KELL-E FÉLNÜNK A cos15°-TÓL? HA IGEN, BIZONYÍTSD, HA NEM, MUTASS ELLENPÉLDÁT!

OTDK dolgozat

Készítette:

Csehné Szenderák Júlia

matematika-biológia osztatlan tanárszak

Stirling Anna Krisztina

matematika-fizika osztatlan tanárszak

Szörényi Sára

matematika-kémia osztatlan tanárszak

Témavezető:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

2022/23

Tartalomjegyzék

Absztrakt

Az irracionális számok a matematika minden területén jelen vannak, de pontos értékük nehezen reprezentálható a diákok számára is jól érthető, szemléletes formában. Ebben a munkában olyan geometriai konstrukciókat és számolásokat mutatunk, melyekkel szemléltethetjük az irracionális számokat.

Kutatásunkban olyan számokkal foglalkoztunk, melyek kifejezhetőek legfeljebb két négyzetgyökjellel, és megjelennek a Nemzeti Alaptantervben. Példákat hozunk olyan problémákra a felső tagozatos és középiskolai tananyagból, amikben természetesen jelennek meg ezek a kifejezések. A példákra különböző szintű matematikai tudást igénylő megoldásokat is adunk, az elemi geometriaitól a magasabb algebrai módszerekig.

Amellett, hogy ezeknek a megoldásoknak a bemutatásával a diákok megérthetik a matematika különböző területei közötti szoros kapcsolatot, példákat láthatnak arra is, hogy egy feladat megoldásához nemcsak arról a területről kereshetnek megoldásokat, amiben a probléma megfogalmazódott.

1. Bevezetés

A szüleink általános iskolás korukban táblázatokkal határozták meg a számok négyzetgyökét. A középiskolában pedig logarléccel végeztek fejben nehezebben végezhető számításokat, a hatványozástól a logaritmus számításig. Azonban az utóbbi pár évtizedben a táblázatokat és a logarlécet felváltották a számológépek. A számológéphasználat megváltoztatta az emberi gondolkodást, és a fejben számolás helyére lépett. Az oktatásban ez a jelenség lehetőséget adott arra, hogy új problémákat vessünk fel, amelyeket eddig nem, vagy csak nagyon időigényesen tudtunk megoldani. Mára a számológépek gyakran akkor is átveszik az emberi számolás helyét, amikor a fejszámolás elengedhetetlen ahhoz, hogy a diákok matematikai képességeit fejlesszük. Sőt, a diákok vakon bíznak a számológépekben, ami sok számolási vagy akár matematikai hibához is vezet (az 1.1. fejezetben mutatunk erre példát). Nekünk az a célunk, hogy kialakítsuk a diákokban a számfogalmat. Ehhez szükség van arra, hogy láthatóvá tegyünk számokat a természetes és egész számoktól kezdve a racionális számokon keresztül egészen az irracionális számokig. (Sőt, néha még tovább!) Azért, hogy a diákok pontos képet kapjanak arról, hogy mekkorák is az egyes irracionális számok, a geometriát hívhatjuk segítségül. Az irracionális számokat szemléltethetjük szakaszhosszakkal.

Ennek előnye, hogy a szakaszok ráhelyezhetők a számegyenesre - így megmutatva a szám helyét a számegyenesen. Ha szerkesztünk egy $\sqrt{2}$ hosszúságú szakaszt, és azt rámásoljuk a számegyenesre, látható, hogy az értéke az 1 és 2 számok közé esik, sőt, az igazán szemfüles diákok azt is észrevehetik, hogy az 1-hez közelebb van.

A számológépek használata a matematikaórákon szinte már általánossá vált. A matematika számos területén tudjuk úgy alkalmazni a számológépet, hogy azzal többletinformációt adjunk a diákoknak, könnyítsük az aktuális tananyag megértését.

Ha megnézünk egy érettségi feladatsort – ami rengeteg geometriai és kombinatorikai számítást tartalmaz – láthatjuk, hogy a feladatok fejben, írásban és függvénytáblázattal való végig számolása nemigen férne bele a rendelkezésre álló időbe. Ilyenkor nagy segítség, hogy a korszerű számológépek néhány gombnyomással elvégeznek hosszú számításokat, hatványt, gyököt, logaritmust, binomiális együtthatókat számolhatunk velük.

Sokszor használjuk a számológépet önmagunk ellenőrzésére is, erre a tankönyvi feladatok is ösztönzik a diákokat. Azonban, amikor irracionális számokkal végzünk műveleteket, ezt nem tehetjük meg, vagy legalábbis nem teljes bizonyossággal, hiszen a számológépek nem tudják ezeket megjeleníteni, pontosan kezelni (erre az 1.2. fejezetben számos példát mutatunk majd). A kizárólag számológépet használó gyerekek *pontosan ugyanazokat a számokat ismerik, mint a számológép*. És miket ismer a számológép? 10-12 számjegyű véges tizedestörteket. Ha azt szeretnénk, hogy más számköröket is megismerjen, mint az egész számok, a véges tizedestörtek és a π, akkor ezeket valamilyen más médiumon keresztül kell bemutatnunk nekik. A dolgozat második felében erre mutatunk néhány lehetőséget.

A dolgozat előzménye a „Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken” című tanulmánykötetben megjelent „*Geometric representations of irrational algebraic numbers in Hungarian high school mathematics education*” című szaktanulmány, melyet Vásárhelyi Éva Tanárnő felkérésére írtunk Szabó Csaba egyetemi tanár vezetésével, Bereczky-Zámbó Csillával közösen (Szabó és mtsai, 2021).

Dolgozatunkban először is megmutatjuk, milyen előnyei és hátrányai vannak a matematikaórai számológéphasználatnak. Ezek után röviden bemutatjuk a racionális és irracionális számok megismerésének történetét. A dolgozat második részében azzal foglalkozunk, milyen, kevés négyzetgyökjelet tartalmazó algebrai kifejezéssel felírható irracionális számok szerepelnek a felsőtagozatos és középiskolai tananyagban. Majd különböző módszereket adunk ezeknek a kifejezéseknek a geometriai módszerekkel való reprezentálására.

1.1 Számológéphasználat előnyei és hátrányai

Több kutatás kimutatta, hogy a számológépet használó diákok gyorsabban és jobban teljesítenek a matematikai számonkéréseken az általános iskolától az egyetemig (Masimura, 2016; Boyle & Farreras, 2015; Miles, 2008; Hembree & Dessart, 1986), sőt, a hozzáállása is jobb a matematikához azoknak, akik használhatnak számológépet (Close, Oldham, Shiel, Dooley, & O'Leary, 2012; Ellington, 2003). Egy másik kutatásban viszont tanulók gyengébben szerepeltek egy alapvető matematikai készségeket felmérő teszten, mint a 8. évfolyamosok (Woodard, 2018). A kutatásokból látszik, hogy kézzel lassabban számolunk és több hibával, ráadásul ez csak romlik, ahogy egyre jobban a számológépre hagyatkozunk. A számológépek elterjedése lehetőséget adott arra, hogy új problémákat vessünk fel, amelyeket eddig nem, vagy csak nagyon időigényesen tudtunk megoldani.

Felmerül a kérdés: nincsen árnyoldala a számológépek használatának? Nem lehetséges, hogy a számológépek akkor is átveszik az emberi számolás helyét, amikor az elengedhetetlen ahhoz, hogy a diákok matematikai képességeit fejlesszük? Az egyetemi szinten végzett kutatások azt mutatják, hogy a számológéphasználat nem akadályozza és nem is javítja a matematikai készségek elsajátítását (Ellington, 2003; McCabe & Vasquez, 2002). Általános és középiskolai szinten a számológéphasználatot főleg a 70-es és 80-as években kutatták. A legtöbb kutatás nem mutatott különbséget a számológéphasználók és fejben (írásban) számolók között, vagy éppen a számológéphasználat pozitív hatásait mutatták be. Viszont vannak olyan munkák is, amelyek a számológépek ellen szólnak. Egy kutatásban kimutatták, hogy a számológéphasználat akadályozza a 4. évfolyamos tanulókat alapvető matematikai készségek elsajátításában (Hembree & Dessart, 1986). Egy 12.-eseket bevonó kutatásban pedig kiderült, hogy a tanulók komoly hiányosságokkal rendelkeznek a törtek, exponenciális és trigonometrikus kifejezések manipulálása terén, amit csak részben képes kompenzálni a számológép (Masimura, 2016).

A számológép hatása erősen függ attól, hogy a használója milyen algebrai háttérrel rendelkezik (Zheng, 1998). Vegyük például a hatványozás azonosságait. Bármilyen összetett, több tényezős, emeletes törteket is tartalmazó kifejezést adunk a tanulóknak a hatványozás témakörén belül, azt pillanatok alatt ki tudják számolni számológép segítségével. De mi történik akkor, ha ezt a kifejezést betűkkel adjuk nekik? Ekkor megáll a zsebszámológép tudománya. A hatvány azonosságok tanításánál van másik előnye is a kézzel végzett számításoknak. Amikor egy bonyolultabb számítást levezetnek a tanulók, minden lépésnél be kell bizonyítaniuk, hogy az egyenlőségjel két oldalán álló kifejezések ekvivalensek egymással. Ehhez az azonosságokat kell használniuk indoklásként. Ezekkel az apró feladatokkal olyan, fiatalabb diákok is elkezdik gyakorolni a precíz matematikai levezetéseket, akikben még nincs igény a bizonyításra. A gyökvonás azonosságainak témakörénél is megfigyelhető ez a jelenség. Például a következő feladatot is kiszámolhatjuk számológéppel:

$$\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)\cdot\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)=\sqrt{\left(5-\sqrt{24}\right)\left(5+\sqrt{24}\right)}=\sqrt{25-24}=1 \qquad (1)$$

Mégis sokkal érdekesebb, ha fejszámolással és azonosságokkal oldjuk meg a feladatot. Hiszen itt már összeér többféle anyagrész: a hatványozás, a nevezetes azonosságok és a gyökvonás azonosságai. A feladat matematikai szépségét is elveszítenénk számológép használattal. Az sem utolsó szempont, hogy egy ilyen bonyolultabb kifejezés (hibátlan) beütése időigényesebb lehet, mint fejben kiszámolni, így a számológéppel időt sem nyerünk.

