EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

BERECZKY-ZÁMBÓ CSILLA GYÖNGYVÉR – MUZSNAY ANNA – SZEIBERT JANKA

AZ ELŐHÍVÁSI HATÁS EREDMÉNYESSÉGE A DEDUKTÍV GONDOLKODÁST IGÉNYLŐ FELADATOK ESETÉN

MATEMATIKA - FIZIKA ÉS MATEMATIKA-KÉMIA OSZTATLAN TANÁRSZAK

TDK DOLGOZAT

Témavezetők:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék

Bernáth László

egyetemi docens

ELTE PPK, Iskolapszichológia Tanszék

Tartalom

1. ABSZTRAKT

A teszteléses tanulás hatékonyságát szavak és szövegek tanulása terén már több kísérletben bizonyították, többnyire laboratóriumi környezetben. Ezen dolgozat tárgya egy olyan kísérlet, amely a teszteléses tanulás hatékonyságát matematikatanítás területén vizsgálja, valódi egyetemen, valódi diákokkal, valódi matematika kurzus keretein belül. A kísérlet résztvevői elsőéves matematikatanár szakosok voltak, hat csoportra osztva. Három csoport a tesztelési hatást alkalmazva tanulta a számelméletet, a másik három hagyományos módszerekkel. A kísérleti és a kontroll csoportok ugyanazt a tananyagot tanulták és ugyanazt a zárthelyi dolgozatot írták meg a félév végén. Ezen a dolgozaton a kísérleti csoport jelentősen jobban teljesített, mint a kontroll csoport, dacára annak, hogy utóbbiak év eleji szintfelmérő eredményei jelentősen erősebbek voltak. Ezek az eredmények azt mutatják, hogy a tesztelési hatás a deduktív gondolkodást igénylő, összetett matematikai problémák megoldásának tanulását is jelentősen elősegíti. Az egyéni képességekben mutatott eltérések hatásának vizsgálatára három csoportba osztottuk mind a kísérleti, mind a kontroll csoport tagjait: gyengén, átlagosan és jól teljesítő csoportokra. A tesztelési hatás mindhárom csoport esetében kimutatható volt. Mindhárom csoport-pár esetében a teszteléses tanulást alkalmazó (kísérleti) csoport tagjai jobban teljesítettek a kontroll csoport tagjainál.

Kulcsszavak: tesztelési hatás, előhívási hatás, matematika, komplex problémák, deduktív gondolkodás, egyéni különbségek

2. Bevezető

A tanulásról és a memóriáról rengeteg régebbi és újabb elmélet létezik. Ezek többsége megegyezik abban, hogy a memória fő funkciói a kódolás, a tárolás és az előhívás. Kódolás alatt a memóriában való rögzítés folyamatát értjük, a tárolás pedig a rögzítettek „fejben tartása”, vagyis ezek megmaradása a memóriában valamilyen formában. Az előhívás az a folyamat, amikor a tároltakat felidézzük és valamilyen formában felhasználjuk.

Iskolai környezetben a kódolás, tárolás és előhívás folyamatai a tanítás-tanulás folyamatának keretei között zajlanak. A még ma is általánosan elfogadott elképzelés a tanulásról az, hogy a tanulási folyamat az információ bevitele a memóriába. Az előhívás szerepe ebben a felfogásban kizárólag a tanulás eredményességének ellenőrzése. Előhívásra a tanulási folyamat végén/után kerül sor, felelés vagy dolgozat formájában.

Több mint száz éve már jelentek meg a fenti elképzeléssel szembemenő tanulmányok arról, hogy a tesztelés, azaz a megtanulandó anyag memóriából való előhívása a tanulásnak egy hatékony formája lehet (Abbot, 1909, Gates, 1917), ezek azonban nem váltottak ki nagy hatást. Teszteléses- vagy előhívásos tanulásnak hívjuk a tanulásnak azt a formáját, amikor az elsajátítandó információ újraolvasása vagy újratanulása helyett azt aktívan előhívjuk a memóriából (angolul test-enhanced learning, retrieval-enhanced learning). A teszteléses elnevezést az indokolja, hogy amikor valakivel előhívatjuk a tananyagot, akkor azt teszteljük, hogy mi maradt meg a tanultakból. Ez az elnevezés kicsit megtévesztő, mert magát az előhívást, azaz a tudás-tesztelést tesztekkel, azaz kisebb felmérőkkel, dolgozatokkal idézik elő. A teszteléses tanulás elnevezés tehát nem abból ered, hogy teszteket írunk tanulás közben, hanem abból, hogy teszteljük, hogy az éppen megtanulandók mekkora részét sikerült már ténylegesen, a hozzáférést biztosító módon rögzíteni.

Bár csak 11 éve íródott, a teszteléses tanulás alapművének Roediger ér Karpicke (2006b) cikkét tartjuk. A már klasszikusnak számító kísérletükben laboratóriumi környezetben, szövegtanulásos helyzetben egyetemi hallgatóknál a többszöri elolvasás és a többszöri tesztelés hatását vizsgálták. A kísérlet alanyai egyetemisták voltak, akiket két csoportra osztottak. Mindkét csoport elolvasta a tananyagot, majd ezt követően az első csoport még háromszor újra elolvasta (ismétlés) a szöveget. A második csoport csak egyszer olvashatta el a szöveget és azt követően az újraolvasás helyett mindhárom alkalommal tesztelték a megszerzett tudást, így három alkalommal kellett előhívniuk a tanultakat. Több alkalommal is vizsgálták a három csoport tanulási eredményességét, többek közt öt perccel az utolsó tanulási fázis után és egy héttel később is. Az azonnali tesztelésnél nem meglepő módon az első csoport teljesített a legjobban (akik a legtöbbször olvashatták el a szöveget), a másik csoport (akiket újraolvasás helyett teszteltek) pedig a legrosszabbul. Az eredmény egy héttel az utolsó tanulási fázist követően megfordult: a második, teszteléses csoport sokkal jobban emlékezett az anyagra, mint az újratanulós csoport.

