. 120-125). Latvia: Latvia University

Kontorovich, I., Koichu, B. 2012. *Feeling of innovation in expert problem posing*. Nordic Studies in Mathematics Education (NOMAD) 17 (3-4), 199-212 2012.

Kontorovich, I., Koichu, B. 2009. *Towards a comprehensive framework of mathematical problem posing*. Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 3, pp. 401-408).

Ilana Lavy and Atara Shriki 2007. *Problem posing as a means for develeoping mathematical knowledge of prospective teachers.* Proceedings of the 31st annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Eds: Woo, J.; Lew, H.; Park, K.; Seo, D.) 129-136 2007.

(1.) *Mathematical Competencies and PISA*, Elérhetöség: www.springer.com/cda/content/.../cda.../9783319101200-c2.pdf

(2.) Nemzeti Alaptanterv (2012) elérhetőség: http://ofi.hu/nemzeti-alaptanterv

Eva Patákova 2013. *Teacher's problem posing in mathematics*. Procedia-Socialand Behavioral Sciences 93 (2013) 836-841

Andreas Poulos 2017. *A research on the creation of problems for mathematical competitions*. The teaching of mathematics 2017, Vol. XX, 1, pp. 26-36

Silver, E. A. 1994. *On mathematical problem posing*. – In: For the Learning of Mathematics 14(No.1), p. 19-28.

Stoyanova, E. 1998. *Problem posing in mathematics classrooms*. In A. McIntosh, N. Ellerton (Eds.), Research in mathematics education: a contemporary perspective, (pp. 164-185). 1998

1. melléklet:

MEGGONDOLANDÓ FELADATOK

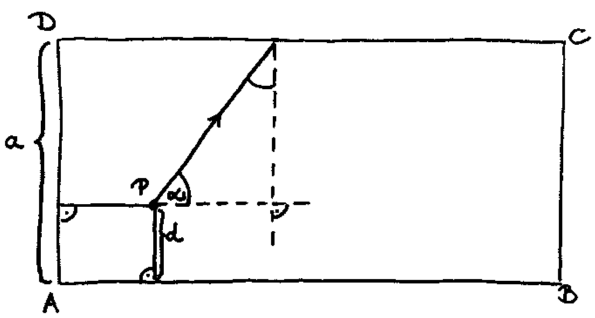
1. Az ábrán látható biliárdasztal már régi és elkopott, ezért a falának ütköző golyó a beesési merőlegeshez képest 10°-kal nagyobb szögben pattan vissza róla, mint ahogy beérkezik. Az asztal csúcsai *A, B, C, D* pontok (ld. 1. ábra).
   Elindítunk egy golyót az ábrán jelölt P pontból. Ez a golyó kétszer pattan az oldalfalhoz, végül a C pontba érkezik. (A golyót pontszerűnek tekintjük.)
   Fejezd ki *a* és *d* paraméterek segítségével, milyen hosszú utat tett meg a golyó, ha $\alpha = 60°$?

2. Adott a síkban az $x^2-4x+y^2-6y+9=0$ egyenletű K középpontú k kör, valamint a *P(4,5)* pont. Vegyük *P*-ből a *k* körhöz húzott érintők érintési pontjai közül az x-tengelyhez közelebbit. Legyen ez a pont E. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, melyre illeszkedik *K, P* és *E*!

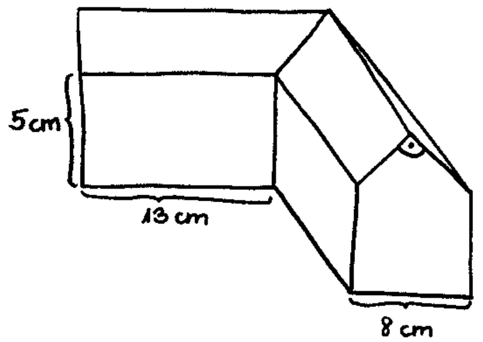
3. Legyenek adottak a térben az **a**,**b**,**c** vektorok, melyekről a következőket tudjuk:|**a**|=1, |**b**|=3, |**c**|=3, **a** és **b** az xy síkban vannak, **a** az első síknegyedben, és 10°-os szöget zár be az x-tengellyel, **b** a második síknegyedben, és 80°-os szöget zár be az x-tengellyel, **c** pedig párhuzamos a z-tengellyel. Mekkora a –**a** – **b** + **c** vektor hossza?

4. Géza bácsi megépíti a háza makettjét az ábrán látható módon (2. ábra). A makett két része derékszöget zár be egymással és a ház tengelyesen szimmetrikus. Az oromfalai tengelyesen szimmetrikus ötszögek, melyek szimmetria-tengelye függőleges.
   Ezeken az információkon kívül még a rajzba is beírtunk néhány adatot. Mekkora a modellben a tető felszíne?

1. ábra



2. ábra



Megjegyzés: az ábrák csak vázlatosak!

Jó munkát!