A számológéphasználatnak vagy egy másik hátulütője is: a számológépek mindentudók hírében állnak. Ám a tanulók sokszor nem tudják eldönteni, hogy a kapott eredmény helyes-e, így számológép használat mellett is sok a számolási hiba és helytelen végeredmény (Miles, 2008). Egy kutatásban több száz egyetemi hallgatóval végeztettek számításokat egy olyan számológépet használva, ami bizonyos esetekben „hazudott", azaz hamis eredményt adott (LaCour, Cantú, & Davis, 2019). A kutatás első felében hat esetből kettőben a számológép 4 másodperces késleltetéssel adott olyan eredményt, ami a helyes értéktől 15%-kal eltért. A résztvevők elenyésző százaléka élt bármilyen gyanúval a gép felé. Ennek egyik oka, hogy a 4 másodperc alatt nem végeztek fejszámolásokat, becsléseket, a másik ok, hogy túlságosan bíztak a számológépben. A kutatás következő részeiben ezért nem volt késleltetés. A végzett pilot kísérletek azt mutatták, hogy 120%-os „hazugságnál" kezdett el a kísérleti alanyok nagy része gyanakodni, hogy a számológéppel valami baj van. Ezért a második részben 120%-os eltérés volt a helyes és a gép által adott eredmények között, így a hibás eredményű kérdéseknél a kísérleti alanyok 21% és 7% helyett már 60% és 15%-uk számolta újra az eredményeket. Ebben a részben kiderült, hogy nagyobb valószínűséggel vették észre a hibákat a résztvevők, ha az adott feladatot absztrakt módon fogalmazták meg („15% of 21 = _____”), mint amikor szövegesen („You have just finished eating dinner at a restaurant and the bill is $21. You want to leave a 15% tip. How much would the tip be?”). Kiegészítették a feladatokat konceptuális hibákat tartalmazó feladatokkal. Ennek egy példája, hogy két negatív szám szorzataként negatív eredményt adott a gép. A gyanú mértéke nem volt statisztikailag eltérő az előzőkétől. Tehát nem elég, hogy vakon megbízunk a rossz eredményekben, a matematikailag helytelen eredményeket is könnyen elhisszük a gépnek.

1.2. Mit tud és mit nem a gép?

Sajnos, egy számológép nemcsak akkor „hazudik” nekünk, ha erre direkt beprogramozzák egy kutatásban. Az 1. ábrán látható, hogy 1/3-ot beütve a számológépbe, a számológép egy véges tizedes törtet ad eredményül, amit, ha újra beütve megszorzunk hárommal, megint csak egy véges tizedes törtet kapunk. A legtöbb diák ezután kerekíti az eredményt egyre, de mégis az az érzése marad, hogy bár nagyon közeli az eredmény 1-hez, mégsem egyenlő vele. Az ábra azt is mutatja, hogy az ANS funkciót használva megkaphatjuk a pontos választ, tehát a számológép mégis ismeri a szám összes számjegyét.

1. ábra: A számológéppel eltérő eredményeket kaphatunk az ANS funkcióval és a kimásolással.

Az előbbi példa igen triviálisnak tűnhet – sőt az is – de megmutatja, hogy bonyolultabb, több lépéses feladatokban egy naiv számológéphasználó, aki mindig kimásolja a kapott számot, esetleg kerekíti, majd újabb műveletet végez vele, milyen pontatlan eredményekhez juthat. A számológép több egyéb módon is félre vezethet minket:

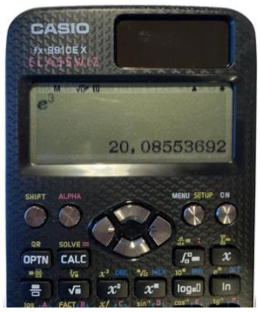
- *A nagyságrendbeli eltérések hamis eredményekhez vezethetnek*. Fejben könnyedén elvégezhetjük a $(10^{17} + 7{,}2 - 10^{17}) \cdot 10$ műveletet – az eredmény természetesen 72. Az ilyen elszámolások egy része megszűnik a tagok sorrendjének megváltoztatásával, ahogy a 2. ábra is mutatja.

2. ábra: A nagy nagyságrendbeli különbségekkel nehezen dolgoznak a számológépek.

- *Egy végtelen szakaszos tizedes törtet kerekíthet*. Ilyen esetre látunk példát a 3. ábrán. Ettől egy racionális számokkal még csak ismerkedő diáknak az az érzése támadhat, hogy a szám kilenc tizedesjegy után véget is ér (esetleg nullákkal folytatódik).

3. ábra: A $13/6$ *pontos értéke* $2{,}1\dot{6}$*, de a számológép ezt a végtelen szakaszos tizedes törtet kerekíti.*

- *Egy végtelen nemszakaszos tizedestört végét levághatja*. Ezek így racionális számnak tűnnek, mint a 4. ábrán látható példa.



4. ábra: Az e irracionális szám, így harmadik hatványa is az.

- *Egy irracionális számot egész számnak tüntethet fel*. Például a 5. ábrán látható $\left(\frac{\sqrt{50}+7}{2}\right)^{11}$ is ilyen. A kifejezés látványosan irracionális, hiszen egy irracionális számmal olyan műveleteket végzünk, amiknek az eredményeképp továbbra is irracionális számot kapunk.

Mégis, a számológép szép, egész számnak írja ki, mivel a nemnulla tizedes jegyei a kijelezhető számjegyeken túlra esnek.

5. ábra: Egy irracionális szám kellően nagy hatványának tizedesei a kijelezhető számjegyeken túl esnek, így egész számnak tűnnek.

- *Egy racionális számból, irracionális kifejezést csinálhat*. Ilyenek az 6. ábrán látható $\frac{11^6}{13}$ és $\frac{6^{11}}{10^3}$ is, amiket π többszöröseként tüntet fel a számológép.

6. ábra: A számológépek bizonyos racionális kifejezéseket π többszöröseként tüntet fel.

Éppen ezért próbáljuk ránevelni a gyerekeket, hogy ameddig csak lehet az irracionális számokkal, mint szimbólumokkal számoljanak, csak akkor üssék őket számológépbe, amikor már az eredmény ellenőrzése végett muszáj kézzel foghatóbb alakot öltenie a számnak. Megpróbáljuk elfogadtatni velük, hogy olyan szimbólumok, mint az e^3, $\ln 2$, $\cos 3$, $\sqrt{3}$ számok.

A négyzetgyökvonás elvégzését alaposan begyakoroljuk az iskolában, így gyakran már műveletként tekintünk rá. Nyolcadik után a $\sqrt{3}$ kifejezés nem igényel magyarázatot, elfogadják a diákok számként. Később, olyan exponenciális és trigonometrikus kifejezéseket is elfogadunk, mint az e^3, $\ln 2$, vagy a $\cos 3$. Azonban nagy különbség van aközött, hogy elfogadjuk ezeket a kifejezéseket számként, vagy ténylegesen értjük, mik azok az irracionális számok, és miért nem lehet őket egy néhány tizedesjegyig tartó racionális számmal helyettesíteni.

Vegyük a $\sqrt{3}$ kifejezést. Tegyük fel, hogy egy diák $\sqrt{3}$-at kap eredményül a feladatára és megjelent benne az igény (vagy belenevelte a tanára), hogy megvizsgálja, a megoldás jó-e. Ekkor számológép nélkül is gyorsan meg tudja becsülni az értékét ellenőrzésképp. Gyökhárom kerekített értékét, ha nem is tudja fejből, azt biztos tudja, hogy 2-nél kisebb, mert annak a négyzete 4. Azt is valószínűleg tudja, hogy gyökkettő kerekítve 1,41, így az eredménye 1,7 körül van. Ellenben, ha az ln2 vagy cos3 kifejezések egyikét kapja eredményül, már nem ilyen egyszerű a helyzete. Ezeknek fejben aligha tud becsült értéket adni, ezért kénytelen a számológépéhez nyúlni.

Nemcsak a diákok hagyatkoznak lépten-nyomon a számológépre. Manapság már mindenki, még a matematikával egyetemi szinten foglalkozó emberek is, ha tehetik, számológépet használnak. Érthető is, mivel a számológép a legtöbb közoktatásbeli, egyetemi és hétköznapi számolásra kellően pontos értéket ad pillanatok alatt.

1.3. Irracionális és racionális számok

A fentebbi példák nagy része azzal foglalkozott, hogy a számológép bizonyos esetekben összemossa az irracionális és racionális számokat egy gyanútlan felhasználó számára. De mik is azok a racionális és irracionális számok? A tanulók a racionális számokat már 7. évfolyamon megismerik, és definiálják őket, mint azok a számok, amelyeket fel tudunk írni két egész szám hányadosaként. Az irracionális számokkal először 8. évfolyamon találkoznak, és úgy definiálják őket, hogy ezek a végtelen nem szakaszos tizedes törtek. Azt is kimondják, hogy a valós számok halmaza a racionális és irracionális számok halmaza. A 7. ábrán látjuk, hogy a 10. évfolyamos OFI-s tankönyv, hogyan definiálja a különböző számhalmazokat [1].