	Négyszer olvas	**1x olvas 3 tesztelik**
5 perc múlva	82%	70%
1 hét múlva	40%	63%

1. *táblázat: Roediger és Karpicke kísérletének eredményei*

Ennek a jelenségnek egy lehetséges neuropszichológiai magyarázatát adták egy kísérletben, ahol német diákoknak tanítottak szuahéli szavakat úgynevezett páros asszociációs technikával. A résztvevők összesen 60 szópárt tanultak az első körben. Ezután 30 szópárt újratanultak, a másik 30 szópár esetén pedig fel kellett idézniük a szuahéli szó bemutatása után a szó német megfelelőjét (Keresztes, Kaiser, Kovács és Racsmány, 2014). Végül fel kellett idézni mind a 60 szuahéli szó német megfelelőjét. A tesztelés alatt figyelték a diákok agyi aktivitását. Az újratanult szavak felidézésekor közvetlenül a tanulás után nagyobb volt az agyi aktivitás, mint egy héttel később. A felidézéssel tanult szavak esetén fordított volt az eredmény, rövidtávon kisebb agyi aktivitás volt észlelhető, de ez az aktivitás egy hét múlva sem csökkent. Ebből arra következtethetünk, hogy a teszteléses (vagy előhívásos) tanulás gátolja az agyi aktivitás csökkenését. Röviden összegezve megállapítható, hogy az információ előhívása a memóriából, azaz az előhívásos vagy teszteléses tanulás egy kezdeti tanulási fázis után jobban elősegíti a tanultak hosszú távú megmaradását, mint az újratanulás.

A tesztelési hatást már sokféle kísérletben kimutatták, különböző feladattípusok, (tan)anyagok és korosztályok körében.

A különböző szövegtanulás típusú feladatok között szerepelt szavak listáinak tanulása és rendszerezése (Zaromb és Roediger, 2010), idegen szavak tanulása (Pyc és Rawson, 2010) és tankönyvi szövegek tanulása (Roediger és Karpicke, 2006b, Butler, 2010). A hatást főleg laboratóriumi körülmények között vagy laboratóriumban szimulált iskolai helyzetben mutatták ki, mindössze néhány kísérlet volt valós iskolai helyzetben (McDaniel, Roediger and McDermott, 2007**).**

A tesztelési hatást sok különböző korosztályba tartozó résztvevővel kimutatták, a leggyakrabban vizsgált korosztály az egyetemistáké (Roediger és Karpicke 2006a). Azon belül is, érthető módon, a leggyakrabban pszichológus hallgatókon kísérleteztek. Ezek a vizsgálatok persze különbözőek voltak a tesztelés fajtáját, mértékét, időzítését tekintve. A tesztelési hatást valamilyen módon kimutatták már óvodásoknál és iskola-előkészítősöknél (Fritz, Morris, Nolan, &Singleton, 2007; Kratochwill, Demuth, &Conzemius, 1977), általános iskolásoknál (Atkinson&Paulson, 1972; Bouwmeester&Verkoeijen, 2011; Fishman, Keller, &Atkinson, 1968; Gates, 1917; Metcalfe&Kornell, 2007; Metcalfe, Kornell, & Finn, 2009; Myers, 1914;

Rea & Modigliani, 1985; Rohrer, Taylor, &Sholar, 2010; Spitzer, 1939), felső tagozatos korosztálynál (Carpenter et al., 2009; Fritz, Morris, Nolan, et al., 2007; Glover, 1989; McDaniel, Agarwal, Huelser, McDermott, &Roediger, 2011; Metcalfe, Kornell, &Son, 2007; Sones&Stroud, 1940), középiskolásoknál (Duchastel, 1981; Duchastel&Nungester, 1982; Marsh et al., 2009; Nungester&Duchastel, 1982), és felsőbb éves orvostanhallgatóknál (Kromann et al., 2009; Rees, 1986; Schmidmaier et al., 2011) is. De ez még nem minden, nem csak a gyermekeknél és a fiataloknál, hanem a felnőtteknél is működik a tesztelési hatás (Balota, Duchek, Sergent-Marshall, &Roediger, 2006; Bishara&Jacoby, 2008; Logan&Balota, 2008; Maddox, Balota, Coane, &Duchek, 2011; Sumowski,Chiaravallotti&DeLuca, 2010) akár 60 év felettiek körében is (Tse, Balota, and Roediger, 2010)

Kimutatták, hogy a rövid kifejtős kérdésekkel és a feleletválasztós tesztekkel való tanulás egyaránt hatékonyabb, mint az újraolvasás (Kang, McDermott and Roediger, 2007). Megállapították, hogy bár mindkét tesztelési forma hatékony, a hatásuk például függ attól, hogy volt-e visszajelzés a tanulási szakaszban a válaszok helyességéről. Ha kaptak visszajelzést a résztvevők, akkor a rövid kifejtős kérdésekre válaszolás – nagyon kis mértékben, de – jobb eredményeket hozott. Ha viszont nem volt visszajelzés, akkor a feleletválasztós kérdésekre való válaszolás esetén volt erősebb a tesztelési hatás.

A teszteléssel megszerzett tudás nem csak az adott témakörben használhatóbb, mint az ismétléssel megszerzett tudás, hanem más területre is könnyebben átvihető (Butler, 2010, van Eersel et al. 2016).

Az előhívásos vagy teszteléses tanulás (az angol nyelvű szakirodalomban: retrieval-enhanced learning / test-enhanced learning) hatékonyságát összevetették más tanulási technikák hatékonyságával is. Például a teszteléssel tanulók jobban teljesítenek, mint az „önmaguknak magyarázással" tanulók (Larsen et al 2013) és jobbak a gondolattérkép segítségével tanulóknál is (Karpicke& J. R. Blunt, 2011). Az eddigi eredmények alapján az előhívásos tanulás a leghatékonyabb tanulási technika. A tesztelési hatás feltérképezésében maradt még néhány fehér folt. Az egyik ilyen a tesztelési hatás vizsgálata a különböző előzetes tudással bíró emberekre. Orr és Foster (2013) kísérletben egy biológia kurzuson a hallgatók szabadon eldönthették, hogy a kurzus során részt vesznek-e alkalmanként tudástesztelésben. A hallgatókat a jó-, közepes- és gyenge képességű csoportokra osztották. A kurzus végén a diákok vizsgán nyújtott teljesítménye mindhárom csoportban jobb volt azoknak, akik rendszeresen megírták a teszteket, mint azoknak, akik nem. Carpenter et al. (2015) szintén biológia kurzus keretében egyetemi hallgatóknál azt az eredményt kapták, hogy a tesztelési hatás csak a jó képességű diákoknál mutatható ki, a közepes és gyenge képességű diákoknál nem. Egy harmadik esetben (Brewer and Unsworth, 2012) az alacsonyabb intelligenciájú személyek nagyobb mértékben fejlődtek a teszteléses tanulásnak köszönhetően, mint a magasabb intelligenciájú személyek, a legmagasabb intelligenciájú személyeknél pedig nem volt kimutatható a tesztelési hatás. Egy másik fehér folt az, hogy befolyásolja-e (és ha igen, hogyan) a tesztelési hatás működését, ha az óravégi dolgozatok eredményei beszámítanak a végső értékelésbe. Khanna (2015) egy bevezető pszichológia kurzusán a teszteléses csoport egyik részének beleszámított az év végi osztályzatába a teszteken elért eredmény, a másik felének nem. A kontroll csoport itt sem tesztelt. Az első két csoport a szemeszter során hat alkalommal előre nem bejelentett módon írt tesztet. Ebben a kísérletben azok érték el a legjobb eredményt, akik írtak tesztet, de nem számított bele az év végi osztályzatukba az eredménye. A jelenséget azzal magyarázták, hogy ha a jegyük múlik a tudástesztek eredményén, akkor megnőhet a diákok szorongása, ami ronthatja a tanulási teljesítményt. Ennek kicsit ellentmond Agarwal et al. 2014 eredménye, amely szerint a teszteléssel tanulók tesztszorongása csökken. Az ellentmondás egy lehetséges feloldása az, hogy a szorongás csak alacsony intrinzik motiváció esetén rontja a teljesítményt, magas intrinzik motivációnál javítja (Wang, Lukowski, Hart et al., 2015). Egy harmadik fehér folt az az a kérdés, hogy befolyásolja-e a tesztelési hatás mértékét az, hogy mennyire összetett a megtanulandó anyag. Itt már az elmélet sem egységes: Gog és Sweller (2015) amellett érvelnek, hogy a tesztelési hatás csak olyan helyzetekben mutatható ki, ahol a megtanulandó elemek között nincs interakció, mint például idegen szavak tanulásakor, komplex anyag tanulásakor a hatás csökken vagy eltűnik. Karpicke és Aue (2015) ezzel szemben úgy gondolja, hogy a tesztelési hatás komplex anyagok esetén is hatékonyan segíti a tanulást. Nézőpontjukat elméleti érvekkel és kísérletekkel is alátámasztják. Vannak azonban Gog és Sweller állításait alátámasztó kísérletek is. Leahy és Sweller (2015) komplex anyag esetén fordított tesztelési hatást kapott azonnali felidézéskor, egy héttel későbbi felidézéskor pedig nem kaptak semmilyen hatást. Hasonlóan negatív eredményt kapott Tran et al. (2015), akik különböző eseménysorozatok leírását tartalmazó mondatokat tanultattak meg a kísérleti személyek „újraolvasós" és „tesztelős" csoportjával úgy, hogy a mondatok külön-külön, egymás után jelentek meg. A végső tesztben az egyes mondatok felidézésében kimutatható volt a tesztelési hatás, de amikor a mondatok alapján következtetéseket kellett levonni, nem volt különbség a két csoport teljesítménye közt. Ez alapján az olyan feladatoknál, ahol deduktív következtetésekre van szükség, a tesztelési hatás eltűnik. Egy másik hasonló kísérletnél, mikor egyben vetítették le a szöveget, nem pedig mondatonként, akkor a következtetés levonását igénylő feladatokban is érvényesült a tesztelési hatás Eglington és Kang (2016).