A **valós számok** (**R**) leggyakrabban előforduló részhalmazai
– a természetes számok (jelölés: **N**),
– az egész számok (**Z**),
– a racionális számok (**Q**)
– és az irracionális számok (leggyakoribb jelölése $\mathbf{Q}^*$).
N = {0; 1; 2; 3; …}, **Z** = {… −2; −1; 0; 1; 2; …}. A racionális számok olyan valós számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként; az irracionális számok pedig olyan valós számok, amelyeket nem írhatunk fel két egész szám hányadosaként.

7. ábra: A számhalmazok definiálása a 10. évfolyamos tankönyv 76. oldalán [1].

Ekkor persze a valós számokat nem definiáltuk precízen, hiszen olyan fogalmak uniójaként definiáljuk, amiknek a definíciójában már használtuk a valós szám fogalmát. Ettől eltekintve van egy, az adott korosztálynak megfelelő, ráadásul igen rövid definíciónk, amit párosítunk a tizedes törtek adott típusaihoz. Tehát, a legrosszabb esetben is 10. évfolyamtól kezdve, a diákoknak tudniuk és érteniük kellene, mik azok a racionális és irracionális számok.

A nemzetközi kutatások azonban azt mutatják azonban, hogy se nem értik, se nem tudják. A kutatások általában három szemponttal, vagy azok egyikével foglalkoznak a résztvevők tudását illetőleg:

- Tudják-e definiálni az irracionális számokat
- El tudják-e dönteni egy számról, hogy racionális vagy irracionális
- El tudják-e helyezni, egyáltalán elhelyezhetőnek tartják-e az irracionális számokat a számegyenesen

Több kutatás is azt mutatja, hogy a középiskolai diákok kis hányada, legfeljebb negyede képes definiálni az irracionális számokat (Hayfa & Saikaly, 2016; Fischbein, Jehiam, & Cohen, 1995). A tanárszakos hallgatók is rosszul szerepelnek a kutatásokban. Zazkis és Sirotic több kutatást végzett azért, hogy felmérje a tanárszakos hallgatók irracionális számokról alkotott képét. Több kutatásukban kimutatták, hogy a tanárszakos hallgatok erősen a számológépre hagyatkoznak az irracionalitás megállapításakor és jobban szerepelnek, ha tizedes tört alakú számokat kell kategorizálniuk (2007, 2004). Egyik kutatásukban az is kiderült, hogy a résztvevő tanárszakos hallgatók 40%-a nem tudta megállapítani azt, hogy a 0,12122122212222... szám irracionális, a szabályosságot szakaszosságként értelmezvén, 30%-uk pedig vagy nem tudta megállapítani az 53/83-ról hogy racionális, vagy megállapította, de hibásan érvelt (2010). A fent említett harmadik szemponttal foglalkozó kutatásukban azt kérdezték 46 tanárszakos hallgatótól, hogy meghatározható-e a $\sqrt{5}$ konkrét helye a számegyenesen, majd hogy jelöljék be azt (2007). A résztvevők 8,7%-a azt állította, nem lehet megállapítani a helyét, közel 40%-a pedig pár tizedesre kerekítette a számot és azt ábrázolta. A hallgatók 13-13%-a használt függvényeket a meghatározásra vagy durva becsléssel élt, például azzal, hogy 2 és 3 között van. 19,6%-a a résztvevőknek használta a Pitagorasz-téltelt, így pontosan megállapítva $\sqrt{5}$ helyét. Zazkis és Sirotic kutatásaik alapján arra jutottak, hogy az irracionális számok tizedes törtként való reprezentálása nem járul hozza az irracionalitás konceptuális megértéséhez, ezért nagy hangsúlyt kell fektetni a geometriai reprezentációkra (2007).

A matematikaoktatás nagy hányadát a számfogalom kiépítésével töltjük. A természetes számokra ösztönösen van igényünk, hogy megszámlálhassuk a körülöttünk lévő dolgokat. Ezeket akkor is használjuk, ha nincs nevük, vagy egy hozzájuk kapcsolt absztrakt szimbólumunk, ezért is nevezzük őket „természetesnek” (Schubert, 1894). A pozitív racionális számok is rég velünk vannak, i. e. 4000-ben már használták őket az Indus folyó völgyében hossz, súly és időméréskor, i. e. 2000-ben pedig már elemi számolásokat végeztek velük Babilóniában (Agarwal & Agarwal, 2021). A negatív számok már nagyobb nehézséget okoztak tudománytörténetileg. Bár i. sz. 628-ból vannak indiai írásos emlékek, amik világossá teszik azt, hogy az emberek értették a negatív számok fogalmát, például tartozásokként, De Morgan még kötötte az ebet a karóhoz, hogy a kivonás akkor értelmes, ha a kivonandó kisebb, mint a szám, amiből kivonunk (Mumford, 2010).

Az eddig tárgyalt számhalmazokra könnyen látjuk, hogy szükségünk van. De honnan jönnek az irracionális számok? Az első írásos emlék, ami irracionális számokkal foglalkozik az indiai Shulba-szutra, i.e. 3000 körülről. A shulba geometriát jelentett az ókori Indiában. A szövegben leírják a szigorú szabályait az oltárok készítésének, méreteinek. A matematikai precizitásra nagy hangsúlyt fektettek, mivel úgy gondolták, akkor lesznek sikeresek a rituálék, ha pontosak az oltárok méretei. Az oltárok készítése során olyan a következő két probléma is felmerült (Agarwal & Agarwal, 2021):

- Hogyan kell olyan négyzet alakú oltárt csinálni, aminek a területe kétszerese egy adott négyzet alakú oltárnak?
- Hogyan kell olyan kör alakú oltárt csinálni, aminek a területe megegyezik egy adott négyzet alakú oltárnak?

Ezeknek a megválaszolásához racionális közelítéseket adnak a $\sqrt{2}$ és a π $értékére.$ Azt is leírják, hogy ezeknek a számoknak nem számolható ki a konkrét értéke. Az első igazi áttörést azonban a görögök hozták az irracionális számok terén, miután észrevették, hogy a négyzet oldala nem arányos az átlójához. Így alkották meg az összemérhetetlenség fogalmát, és– felülkerekedve a fogalom létezésének megrázó mivoltján, és feltételezhetően pár embert vízbe dobva – ők voltak az elsők, akik bizonyítást adtak arra, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális [2].

2. Mindennek az alapja: algebra

Ebben a dolgozatban olyan számokról írunk, amelyek geometriai jelentéssel bírnak és kifejezhetők legfeljebb két gyökjellel. Felmerül a kérdés, hogy hogyan keressük meg ezeket a számokat. Erre a kérdésre a Galois-elmélet segítségével kaphatjuk meg a választ.

Ezért a következő fejezetben megmutatjuk, hogyan lehet a Galois-elmélet felhasználásával olyan irracionális számokat találni, melyek reprezentálhatóak geometriailag és legfeljebb két gyökjellel leírhatók.

2.1. „Szép” számok keresése

Egy szám pontosan akkor szerkeszthető körzővel és vonalzóval Euklideszi módon, ha a Galois-csoportjának az elemszáma kettőhatvány. Ha egy számban két gyökjel szerepel, akkor ennek a számnak az algebrai foka maximum négy. Egy szám Galois-csoportján a minimálpolinomjának a $\mathbb{Q}$ feletti felbontási testjének a Galois-csoportját értjük (Stewart, 1989).

Abból, hogy a Galois-csoport foka kettőhatvány, következik, hogy a szám foka is kettőhatvány, ahol a szám foka a szám minimálpolinomjának a foka. Ismert, hogy ha egy szám négyzetgyökjelekkel kifejezhető, az ekvivalens azzal, hogy Euklideszi módon szerkeszthető körzővel és vonalzóval (Stewart, 1989).

Összefoglalva, a két gyökjellel kifejezhető számok mindig szerkeszthetőek, Galois-csoportjuk elemszáma kettőhatvány, és fokuk maximum 4.

A legérdekesebb algebrai számok azok a szabályos n-szögek középponti szögeinek a koszinuszai. Egy szabályos n-szög pontosan akkor szerkeszthető, ha a középponti szöge szerkeszthető. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha a középponti szög koszinusza szerkeszthető. A koszinusz foka nem más, mint az n-edik körosztási polinom fokának a fele, ami $\frac{\varphi(n)}{2}$. Tehát pontosan azok a szabályos n-szögek szerkeszthetők, ahol $\frac{\varphi(n)}{2}$ kettőhatvány, vagyis ahol $\varphi(n)$ kettőhatvány. Ez ekvivalens azzal, hogy $\varphi(n)$ felírható egy kettőhatvány és különböző Fermat-prímek szorzataként (Wantzel, 1837).

Ha két gyökjelet használunk, akkor ez a fok maximum 4, tehát a $\varphi(n)$ értéke maximum 8 ($\varphi(n) \in \{1,2,4,8\}$). Az első négy Fermat-prím a 3, az 5, a 17 és a 257. Könnyen kiszámolható, hogy n lehetséges értékei a következők: $2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30$. Ezekhez az érdekesség kedvéért hozzávesszük a 17-et és a 34-et is. Az 1. táblázatban bemutatjuk ezeket a számokat a megfelelő koszinuszokkal és szinuszokkal.