A matematika feladatok megoldásához fejlett deduktív gondolkodási és probléma-megoldási képesség szükséges, maguk a feladatok pedig sokszor összetettek. Az előhívási hatást matematikából eddig mindössze egyszer vizsgálták (Bereczky-Zámbó, Muzsnay, Szeibert 2017). Kutatócsoportunk középiskolai környezetben, hátrányos helyzetű 9. osztályos tanulókon mutatta ki egy öthetes kísérletben a teszteléses tanulás hatékonyságát. Ilyen mélységű tananyaggal még senki nem végzett vizsgálatokat. Az ottani eredmények és tapasztalatok alapján kidolgoztunk egy összetett kísérletet. Ezen dolgozat tárgya egy olyan kísérlet, amely a teszteléses tanulás hatékonyságát matematikatanítás területén vizsgálja, valódi egyetemen, valódi matematika szakos diákokkal, valódi matematika kurzus keretein belül, ahol valódi matematika- és összetett, komplex kapcsolatokat felvonultató tananyag és deduktív gondolkodást megkövetelő feladatok szerepeltek. A hallgatók tudását a félév kezdete előtt egy független matematika dolgozattal felmértük. Így kísérletünk a fent említett mindhárom fehér foltot érinti és segíthet azok feltérképezésében. Deduktív képességeket, ezáltal összetett tudást mér különböző felkészültségű hallgatók esetén úgy, hogy a kisdolgozatok eredménye beleszámít az év végi értékelésbe.

3. A kísérlet

Vizsgálatunkban valódi oktatási környezetben, a szokásosan használt tananyagon, az ELTE TTK matematika tanár szakos Algebra és Számelmélet kurzusa keretében hasonlítottuk össze a hagyományos módon és a teszteléssel tanuló csoportok teljesítményét, valamint megvizsgáltuk, hogy az előzetes tudásbeli különbség mennyire befolyásolja a tesztelési hatás mértékét.

A kísérletben az ELTE matematika tanár szakos teljes elsőéves évfolyama, összesen 114 hallgató vett részt Algebra és Számelmélet 1 tantárgy keretében. Az adatok elemzése során végül kihagytuk azokat, akik már korábban jártak a kurzusra, de most újra felvették, illetve akik a félév során leadták a kurzust. Így összesen 72 hallgató, közülük 26 férfi, 45 nő adatait használtuk fel. Életkoruk 18-23 év között volt. A vizsgálatban az algebra és számelmélet kurzus előadás és gyakorlat szokásos tananyagát használtuk, amely Niven, Zuckerman, Montgomery

(1991) *An Introduction to theTheory of Numbers 5ed.* tankönyvére épül. A részletes tematika a dolgozat függelékében található. A kurzus heti egy 60 perces előadásból és egy 90 perces gyakorlatból állt 13 héten keresztül. Az előadás közös volt, a gyakorlatokon hat 17-19 fős csoportra oszlottak a hallgatók. Az év elején minden hallgató megírt egy matematika szintfelmérő dolgozatot. Az első előadásokon számos szempontból felmértük a diákokat. Kitöltettünk velük munkamemória teszteket (számterjedelem teszt oda és vissza, vizuális memória teszt oda és vissza, matematikai szorongás tesztet (az AMAS teszt 9 kérdéses változatát) és számelmélet tudástesztet is. Emellett a teljesebb kép érdekében a diákok írásos hozzájárulása mellett összegyűjtöttük, hogy mi a másik szakjuk, hova jártak középiskolába, az érettségijük szintjét és eredményét százalékban, illetve, hogy jártak-e fakultációra matematikából. A csoportokból hármat kísérleti, hármat pedig kontroll csoportnak soroltunk be véletlenszerűen. Így a 72 értékelendő hallgatóból 37 került kísérleti csoportba, 35 pedig kontroll csoportba. A gyakorlatok felépítése hagyományos volt. A diákok mindegyik gyakorlaton feladatokat oldottak meg az előző heti előadás elméleti anyagára építve egyénileg, közösen, illetve tanári segítséggel. A kísérleti csoportok tagjai minden óra végén két feladatot (lásd: Függelék, „A" melléklet) oldottak meg az óra anyagából önállóan, segédeszközök használata nélkül. A diákok a dolgozatok eredményeiről visszajelzést kaptak. A kontroll csoport tagjai az óra végi két feladatot közösen, tanári segítséggel oldották meg, ugyanúgy, mint a többi feladatot.

Az utolsó előadáson mindenki egy 5 feladatból áll zárthelyi dolgozatot írt (lásd: Függelék, „B" melléklet).

A feladatok jellege különböző volt. A dolgozat első feladata tipikusan olyan példa, amely procedurális tudást igényel. Procedurális (vs. konceptuális) tudás alatt azt értjük, hogy az ugyanúgy kinéző feladat pontosan ugyanazon a módon megoldható, függetlenül attól, hogy éppen milyen számok szerepelnek az aktuális változatban. Emellett az eljárás és a hozzá tartozó számolások is elég egyszerűek. Ez a feladat megoldható kizárólag középiskolás tudás felhasználásával is.

A második feladat szintén procedurális gondolkodással és tudással megoldható, azonban az eljárás egy kicsivel összetettebb. Emellett a megoldáshoz mindenképpen az újonnan tanult, egyetemi tananyag tudására van szükség, a feladat semmiképpen nem oldható meg középiskolai módszerekkel. A megoldás menete (épp úgy, mint az előző feladat esetében) mindig pontosan ugyanaz, de egy mindenki által ismert formula alkalmazása szükséges az elinduláshoz. Az előző feladathoz hasonlóan, sok gyakorlással a diákok fel tudnak készülni a zárthelyire, de ahhoz, hogy hosszú távon is alkalmazni tudják a tanultakat, a második feladat esetén az algoritmus mélyebb megértésére van szükség és a mélyebb megértés hiánya tapasztalataink alapján könnyen vezet az algoritmus későbbi téves alkalmazásához. Párhuzamba állítható az eset azzal a tipikus hibával, amikor a gyerekek a törteket a szorzás szabálya szerint adják össze, számlálót a számlálóval, nevezőt a nevezővel.

A harmadik feladat a hallgatók által eddigi képzésük alapján felhalmozott összes absztrakciós tudását igénybe veszi. A fogalom, amit használ, a legnehezebbek közül való, és szorosan kötődik az absztrakt algebrai értelemben vett rend fogalmához, amely messze a legnehezebb és legabsztraktabb fogalom a félév anyagából. Ennek a fogalomnak a megértését és tudását többféle módon is ellenőrizhetjük, mindegyik nagy kihívást jelent a diákok számára. Ráadásul ez volt a zárthelyi előtt tanult utolsó témakör, ezt a fogalmat csak előadásokon gyakorolták, gyakorlaton nem.

A negyedik probléma volt a legösszetettebb. A megoldás több különböző eljárás alkalmazását igényelte, úgy, hogy mindegyiket egy-egy végtelen sok megoldási stratégiából álló listából kellett kiválasztani. A feladat nehézségét az sem csökkentette, hogy a tanított anyag és a feladat megfogalmazása sugallta, hogy melyik listákat kell figyelembe venni. Ha a megoldó valamelyik listát vagy a lista elemét rosszul választotta ki, akkor a listák választását elölről kellett kezdeni. A feladat megoldása elképzelhetetlen legalább néhány felmerülő trükk konceptuális megértése nélkül.

Az ötödik feladat, mint mindig, egy viszonylag nehéz feladat, amelynek a megoldását könnyű megérteni, de nehéz megtalálni.

A kurzus elvégzésének feltétele a legalább 12 pont elérése volt, emellett a kísérleti csoport hallgatóinak a tárgy elvégzéséhez az összpontszám legalább 50 %-át el kellett érnie az óravégi teszteken.

4. Statisztikai módszerek és eredmények

Az előzetes és kurzusvégi dolgozatokon elért összpontszámokat táblázatba foglaltuk (2. táblázat). A tesztelési hatást ANCOVA-val vizsgáltuk. A kísérleti és a kontroll csoportokban lévő diákok utolsó órán írt dolgozatainak összpontszámait hasonlítottuk össze, és a szintfelmérő dolgozat pontszámaira kontrolláltunk

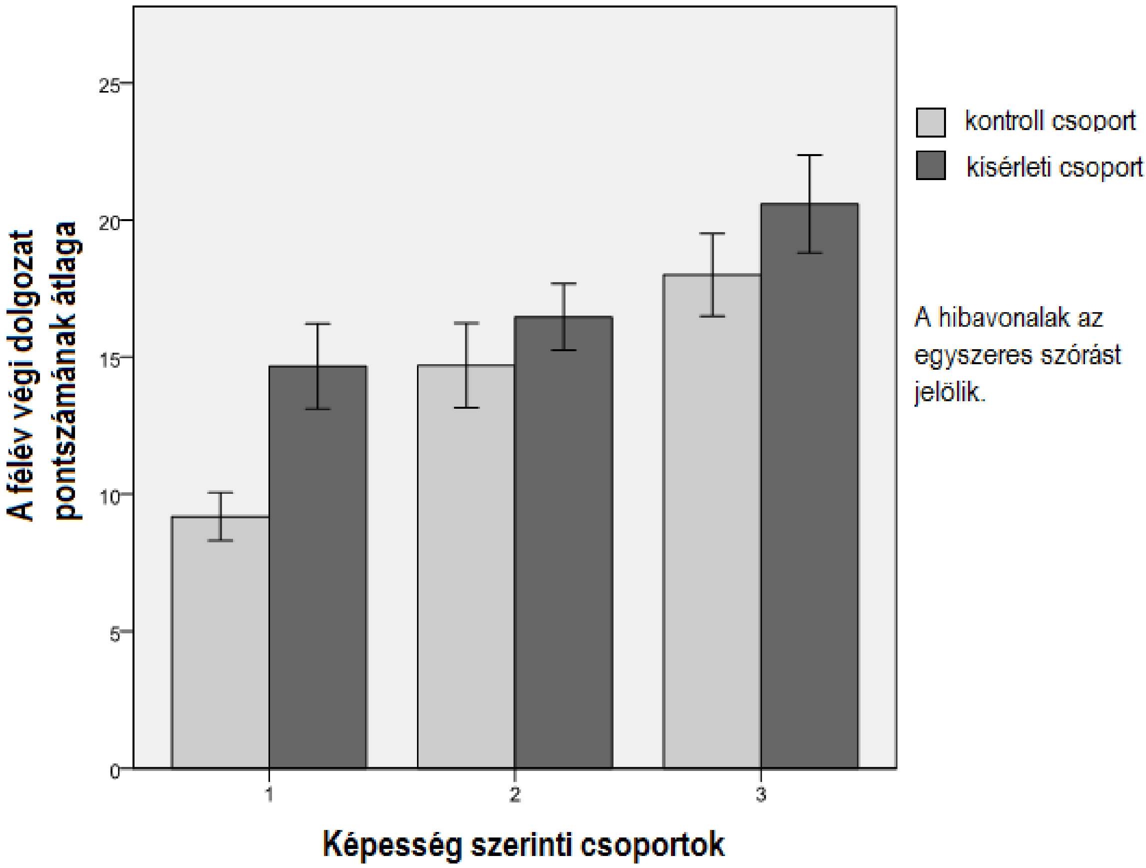
A szintfelmérő dolgozaton elérhető maximális pontszám 100 volt. Az átlagpontszáma a kísérleti csoportnál M=57,24, SD=19,50, a kontroll csoportnál M=60,46, SD=20,12 volt. A zárthelyin elérhető maximális pontszám 30 volt. Az átlag pontszám a kísérleti csoportnál M=17,22, SD=5,74, a kontroll csoportnál M=14,29, SD=5,91 volt.