1. táblázat: Különböző szögek szinusz és koszinusz értékei

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\frac{2\pi}{2}$	0	-1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{2\pi}{4}$	1	0
$\frac{2\pi}{5}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{2\pi}{10}$	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\frac{2\pi}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{2\pi}{15}$	$\frac{\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}}}{4}$	$\frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1}{8}$
$\frac{2\pi}{17}$	$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4b^2-2\sqrt{2}cb+8\sqrt{2}a-(\sqrt{2}c+2b)d}}{16}$	$\frac{c+\sqrt{2}(d+b)}{16}$
$\frac{2\pi}{20}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$
$\frac{2\pi}{24}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\frac{2\pi}{30}$	$\frac{\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}}{4}$	$\frac{\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1}{8}$

$\frac{2\pi}{34}$	$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{b^2-\sqrt{2}(d+b)}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{15+\sqrt{17}+\sqrt{2}(d+b)}}{8}$

$$a=\sqrt{17+\sqrt{17}} \tag{2}$$

$$b=\sqrt{17-\sqrt{17}} \tag{3}$$

$$c=\sqrt{17}-1 \tag{4}$$

$$d=\sqrt{34+6\sqrt{17}+\sqrt{2}(\sqrt{17}-1)b-8\sqrt{2}a} \tag{5}$$

$$\sin\frac{2\pi}{14}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4\sqrt{17-\sqrt{17}}^{2}-2\sqrt{2}(\sqrt{17}-1)\sqrt{17-\sqrt{17}}+8\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}-(\sqrt{2}(\sqrt{17}-1)+2\sqrt{17-\sqrt{17}})\sqrt{34+6\sqrt{17}+\sqrt{2}(\sqrt{17}-1)\sqrt{17-\sqrt{17}}-8\sqrt{2}\sqrt{17+\sqrt{17}}}}}{16}$$

Ebben a dolgozatban a 17 és a 34 kivételével mindegyik említett számot tárgyaljuk. A $\frac{2\pi}{17}$ és a $\frac{2\pi}{34}$ koszinuszának és szinuszának pontos értékének meghatározása túl bonyolult lenne még a tehetséggondozás területén is. A $\frac{\pi}{24}$ szinuszának és koszinuszának kiszámítása nem jelenik meg a magyar középiskolai követelmények között, kizárólag csak a tehetséggondozásban. A következő fejezetekben bemutatjuk, hogyan jelennek meg ezek a számok a Nemzeti alaptantervben (Nemzeti alaptanterv, 2020). Mutatunk néhány példát arra, hogyan számolhatjuk ki ezen számok pontos értékeit. Végül néhány elemi módszert mutatunk a $cos\,\frac{2\pi}{24}$ kiszámítására.

2.2. Négyzetgyökjelekkel kifejezhető számok a tananyagban

Ebben a fejezetben először azt vizsgáljuk meg, hogyan és mikor jelennek meg különböző, négyzetgyökjelekkel kifejezhető számok a Nemzeti Alaptantervben és a tankönyvekben (2020). A tananyag áttekintését követően pedig külön figyelmet szentelünk annak, hogy a $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ és $\sqrt{6}$ számok, milyen feladatokban és példákban jelennek meg a különböző korosztályokban. Mind a négy szám esetében bemutatunk egy olyan feladatot, melynek megoldása az adott szám, majd különböző megoldási módszereket mutatunk be az általános iskolai szinttől egészen az egyetemi szintű matematikai módszerekig.

A tananyag áttekintése során csak azokra a tananyagrészekre szorítkozunk, melyek vagy tartalmaznak négyzetgyökvonást, vagy valamilyen fontos előkészítései a négyzetgyökvonásnak és a négyzetgyökökkel kifejezhető számoknak.

Az *ötödik osztályos* geometria elsősorban a háromszögek és a speciális négyszögek és körök tulajdonságaira, valamint a térbeli alakzatokra, például a gömbre, a téglatestekre és a kockára összpontosít. Ezenkívül a különböző szögtípusokat (hegyesszög, derékszög, tompaszög, egyenes- és homorúszög) vezeti be. A négyzetek és téglalapok átlóinak, valamint a kockák és kockák lap- és testátlóinak részletes taglalása a négyzetgyökvonás közvetlen előkészítése.

Hatodik osztályban a háromszögeket az oldalak hossza és a belső szögek alapján különböző csoportokba soroljuk, például egyenlő szárú háromszögek vagy hegyesszögű háromszögek. Megtanuljuk kiszámítani a derékszögű háromszögek területét.

Hetedik osztályban a háromszögek hasonlóságának és egybevágóságának tárgyalásával az egyenlő oldalú háromszögek és a speciális derékszögű háromszögek (45°- 45°-90° és 30°-60°-90°) további vizsgálatára kerül sor. Ez utóbbi kettő a következő évben a Pitagorasz-tétel tanulásakor, később pedig a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{3}$ kiszámításakor válik fontossá.

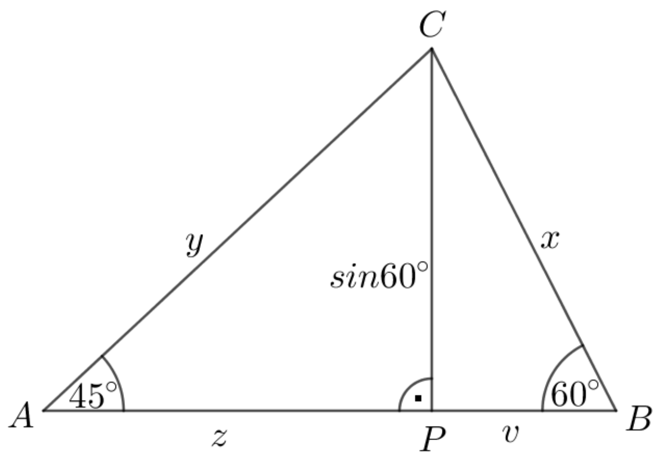
Négyzetgyökök kiszámolására először *nyolcadik osztályban* kezdődik meg, elsőként olyan feladatokon keresztül, melyekben a diákoknak olyan négyzeteket kell rajzolniuk, melyek területe nem négyzetszám – ilyen feladat olvasható az 1.2. alfejezetben. Ezen feladatok megoldásakor a diákok még nem ismerik a Pitagorasz-tételt, helyette a terület képletével és a négyzetgyökvonással dolgoznak. Később megtanulják a Pitagorasz-tételt is.

Kilencedik osztályban geometriai ábrázolással szemléltetjük a $\sqrt{2}$ szám irracionalitását, az egységnégyzet átlóját a számegyenesre forgatva. Ez természetesen még nem bizonyítás, azonban ez az illusztráció megalapozza a diákok hozzáállását az irracionális számokhoz. Bevezetjük a négyzetgyök-függvényt is.

Tizedik osztályban kerül sor a négyzetgyökös azonosságok bevezetésére, a négyzetgyökökkel végzett műveletek elsajátítására. Az egész számok hatványozásához kapcsolódó feladatok további ismeretekhez és nagyobb rutinhoz vezetnek. Ekkor kerülnek elő olyan példák is mint az 1.1. fejezetben bemutatott $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)\cdot\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)=?$ feladat. Az itt tanultakat később alkalmazzuk a geometria területén például a négyzetgyök oldalhosszúságú háromszögek és téglalapok területének kiszámításakor. Az újonnan tanult magasságtétel és befogótétel alkalmazásakor gyakran megjelennek többek közt a $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ számok. A háromszögek segítségével végzett négyzetgyök hosszúságú szakaszhossz-számításokat ettől az évfolyamtól kezdve három-dimenziós térbeli alakzatokban is végzünk (például gúlák magasságának kiszámításakor). Ebben az évben jelennek meg a trigonometrikus szögfüggvények. A tg , sin , cos függvényeket először hegyesszögű háromszögekben értelmezzük, majd következik a „trigonometrikus Pitagorasz-tétel" és a nevezetes szögek $(30°, 45°, 60°)$ szinuszának, koszinuszának és tangensének kiszámolása. Ezzel megjelenik a $\sqrt{2}$ és a $\sqrt{3}$ egy újabb kiszámítási módja. A témakör kezdetén a feladatok kifejezetten arra kérik a tanulókat, hogy ne használjanak számológépet, de a téma végére számos feladat a számológép használatának gyakorlására összpontosít. Számos tankönyvben szerepel olyan feladatcsoport, ami célzottan a számológéphasználatot gyakoroltatja, vagy a számológépek különböző funkcióit mutatja be (Barcza, Basa, & Tamásné Kollár, 2017; Juhász & Orosz, 2021).

Feladat:

Milyen hosszúak az ábrán jelölt szakaszok? Számológép használata nélkül válaszolj! (10.-es szintű feladat)



8. ábra: Háromszög a jelölt szakaszokkal

A számolás menete:

A PBCD háromszög egy speciális derékszögű háromszög („félszabályos háromszög"), melynek szögei 30°, 60°, 90° fokosak. Ezt megkaphatjuk egy x oldalú szabályos háromszög félbevágásával (PC mentén). Ezek szerint $x = 2v$.

$$sin60° = \frac{sin60°}{x} \qquad (6)$$

$$x = 1 \qquad (7)$$

$$v = \frac{1}{2} \quad (8)$$

$$sin60° = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (9)$$

APCD háromszög egy egyenlőszárú derékszögű háromszög. Így

$$z = \overline{AP} = \overline{PC} = sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (10)$$

$$y^2 = z^2 + z^2 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad (11)$$

$$y = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (12)$$

■

Tizenegyedik osztályban derékszögekre, tompaszögekre és végül tetszőleges forgásszögekre (az összes valós számra) is kiterjesztjük. *Tizenkettedik osztályban* az új tananyag nem kapcsolódik a dolgozatban tárgyalt fogalmakhoz.

2. Az irracionális számok geometriai reprezentálása

Ebben a fejezetben példákat mutatunk arra, hogy mikor és milyen módon jelennek meg a $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ számok a tananyagban. Mindegyik számhoz mutatunk geometriai reprezentációt, vagyis olyan feladatot vagy feladatokat, melyekben az adott irracionális szám szakaszhosszként jelenik meg.

2.1. Gyökkettő

A hazai közoktatásban a négyzetgyökös kifejezések közül a legfontosabb a $\sqrt{2}$. A diákok először a négyzetgyökvonás bevezetésekor és a művelet gyakorlásakor foglalkoznak vele. Ezután a Pitagorasz-tétel témakörének tanulásakor, bizonyításakor és az egységnégyzet átlójának kiszámításakor találkoznak a $\sqrt{2}$-vel. A következő megjelenése általában a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyításakor történik – ez a bizonyítás nagyon fontos a magyar matematikaoktatásban.

A trigonometrikus szögfüggvények bevezetésével jelenik meg újra a $\sqrt{2}$. Először a tangens szerepel a tananyagban, majd a szinusz és koszinusz függvények. A $\sin(45°)$ és

$\cos(45°)$ értékeket egység befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszögön keresztül mutatjuk be – miután kiszámoljuk a háromszög átfogójának hosszát, könnyen kifejezhető $\sin(45°)$ és $\cos(45°)$ pontos értéke.

Feladat:

Rajzolj a füzetedbe olyan négyzeteket, melyek 1, 4, 9, 2, 5, 10 rácsnégyzet területűek! Milyen hosszúak a négyzetek oldalai? – 8. osztályos feladat (Gedeon, Paróczay , Számadó, Tamás, & Dr. Wintsche, 2017)

A számolás menete:

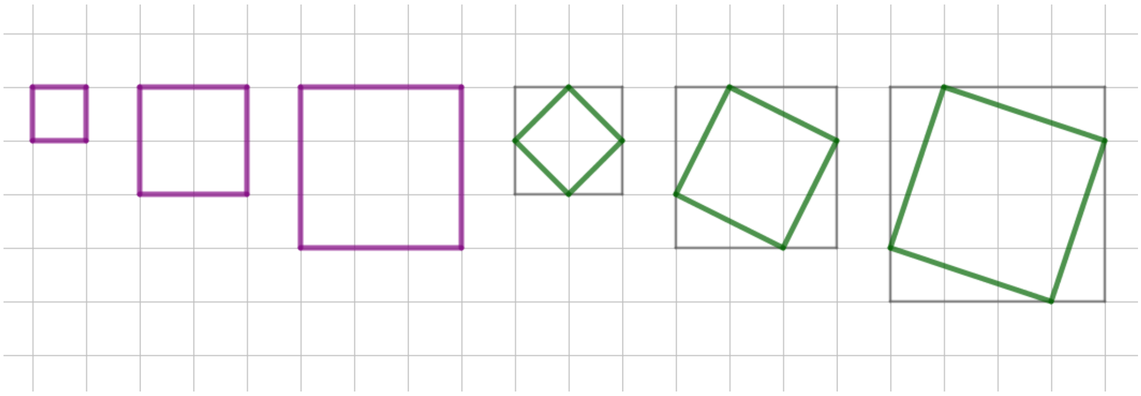
Az 1, 4 és 9 területű négyzetek könnyen berajzolhatók a diákok kockás füzetébe, mivel ezek négyzetszámok.

A 2, 5 és 10 területű négyzetek szükséges oldalhosszainak kiszámításakor a terület képletét használhatják, emlékezve arra, hogy az oldalak hossza csak pozitív lehet.

$$a^2 = 2 \qquad (13)$$

$$a = \sqrt{2} \qquad (14)$$

Ez természetesen még nem jelenti azt, hogy most már képesek lerajzolni a négyzeteket, hiszen a füzetekben egy rácsnégyzet oldalhossza 1, nem pedig $\sqrt{2}$. A keresett négyzeteket többnyire próbálgatással rajzolják meg, és a helyességüket a területük kiszámításával, rácsvonalra illeszkedő négyzetté való átdarabolással, vagy kiegészítéssel ellenőrzik.



9. ábra: 1, 2, 4, 5, 9, 10 egység területű négyzetek négyzetrácson.

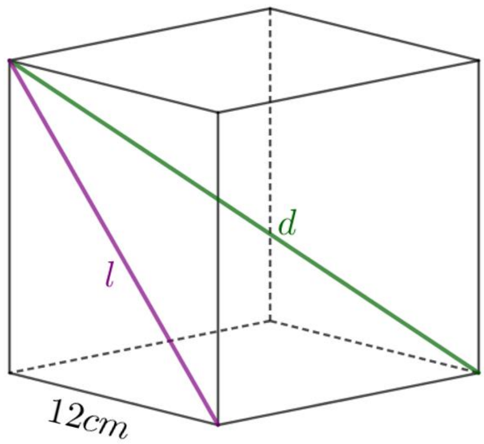
2.2. Gyökhárom

A $\sqrt{2}$-höz hasonlóan a négyzetgyökvonás bevezetésekor, a négyzetgyökökkel való számolás gyakorlásakor találkoznak a $\sqrt{3}$-mal, közvetlenül ezután pedig a Pitagorasz-tételkör tanulásakor találkoznak vele. Tanulócsoporttól függően akár már nyolcadik osztályban, de legkésőbb kilencedik évfolyamon kap hangsúlyos szerepet a $\sqrt{3}$ szám, amikor az egységkocka átlóját számolják ki a diákok. (Ez kötelezően a kilencedik évfolyamos térgeometria tananyagrészben szerepel, azonban már nyolcadik osztályos tudással is kiszámítható, ezért sok osztályban ez a feladat valamilyen formában szerepelni szokott.) Emellett a $\sqrt{3}$, vagy méginkább a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ kifejezés az egység oldalú szabályos háromszög magasságként is megjelenhet nyolcadik vagy kilencedik osztályban, ezt szintén Pitagorasz-tétellel számolják ki a diákok. Néha ez a probléma (a szabályos háromszög magasságának kiszámítása, vagy a félszabályos háromszög befogói hosszának kiszámítása) nem is matematikaórán vetődik fel, hanem fizikaórán, amikor különböző erőket komponensekre kell bontani és így kiszámítani a nagyságukat.

A trigonometrikus szögfüggvények bevezetésekor a $\sqrt{3}$ mégnagyobb jelentőségre tesz szert. Először hegyesszögek szinuszát, koszinuszát és tangensét vezetjük be. 30°és 60°-os szögek esetén ezen függvények értékeit könnyen kiszámolhatjuk úgy, hogy veszünk egy 2 oldalhosszúságú szabályos háromszöget, melynek egyik magasságát behúzva 30°, 60°, 90° fokos háromszögeket kapunk ismert oldalhosszakkal $(2, 1, \sqrt{3})$. Így meg is kapjuk a $sin60° = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és a $tg30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nevezetes értékeket. Számos trigonometriafeladat épít ezen értékek használatára, kifejezetten kérve, hogy a diákok ne használjanak számológépet a megoldásukhoz.

Feladat: *Mekkora egy 12 cm élhosszúságú kocka lapátlója és testátlója?*

A számolás menete:



10. ábra: A 12 cm élhosszúságú kocka lapátlója és testátlója.

A kocka lapjai 12 cm oldalú négyzetek. Két szomszédos él és egy lapátló egy egyenlőszárú derékszögű háromszöget alkot. Pitagorasz-tétellel kiszámolhatjuk a lapátló (l) hosszát:

$$l^2 = a^2 + a^2 = 12^2 + 12^2 = 2 \cdot 144 \qquad (15)$$

$$l = \sqrt{2 \cdot 144} = 12\sqrt{2} \qquad (16)$$

A testátló (d) kiszámításához tekintsük azt a derékszögű háromszöget, melyet egy él, egy lapátló és egy testátló alkot. Ismét a Pitagorasz-tételt felhasználva:

$$d^2 = l^2 + a^2 = \left(12\sqrt{2}\right)^2 + 12^2 = 3 \cdot 12^2 \qquad (17)$$

$$d = \sqrt{3 \cdot 12^2} = 12\sqrt{3} \qquad (18)$$

2.3. Gyököt

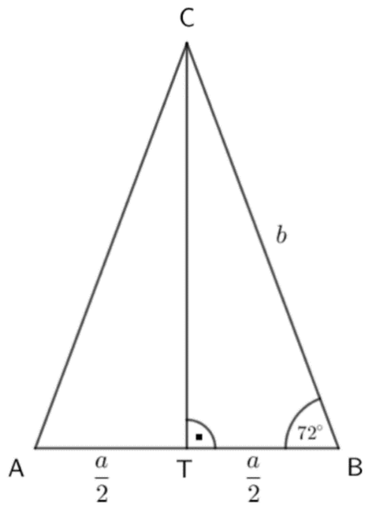
A $\sqrt{\mathbf{2}}$-höz és a $\sqrt{\mathbf{3}}$-hoz hasonlóan a $\sqrt{\mathbf{5}}$-t is először a négyzetgyökökkel történő számolások során jelenhet meg. A $\sqrt{\mathbf{5}}$-tel találkozhatunk például egy olyan egyenlőszárú háromszög oldalarányainak számolásakor, aminek az alapon fekvő szögei 72°-osak. Emellett a $\sqrt{\mathbf{5}}$ az aranymetszés megismerésekor kap jelentős szerepet. De ezek a számítások csak a tehetséges osztályokban vagy szakköri keretek között kerülnek elő. A $\sqrt{\mathbf{5}}$-ről akkor is beszélhetünk, ha a 18°, 36°, 54° és a 72° szinuszainak, koszinuszainak pontos értékét határozzuk meg. De az előzőekhez hasonlóan az említett szögek sem hangsúlyosak a tantervben vagy a tankönyvekben, szintén csak a tehetséggondozásban jelennek meg.

Ebben a dolgozatban öt módszert mutatunk be a 72° szinuszának vagy koszinuszának pontos értékének kiszámítására, és így a megjelenítésére. Az első három módszer olyan ismereteket igényel, amik a középiskolai tehetséggondozásban megjelennek. Az utolsó két módszer magasabb szintű matematikai tudást igényel, ezért csak magasabb tanulmányi szinten érdemes tárgyalni őket.