		átlag	szórás	max
Szintfelmérő dolgozat	kontroll	60,46	20,12	100
	kísérleti	57,24	19,50	100
Zhpontszám	kontroll	14,29	5,91	30
	kísérleti	17,22	5,74	30

2. táblázat: A kontroll és a kísérleti csoportok az év eleji szintfelmérőn ill. az utolsó órai dolgozaton

A kísérleti csoportokban lévő diákok szignifikánsan több pontot szereztek az utolsó órai dolgozaton, mint a kontrollcsoportokban lévők ($F=9,19$; $df=1, 69$; $p<0,001$; $\eta_p^2= 0,118$), annak ellenére, hogy a szintfelmérő tesztben szignifikánsan kevesebb pontot értek el ($F=32,79$; $df= 1, 69$; $p<0,001$; $\eta_p^2=0,322$).

Ezután az egyéni különbségek vizsgálatához a szintfelmérő teszt alapján a diákokat gyenge, átlagos és jó képességű csoportokra osztottuk. A közepes képességűek csoportjába az átlag±1/2 szórás tartományban teljesítő diákok kerültek. A gyenge képességűek közé az ennél kevesebb, a jó képességűek közé az ennél több pontot elérő diákokat soroltuk. Az utolsó órán írt feladatokban elért összpontszámok az 1. ábrán láthatók.



1. ábra. A gyenge (1), közepes (2) és jó (3) képességű diákok teljesítménye a kísérleti és a kontroll csoportban.

Az adatokat általános lineáris modell (GLM) segítségével elemeztük. Kategóriaváltozóként a csoport típusát (kísérleti-kontroll) és a diákok képességét (gyenge-jó-közepes) vettük be a modellbe, és vizsgáltuk ezek interakcióját is. A kísérleti csoportokban a diákok szignifikánsan nagyobb pontszámot értek el, mint a kontrollcsoportokban lévők ($F=7{,}52$; $df=1, 66$; $p<0{,}001$; $\eta_p^2=0{,}102$). A diákok a képességük alapján is (szignifikánsan) eltértek egymástól ($F=13{,}02$; $df=2, 66$; $p<0{,}001$, $\eta_p^2=0{,}283$), a Sidak-féle többszörös összehasonlítás alapján mindhárom csoport teljesítménye szignifikánsan különbözött egymástól. Emellett az interakció nem szignifikáns ($F=0$; $df=2, 66$; $p<0{,}001$; $\eta_p^2=0{,}026$), a diákok egyéni képességüktől függetlenül egyformán nagyobb pontszámot értek el a kísérleti csoportokban. Eszerint a tesztelési hatás az egyéni képességtől függetlenül kimutatható.

A statisztikai elemezés mellett informatív az alábbi táblázat.

Pontszám	1-13	15-24	25-
Kontroll	37	7	4
Kísérleti	10	27	5

3. táblázat: A hallgatók csoportosítása a félév végi dolgozat pontszáma alapján

A 3. táblázatban három részre osztottuk a hallgatókat aszerint, hogy mennyire jól teljesítettek a kurzuson. Mint írtuk, a kurzus elvégzésének feltétele a legalább 12 pont elérése volt. Az első csoportba kerültek a 0-13 pont közt teljesítők. Ők megbuktak a kurzuson, vagy éppen hogy elvégezték elégséges szinten. A dolgozaton senki nem ért el 14 pontot. A felső kategória, a 24 pont fölöttiek csoportja. Ők a„csillagosötösök", akik mindig mindent tudtak. A középső kategória a hagyományos értelemben vett gyenge 3-as és 5-ös közti kategória, a 15-23 pont közt teljesítettek csoportja. Látható, hogy a „csillagosötösök" mindkét csoportban egyformán jelen voltak. Szembetűnő viszont a gyengén szereplő hallgatók arányának különbsége a kísérleti és a kontrollcsoport között.

5. Összegzés

Kutatásunkban azt vizsgáltuk, hogy összetett matematika tananyagon valódi oktatási helyzetben kimutatható-e a teszteléses tanulás előnye a hagyományos tanulási technikákkal szemben. Eddig matematika feladatok megoldásában rajtunk kívül soha senki nem mutatta ki az előhívásos tanulás hatékonyságát, ilyen kísérletről publikáció nem született. Megmutattuk, hogy matematika szakos hallgatók körében komplex matematikai feladatok megoldásánál hatékonyabb a teszteléssel való oktatás a hagyományos oktatási technikával szemben. A korábbi eredmények a deduktív képességeket igénylő feladatok esetén ellentmondásosak voltak az előhívásos tanulásról, mondhatni, billegett a mérleg. A mi kísérletünk eredményei a mérleg nyelvét az előhívásos tanulás irányába billentik. Megmutattuk, hogy középtávon jobban teljesítenek a teszteléssel tanuló hallgatók összetettebb matematika feladatok megoldásakor.
Hasonlóan kérdéses volt az előhívásos tanulás hatása a különböző képességű hallgatókra. Kísérletünkben egy előzetes tudásszint felmérés alapján soroltuk be a hallgatókat gyenge, közepes és jó képességű csoportokba. Kimutattuk, hogy a tesztelési hatás az egyéni matematika tudásbeli képességtől függetlenül hat. Az egyik legfőbb eredménynek pedig az tekinthető, hogy

a kísérleti csoportból lényegesen többen végezték el a kurzust, mint a kontrollcsoportból, azaz az előhívásos tanulás csökkentette a lemorzsolódást.