Feladat: *Hogyan számolnád ki azon egyenlőszárú háromszög oldalainak arányát, amelynél az alapon fekvő szögek 72°-osak?*

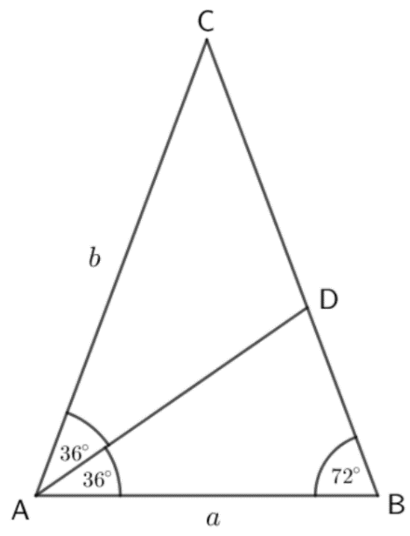
1. Számítási módszer

A háromszög harmadik szöge 36°-os, ami a 72°-nak éppen a fele. Vegyük az AB oldalhoz tartozó magasságot és legyen ennek a talppontja T .



11. ábra: A 72°-os alapon fekvő szögű egyenlőszárú háromszög magassága

A BTC háromszög derékszögű, így $\cos 72° = \frac{a}{2b}$.

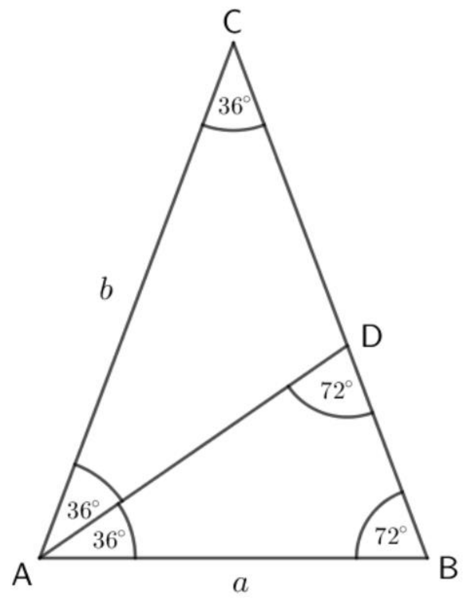


12. ábra: A háromszög szögfelezője

Vegyük az A csúcsnál lévő szög szögfelezőjét, ennek a szemközti oldallal vett metszéspontja legyen D .

$$BAD\sphericalangle = CAD\sphericalangle = 36° = ACD\sphericalangle \quad (19)$$

Ezért $ABD\sphericalangle = 72°$ és a BDA háromszög és az ABC háromszög hasnolóak. Így $\frac{a}{b} = \frac{BD}{a}$.



13. ábra: Az egyenlőszárú háromszögek

Most használjuk a szögfelezőtételt, ami azt mondja ki, hogy a háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a számszádos oldalak hosszának arányában osztja két részre.

$$BD = \frac{a}{a+b} \cdot b = \frac{ab}{a+b} \quad (25)$$

Mivel a BDA és az ABC háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{AC} \qquad (26)$$

$$\frac{\frac{ab}{a+b}}{a} = \frac{a}{b} \qquad (27)$$

$$\frac{b}{a+b} = \frac{a}{b} \qquad (20)$$

A nevezőkkel megszorozva az egyenletet a következőt kapjuk:

$$a \cdot (a+b) = b^2 \qquad (29)$$

$$a^2 + ab - b^2 = 0 \qquad (30)$$

Elosztva b^2-tel:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 1 = 0 \qquad (31)$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei

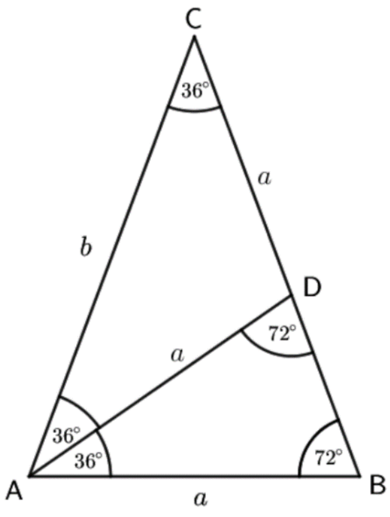
$$\frac{a}{b} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad (32)$$

Ha vesszük a C csúcshoz tartozó magasságot, akkor derékszögű háromszöget kapunk, amiből kapjuk, hogy a $\cos 72\,°$ értéke az $\frac{a}{2}$ és a b hányadosa. Tehát a $\cos 72\,°$ értéke a fele a másodfokú egyenletből kapott gyöknek. Következésképpen

$$\cos 72° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \qquad (33)$$

2. Számítási módszer

Ez a módszer csak a BD oldal hosszának meghatározásában különbözik az előzőtől.



14. ábra: A háromszögek és oldalhosszaik

Mivel $DAB\sphericalangle = 36°$ és $DBA\sphericalangle = 72°$, ezért $ADB\sphericalangle = 72°$, vagyis a BAD háromszög egyenlőszárú. Ezért $AD = AB = a$. $DAC\sphericalangle = DCA\sphericalangle = 36°$, így az ADC háromszög is egyenlőszárú, ahol $CD = AD = a$.

$$CD + BD = b \tag{34}$$

$$a + BD = b \tag{35}$$

$$BD = b - a \tag{36}$$

Mivel a BDA és az ABC háromszögek hasonlóak, ezért

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{AC} \tag{37}$$

$$\frac{b-a}{a} = \frac{a}{b} \tag{38}$$

A nevezőkkel megszorozva az egyenletet a következőt kapjuk:

$$b \cdot (b - a) = a^2 \tag{39}$$

$$b^2 - ab = a^2 \tag{40}$$

Ugyanahhoz az egyenlethez jutunk, mint az előző módszerben.

$$a^2 + ab - b^2 = 0 \tag{41}$$

Innentől a megoldás ugyanaz, mint az előző számolási módszerben.

3. **Számítási módszer**

Trigonometrikus azonosságok felhasználásával is ki lehet számítani a $\cos 72°$értékét. Legyen $\alpha = \frac{2\pi}{5} = 72°$. A $\cos\frac{4\pi}{5}$értéke megegyezik a $\cos\frac{6\pi}{5}$ értékével.

$$cos\,2\,\alpha = cos\,3\,\alpha \qquad (42)$$

A pitagoraszi azonosságot, a kétszeres és a háromszoros szögekre vonatkozó formulákat használva adódik a következő.

$$4\,cos^3\,\alpha - 2\,cos^2\,\alpha - 3\,cos\,\alpha + 1 = 0 \qquad (43)$$

Kiemelhetjük az egyet, mint gyöktényezőt, így a polinomot egy elsőfokú és egy másodfokú kifejezés szorzataként írhatjuk fel.

$$(cos\,\alpha - 1) \cdot (4\,cos^2\,\alpha + 2\,cos\,\alpha - 1) = 0 \qquad (44)$$

A másodfokú egyenlet megoldásai a következők:

$$cos\,\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad (45)$$

$$cos\,\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad (46)$$

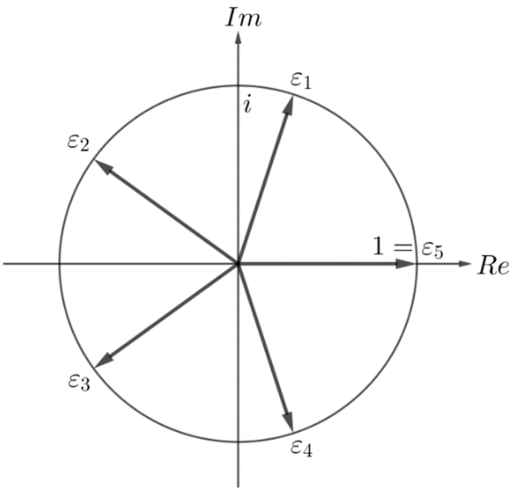
A megoldás a pozitív gyök, mivel a 72° a 0° és a 90° között van.

4. **Számítási módszer**

A $\cos 72°$ kiszámítható az első primitív ötödik egységgyök valós részének meghatározásával. Az ötödik egységgyökök az ötödik körosztási polinom gyökei.

$$\frac{x^5-1}{x-1} = 0 \qquad (47)$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \qquad (48)$$



15. ábra: Ötödik egységgyökök

Az ötödik körosztási polinom egy reciprok egyenlet, tehát kifejezhető az $x + \frac{1}{x}$ polinomjaként is.

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \tag{49}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \tag{50}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{51}$$

Egy egységhosszú komplex számnak a reciproka az éppen a konjugáltja. Ezért ha nézzük egy egységhosszú komplex szám és reciprokának az összegét, az pont ugyanaz, mint a konjugálttal vett összege, ami pedig nem más, mint a valós résznek a kétszeresese. Ezért az egyenlet gyökei éppen $\cos\alpha$ kétszeresei.

$$x + \frac{1}{x} = 2\,cos\,\alpha \tag{52}$$

A megoldás a pozitív gyök, mivel a 72° a 0° és a 90° között van.

5. Számítási módszer

Legyen $\alpha = \frac{2\pi}{5}$. Egy egység hosszúságú komplex szám ötödik hatványa egy ugyanolyan hosszúságú komplex számmal egyezik meg, aminek a szöge az eredeti szám ötszöröse.

$$(cos\,\alpha + i \cdot sin\,\alpha)^5 = cos\,5\,\alpha + i \cdot sin\,5\,\alpha \tag{53}$$

$$(cos\,\alpha + i \cdot sin\,\alpha)^5 = 1 \tag{54}$$

Az egyenlet bal oldala kibontható a binomiális tétel segítségével.

$$\begin{aligned}(cos\,\alpha + i \cdot sin\,\alpha)^5 = \\ &= \binom{5}{0} cos^5\,\alpha \\ &+ \binom{5}{1} cos^4\,\alpha \cdot i \cdot sin\alpha \\ &- \binom{5}{2} cos^3\,\alpha \cdot i \cdot sin^2\,\alpha \\ &- \binom{5}{3} cos^2\,\alpha \cdot i \cdot sin^3\,\alpha + \binom{5}{4} cos\,\alpha \cdot i \cdot sin^4\,\alpha + \binom{5}{5} sin^5\,\alpha\end{aligned} \tag{55}$$

Tudva, hogy a megoldás valós része egy és használva a pitagoraszi azonosságot a következő egyenletet kapjuk.

$$\begin{gathered}cos^5\,\alpha - 10\,cos^3\,\alpha \cdot (1 - cos^2\,\alpha) + 5\,cos\,\alpha \cdot (1 - cos^2\,\alpha)^2 = 1 \\ 16\,cos^5\,\alpha - 20\,cos^3\,\alpha + 5\,cos\,\alpha = 1\end{gathered} \tag{56}$$

A $\cos\alpha$ helyébe x -et írva a következő polinomot kapjuk.

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0 \tag{57}$$

Az eredeti egyenlet gyökei az ötödik egységgyökök voltak. Innen tudjuk, hogy ennek az egyenletnek is szintén gyöke az egy.

$$(x - 1) \cdot (16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1) = 0 \tag{58}$$

A maradék gyökök a $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{4\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5}$, $\cos\frac{8\pi}{5}$, amik páronként egyenlőek a koszinusz tulajdonságai miatt. Tehát két kettős gyök is van, ezért a kifejezés egy teljes négyzet.

$$(x - 1) \cdot (4x^2 - 2x - 1)^2 = 0 \tag{59}$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \tag{60}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \tag{61}$$

A megoldás a pozitív gyök, mivel a 72° a 0° és a 90° között van.

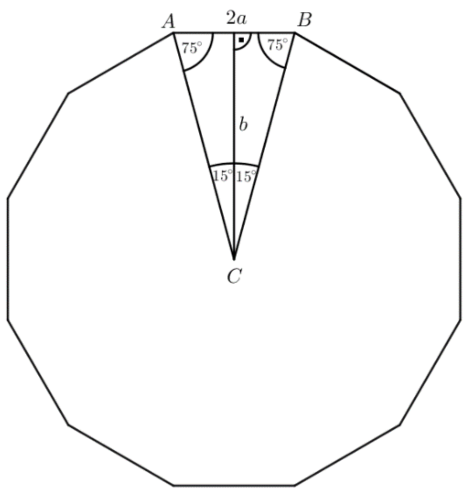
2.4. Gyökhat

Az előzőekhez hasonlóan, a $\sqrt{6}$ is a gyökös kifejezések manipulációja során jelenik meg először. Jelentést a $\cos 15°$ kiszámolásával nyerhet ez az irracionális kifejezés, de erre ritkán kerül sor a közoktatásban, még a tehetséggondozásban is.

Munkánkban három számolási módszert mutatunk, amelyeket a tehetséggondozásban alkalmazva kiszámíthatjuk a $\cos 15°$ értékét.

1. Számítási módszer

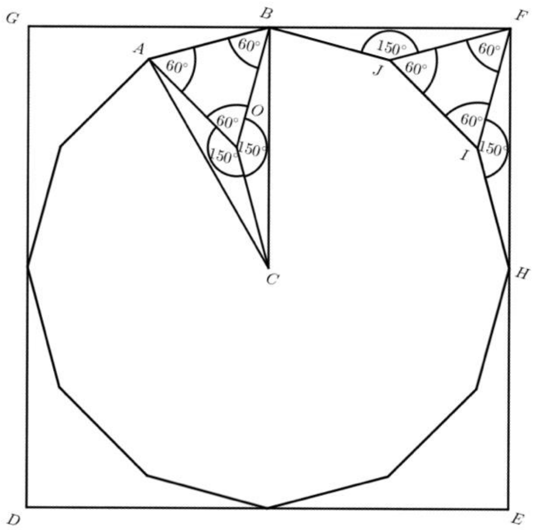
A szabályos tizenkétszög beírható egy r sugarú körbe. A tizenkétszög felosztható 12 egybevágó, egyenlőszárú háromszögre, amelyek egyikét láthatjuk az 1. ábrán. A háromszög belső szöge $\frac{2\pi}{12}$, azaz 30°, a sokszög oldalán fekvő szögei pedig $\frac{5\pi}{12}$, azaz 75°-osak. A háromszög egybevágó oldalai, CA és BC r hosszúságúak, mivel egy r sugarú körbe írtuk be a sokszöget. A háromszög magasságát beírva két egybevágó derékszögű háromszöget kapunk. Ezeket felhasználva megkapható az eredeti háromszög alapja (AB), vagyis a sokszög oldala és a háromszög magassága szögfüggvények segítségével . Az alap ekkor $2r\sin\frac{\pi}{12}$, vagy $2r\cos\frac{5\pi}{12}$, attól függően, hogy melyik szögfüggvényt szeretnénk alkalmazni, a magasság pedig $r\cos\frac{\pi}{12}$ vagy $r\sin\frac{5\pi}{12}$.



17. ábra: Háromszög a szabályos tizenkétszögben

Tehát a $\cos 15°$ kiszámításához meg kell határoznunk az alap (felének) hosszát egy $\frac{\pi}{6}$ és $\frac{5\pi}{6}$ szögű háromszögben. Legyen a sugár 1, így a háromszög oldala egység hosszú Jelölje a tizenkétszög szög oldalhosszának felét a és b a háromszög magasságát.

Az a és b kiszámítására Kőnig Dénes (1905) egy zseniális módszert írt le a tizenkétszög területének felhasználásával. Először rajzoljunk egy 2 oldalhosszú négyzetet a tizenkétszög köré a 18. ábrán látható módon.



18. ábra: Hasonló háromszögek és a tizenkétszög a négyzetben

Állítsunk egy-egy szabályos háromszöget a tizenkétszög oldalaira az 18. ábrán látható módon. Legyenek ezek OAB és IFJ háromszögek. Ezek egybevágóak, mivel oldalhosszaik egyenlőek. Az OAC, OCB , JFB, és IHF háromszögek úgyszint egybevágóak, mivel oldalaik páronként egyenlő hosszúak.

Tekintsük most az egész négyzetet. A négyzet négy darab sarki részből, és tizenkét darab egybevágó háromszögből áll. Ezek a részek pedig feloszthatók három páronként egybevágó háromszögre. Tehát az $EDFG$ négyszög felosztható 16 egyenlő területű részre, amelyből 12 rész adja a tizenkétszög területét. Így a tizenkétszög területe $\frac{12}{16} \cdot 2^2 = 3$.

A tizenkétszög területe kiszámítható úgy is, hogy összeadjuk az azt felépítő, 12 darab egybevágó háromszög területét: $\frac{24ab}{2} = 12ab$. Ebből kiszámíthatjuk b értékét:

$$12ab = 3 \qquad (62)$$

$$b = \frac{1}{4a} \qquad (63)$$

Ha használjuk a Pitagorasz-tételt a tizenkétszöget felépítő derékszögű háromszögekre (ABM), és behelyettesítjük a b -re kapott kifejezést, akkor megadhatjuk a^2-et és b^2-et:

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad (64)$$

$$a^2 + \frac{1}{16a^2} = 1 \qquad (65)$$

$$16a^4 - 16a^2 + 1 = 0 \qquad (66)$$

$$a^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \qquad (67)$$

$$b^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \qquad (68)$$

Ezekből négyzetgyököt vonva megkapjuk a-t és b -t.

$$a = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} \qquad (69)$$

$$b = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \qquad (70)$$

A kettős gyökjel miatt ezek az alakok még nem „szépek”, ezért alakítsuk át őket. A kettős gyökjel eltüntetéséhez végezzünk átalakításokat, kezdve a teljes négyzetté alakítással.

$$\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{6}\right)^2 = 4\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \qquad (71)$$

Ezt felhasználva pedig a és b:

$$a = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4\left(2-\sqrt{3}\right)}{16}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2}{16}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \qquad (72)$$

$$b = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)}{16}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{16}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \qquad (73)$$

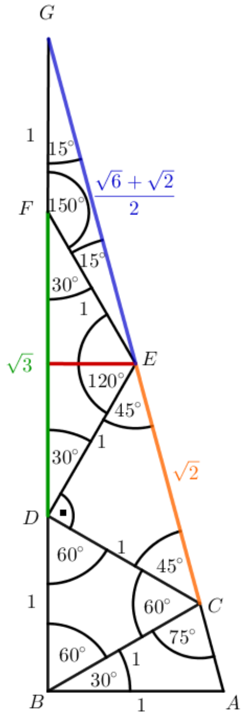
Mivel a sugarat 1-nek vettük, ezért:

$$\sin\frac{\pi}{12} = a = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \qquad (74)$$

$$cos\frac{\pi}{12} = b = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \qquad (75)$$

2. Számítási módszer

A második módszer egy direktebb megközelítése a $\sqrt{6}$-nak. Ebben az esetben veszünk egy derékszögű háromszöget, amelynek a másik két szöge $\frac{\pi}{12}$ és $\frac{5\pi}{12}$. A háromszög rövidebbik befogója legyen egység hosszú.



11. Ábra: Egyenlőszárú háromszögek

Osszuk fel a háromszöget egyenlőszárú háromszögekre a rövidebbik befogótól úgy, hogy sorra 15°-kal csökkentjük az alapon fekvő szögeket. Ekkor a háromszögek alapon fekvő szögei sorra 75° (ABC) 60° fok (BCD szabályos háromszög), 45° (CDE), 30° (DEF), 15° (EFG). Mivel egyenlőszárúak a háromszögek, a szárak mind egység hosszúak lesznek, a CDE háromszög átfogója $\sqrt{2}$, a DEF háromszögé pedig $\sqrt{3}$.