Mindenféle kísérlet nélkül meg vagyunk győződve arról, hogy ha a tesztként szolgáló kisdolgozatok eredménye nem számítana bele az év végi értékelésbe, akkor a magyar egyetemisták és középiskolások nem vennék komolyan a teszteket, és nem tennének semmiféle erőfeszítést az ott feladott problémák megoldására. Számos korábbi kísérletünkben tapasztaltunk ehhez hasonló hozzáállást. Ahhoz, hogy Magyarországon, vagy akár Európában elterjedjen a teszteléses tanulás, szemléletváltásra van szükség mind a tanárok, mind a diákok részéről.

Dolgozatunk témájáról több előadást tartottunk itthon és külföldön egyetemeken, konferenciákon és középiskolás tanároknak. A számtalan érdeklődő kérdés mellett mindig ott voltak a praktikus részre vonatkozó kérdések is. Ki fogja összeállítani a kisdolgozatokat? Mennyi idő ezeket kijavítani? El tudjuk-e ezt képzelni, ha heti 22-26 órát tanítunk? El tudjuk-e ezt képzelni egy 300 fős mérnök évfolyamon? Az utolsó két kérdésre a válaszunk persze mindig igen volt, de még így is kételkedéssel fogadta azt a közönség. Mellénk álltak viszont azok, akik már előzőleg is hallottak az eredményeinkről és kipróbálták a módszert. Előadásaink után számos visszajelzést kaptunk. A visszajelzések alapján tudjuk, hogy módszerünket bevezették matematikából a BME két karán, a BGE KVIK két szakján, az ELTE TTK Geofizikai és Űrkutatási Tanszék egyik nagyelőadásán és több középiskolai tanár is él az eszközzel. Ezen eredményeink alapján egy 540 főt érintő kísérletet dolgoztunk ki a SZTE IK Diszkrét Matematika kurzusára.

6. A szerzők részvétele a kutatásban

Mindhárman részt vettünk a kísérlet tervezésének teljes folyamatában. Bereczky-Zámbó Csilla és Muzsnay Anna gyakorlatvezetők voltak, mindkettőjüknek 1-1 kísérleti csoportja volt. Szeibert Janka egy évvel korábban tanította ugyanezt az anyagot, ő folyamatosan segítette és számos jó tanáccsal látta el a többieket. Mindhárman részt vettünk az óravégi röpdolgozatok és a zárthelyi dolgozatok feladatainak kidolgozásában. Mi generáltuk véletlen számsorokat a munkamemória teszt számterjedelem részeihez, ábrákat a vizuális munkamemória tesztekhez. A kitöltetés után a teszteket mi javítottuk, értékeltük őket, mi vittük be az adatokat. Az eredmények kiértékelésében és értelmezésében is részt vettünk.

Az elmúlt évben a témából az alábbi előadásokat tartottuk:

- 2018. január Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Hajdúszoboszló (január 26-28.)
- 2018. április 17. : Előhívásos tanulási kísérletek középiskolában és egyetemen – Módszertani Mesék c. tudományos diákkör, ELTE
- 2018. május 31.: ~~Ismétlés~~ Tesztelés a tudás anyja, avagy Hogyan tanítsuk meg a diákot, akár akarja, akár nem – ELTE Geofizikai és Űrkutatási Tanszék szemináriuma
- 2018. június 2. Teszteléses tanulás hatékonyságának vizsgálata matematikatanár szakos hallgatók körében., Magyar Pszichológiai Társaság XXVII: Országos Tudományos Nagygyűlése
- 2018. július Testing is the mother of knowledge– Umea, Svédország, PME 42 konferencia (július 3-8.)
- 2018. szeptember 26. Tesztelés a tudás anyja? –meghívott előadóként a PAB III. Matematikai és Informatikai Tudományok Szakbizottsága és a PTE TTK Matematikai és Informatikai Intézete tudományos ülésén
- 2018. október 10.– Előhívva tisztul a kép –SZTE TTIK Algebra Tanszék szemináriuma
- 2018. november 8.– beszámoló a PME 42-ről a Módszertani Meséken
- 2018. december 17. Az előhívási hatás eredményessége a deduktív következtetést igénylő feladatok esetén, ELTE TTK Módszertani Kari TDK
- 2019. január 24. BGE –KVIK

Szabó Csaba az alábbi előadásokat tartotta a dolgozat témájából:

- 2018. június 22. Testing is the mother of all knowledge, Technische Universitat, Wien
- 2018. szeptember : Testing is the mother of all knowledge, 56th summer school on algebra &ordered sets,(2-7 Sept 2018)Špindlerův Mlýn, Csehország
- 2018. november 27. – Előhívva tisztul a kép – ELTE Matematikai Intézet Szemináriuma
-