Rajzoljuk be most a háromszög AB oldallal párhuzamos középvonalát. A hosszabbik befogó felosztásából látjuk, hogy a felezőpontja egybeesik a DEF háromszög alapjának felezőpontjával, ami egyenlőszárú háromszög révén maga az oldalhoz tartozó magasság talppontja. Az átfogó felezőpontja így éppen az E pont lesz. Mivel a középvonal hossza fel a vele párhuzamos oldal hosszának, a piros szakasz ½ hosszú.

$$AG = \sqrt{1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} \qquad (76)$$

Ez pedig átalakítva a (71) egyenlet alapján:

$$AG = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{4\left(2 + \sqrt{3}\right)} = \sqrt{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2} \qquad (77)$$

Mivel E a felezőpontja az AG szakasznak, a következő hosszúságú szakaszokat kapjuk

$$EG = \frac{1}{2}AG = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \qquad (78)$$

$$AC = \frac{1}{2}AG - CE = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \qquad (79)$$

Ezek pedig pont a keresett koszinusz és szinusz értékek kétszeresei.

3. Számítási módszer

Mutatunk egy harmadik megoldási módszert. A 19. ábrán a GFE egyenlőszárú háromszöget az F csúcshoz tartozó magasság behúzásával két egybevágó derékszögű háromszögre bonthatjuk, melyeknek a $\frac{\mathrm{GE}}{2}$ hosszúságú oldal melletti szöge 15°-os, átfogója pedig egység hosszú. Így adódik, hogy a $\frac{\mathrm{GE}}{2}$ hosszúságú szakasz éppen cos15°-kal egyenlő – ezt jelöljük a-val. Tehát a GE szakasz $2 \cdot \cos 15° = 2\mathrm{a}$ hosszúságú.

Hasonlóan, a CBA egyenlőszárú háromszöget a B csúcsból kiinduló magassággal kettéosztva adódik, hogy $\frac{\mathrm{CA}}{2} = \sin 15°$ – ezt jelöljük b-vel. Tehát $\mathrm{CA} = 2 \sin 15° = 2\mathrm{b}$.

Mivel a 19. Ábrán a GAB háromszög jelölt középvonala felezi a GA oldalt (a háromszög átfogóját), ezért

$$GE = AE \qquad (80)$$

$$2a = 2b + \sqrt{2} \qquad (81)$$

Behelyettesítve $a^2 + b^2 = 1$ egyenletbe a következőket kapjuk:

$$\left(b + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2 = 1 \qquad (82)$$

Átalakítva:

$$b^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}b - \frac{1}{4} = 0 \tag{83}$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletéből megkapjuk a pozitív gyököt:

$$b = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \tag{84}$$

3. Összegzés

Dolgozatunkban több olyan példát mutattunk be, melyben elemi geometriai feladatokból származó irracionális számok, vagy irracionális számokat tartalmazó algebrai kifejezések jelennek meg meglehetősen elemi számításokban. Ezek a számítások számológép használata nélkül elvégezhetők, és a diákok gondolkodásában a geometriát és az algebrát összekötő „hídként" szolgálhatnak. Azért tartjuk ezt a kapcsolatot értékesnek, mert megkönnyítheti az ismeretek alkalmazását egy másik témakörben vagy szövegkörnyezetben, mint amelyben azokat eredetileg tanulták. Vagyis szerintünk segít(het)i a matematikai gondolkodás különböző területeit: a rendszerezést, szintézist és analógiás gondolkodást. Emellett ez a kapcsolat rávezeti a diákokat arra, hogy nemcsak a tizedestört alakban megadott számokat lehet számnak (és ezáltal egy feladat végeredményének) tekinteni, és nemcsak a számok tizedestört alakjával szabad vagy lehet számolni – sőt, sokszor (minden nem véges tizedestört esetén) kifejezetten nem is ezzel az alakkal érdemes.

A dolgozat során példákon keresztül mutattuk be, hogyan jelennek vagy jelenhetnek meg gyökös kifejezések az iskolai tananyagban. Ezután olyan feladatokat, problémákat vetettünk fel, amelyek megoldásai irracionális számok. Ezekre a problémákra különböző megoldásokat adtunk elemi geometriasegítségével, majd néhány problémát tovább vizsgáltunk magasabb geometriai ismeretek felhasználásával.

Hivatkozások

Agarwal, R. P., & Agarwal, H. (2021). Origin of Irrational Numbers and Their Approximations. Computation, 9(3), 29.

Barcza, I., Basa, I., Tamásné Kollár, M., Bálint, Z., Kelemenné Kiss, I. H., Gyertyán, A., & Hankó, L. (2017). Matematika 9. (I-II.. kötet). Eger: Eszterházy Károly

Barcza, I., Basa, I., & Tamásné Kollár, M. (2017). Matematika 10. (I-II.. kötet). Eger: Eszterházy Károly Egyetem.Egyetem.

Barcza, I., Basa, I., Tamásné Kollár, M., Bálint, Z., Kelemenné Kiss, I., Gyertyán, A., & Hankó, L. (2017). Matematika 11. Eger: Eszterházy Károly Egyetem.

Barcza, I., Basa, I., Tamásné Kollár, M., Bálint, Z., Kelemenné Kiss, I., Gyertyán, A., & Hankó, L. (2017). Matematika 12. Eger: Eszterházy Károly Egyetem.

Boyle, R. W., & Farreras, I. G. (2015). The Effect of Calculator Use on College Students' Mathematical Performance. International Journal of Research in Education and Science., 1(2), 95-100.

Close, S., Oldham, E., Shiel, G., Dooley, T., & O'Leary, M. (2012). Effects of Calculators on Mathematics Achievement and Attitudes of Ninth-Grade Students. The Journal of Educational Research, 105(6), 377-390.

Ellington, A. J. (2003). A Meta-Analysis of the Effects of Calculators on Students' Achievement and Attitude Levels in Precollege Mathematics Classes. Journal for Research in Mathematics Education, 34(5), 433-463.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, D. (1995). The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. Educational Studies in Mathematics, 29(1), 29-44.

Gedeon, V., Paróczay , E., Számadó, L., Tamás, B., & Dr. Wintsche, G. (2017). Matematika 8. Eger: Eszterházy Károly Egyetem.

Hayfa, N., & Saikaly, L. (2016). Dimensions of Knowledge and Ways of Thinking of Irrational Numbers. Athens Journal of Education, 3(2), 137-154.

Hembree, R., & Dessart, D. J. (1986). Journal for Research in Mathematics Education, 17(2), 83-99.

Kőnig, Dénes (1905). Mathematikai mulatságok. Lampel. R. Könyvkereskedése, Budapest

LaCour, M., Cantú, N. G., & Davis, T. (2019). When calculators lie: A demonstration of uncritical calculator usage among college students and factors that improve performance. PLOS ONE, 14(10).

Masimura, T. (2016). An investigation into the impact of calculator usage on the mathematical skills of secondary school learners (Magister Scientiae: Mathematics Education). Pretoria: University of Pretoria.

McCabe, T. W., & Vasquez, S. (2002). The Effect of Calculator Usage in the Learning of Basic Skills. Research and Teaching in Developmental Education, 19(1), 33-40.

Miles, C. (2008). The Use or Non-Use of Calculators Affects on Student's Ability to Perform Basic Mathematics Problems. OTS Master's Level Projects & Papers, 89.

Mumford, D. (2010). What's so Baffling About Negative Numbers? – a Cross-Cultural Comparison. In C. S. Seshadri, Studies in the History of Indian Mathematics (S. 113-143). Gurgaon: Hindustan Book Agency.

Nemzeti alaptanterv. 5/2020. (I. 31.) Kormány rendelet (2020). https://magyarkozlony.hu/dokumentumok/3288b6548a740b9c8daf918a399a0bed1985db0f/megtekintes

Szabó Csaba, Bereczky-Zámbó Csilla, Stirling Anna, Szenderák Júlia, Szörényi Sára: Geometric representations of irrational algebraic numbers in Hungarian high school mathematics education, In: Éva, Vásárhelyi; Johann, Sjuts (szerk.) Theoretische und empirische Analysen zum geometrischen Denken pp. 323-340, 2021

Schubert, H. (1894). Notion and Definition of Number. Oxford Journal, 4(3), 396-402.

Stewart, I. (1989). Galois Theory. London: Chapman and Hall.

Wantzel, L. (1837). Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. [Investigations into means of knowing if a problem of geometry can be solved with a straightedge and compass]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (in French), 366–372.

Woodard, E. F. (2018). Mixed method study of the impact of calculator usage on 8th and 12th grade students' fundamental mathematical skills and teachers' perceptions on using a calculator in learning mathematics (Dissertation). Dover: Delaware State University.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2004). Making Sense of Irrational Numbers: Focusing on Representation. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (S. 497-504). Bergen.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2007). Irrational numbers on the number line - where are they? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 477-488.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link. CBMS Issues in Mathematics Education, 1-27.

Zheng, T. (1998). Impacts of using calculators in learning mathematics. The 3rd Asian Technology Conference on Mathematics (ATCM'98).

[1] Juhász István, Orosz Gyula (2021). Matematika 10. Oktatási Hivatal.
ISBN 978-615-6256-35-5
https://www.tankonyvkatalogus.hu/pdf/OH-MAT10TB__teljes.pdf (2023.01.02.)

[2] Deák Ervin: Kísérő füzetek a „A matematika-tudomány története" c. kurzushoz
2. füzet (2023.01.02)
http://mathdid.elte.hu/html/mscmattudtoert.html