7. Irodalomjegyzék

- Abbott, E. E. (1909). On the analysis of the factors of recall in thelearning process. *Psychological Monographs*,*11*, 159–177.
- Agarwal, P. K, D'Antonio, L., Henry L. Roediger, H. L., McDermott, K. B.&McDaniel, M. A. (2014).Classroom-based programs of retrieval practice reduce middle school and highschool students' test anxiety. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition* 3,131–139.
- Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szeibert Janka: A teszteléses tanulás hatékonyságának vizsgálata az elemi geometria tanításában. TDK dolgozat, 2017
- Brewer, G.A., Unsworth, N. (2012) Individual differences in the effects of retrieval from long-term memory. *Journal of Memory and Language*, 66, 407–415.
- Butler, A. C. (2010). Repeated testing produces superior transfer of learning relative to repeated studying. *Journal of ExperimentalPsychology: Learning, Memory, and Cognition, 36,* 1118–1133
- Carpenter, S. K.,Pashler, H., &Cepeda, N. J. (2009). Using tests to enhance 8th grade students' retention of U.S. history facts. *Applied Cognitive Psychology*, *23*, 760–771. doi:10.1002/acp.1507
- Cassady, J. C., & Johnson, R. E. (2002). Cognitive test anxiety and academic performance. *Contemporary Educational Psychology,27*(2), 270–295.
- Charles B Kromann, Morten L Jensen & Charlotte Ringsted (2009). The effect of testing on skills learning. *Medical Education*, 43: 21–27. doi:10.1111/j.1365-2923.2008.03245.x
- Eglington, L.G.;Kang, S.H.K. (2016). Retrieval Practice Benefits Deductive Inference. *Educational Psychology Review*,) 30:215–228 (Online publikáció 2016.09.15.)
- Gates, A. I. (1917). Recitation as a factor in memorizing. *Archives of Psychology*, *6*(40).
- Hembree, R. (1988). Correlates, causes, effects and treatment of test anxiety. *Review of Educational Research,58*(1), 47–77.
- Kang, S. H. K.,McDermott, K. B., &Roediger, H. L. (2007). Test format and corrective feedback modify the effect of testing on long–term retention. *European Journal of Cognitive Psychology*, 19, 528–558.
- Karpicke, J. D., &Blunt, J. R. (2011). Retrieval practice produces more learning than elaborative studying with concept mapping. *Science*, 331, 772–775.

- Keresztes, A. Kaiser, D., Kovács, G. & Racsmány, M. (2014) Testing promotes long-term learning via stabilizing activation patterns in a large network of brain areas. *Cerebral Cortex*, *24*, 3025–3035.
- Kromann, C. B., Jensen, M. L., & Ringsted, C. (2009). The effect of testing on skills learning. *Medical Education*, *43*(1), 21–27.
- Larsen, D. P., Butler, A. C., & Roediger, H. L. (2013). Comparative effects of test enhanced learning and self-explanation on long term retention. *Medical Education*, 47(7), 674–682.
- Little J. L., Storm, B.C., Bjork E.L. (2011). The costs and benefits of testing text materials. *Memory*, 2011 May; 19(4):346-59
- Lyle, K. B., & Crawford, N. A. (2011). Retrieving essential material at the end of lecture simproves performance on statistics exams. *Teaching of Psychology*, *38*, 94–97.
- McDaniel, M., A., Roediger III, H., L., & McDermott, K. B. (2007). Generalizing test-enhanced learning from the laboratory to the classroom. *Psychonomic Bulletin &Review*, 14 (2), 200-206.
- Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L. 1991 *An Introduction to the Theory of Numbers 5ed.*Ch. 1.1, 1.2, 1.3, 2.1-2.5, 2.8, 2.7, 5.1-5.4, 4.1,4.2,4.5, John Wiley and Sons. Inc. New York.
- Orr, R.,& Foster, S. (2013). Increasing student success using online quizzing in introductory (majors) biology. *CBE Life Sciences Education*, *12*, 509–514.
- Putwain, D.W., Woods, K.A. &Symes, W. (2010). Personal and situational predictors of test anxiety of students in post compulsory education. British Journal of Educational Psychology, 80,137-160.
- Pyc, M. A., & Rawson, K. A. (2010). Why testing improves memory: Mediator effectiveness hypothesis. *Science*,*330*(6002), 335–335.
- Roediger, H. L., III, & Karpicke, J. D. (2006a). The power of testing memory: Basic research and implications for educational practice. *Perspectives on Psychological Science*, *1*, 181–210.
- Roediger, H. L., III, &Karpicke, J. D. (2006b). Test-enhanced learning: Taking memory tests improves long-term retention. *Psychological Science*, *17*, 249–255.
- Smith, M. A., &Karpicke, J. D. (2014). Retrieval practice with short-answer, multiple-choice, and hybrid tests. Memory, 22(7), 784–802.

- Tran, R.,Rohrer, D., & Pashler, H. (2015). Retrieval practice: the lack of transfer to deductive inferences. *Psychonomic Bulletin &Review*, 22, 135–140.Tse, C. S.,
- Balota, D. A., & Roediger, H. L. (2010). The benefits and costs of repeated testing on the learning of face-name pairs in healthy older adults. Psychology and Aging, 25(4), 833–845.
- van Eersel G. G, Verkoeijen P. P. J. L., Povilenaite, M. & Rikers R. (2016) The Testing Effect and Far Transfer: The Role of Exposure to Key Information. *Front. Psychol. 7:1977.* doi: 10.3389/fpsyg.2016.01977
- Zaromb, F. M., & Roediger, H. L. (2010). The testing effect in free recall is associated with enhanced organizational processes. *Memory&Cognition*, *38*, 995–1008.

8. Függelék

„A” – Egy óra végi röpdolgozat

1. Milyen maradékot ad a $2346235^{226688442}$modulo 23?

2. Találd meg a következő egyenlet összes megoldását az egész számok között!

$$3x^{16} -4y^{48} + 17z2012 = 34172$$

„B” – A félév utolsó óráján írt dolgozat

1) Határozd meg az alábbi kongruencia-rendszer összes 100-nál kisebb megoldását!

4) Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenletnek nincs megoldása az egész számok között!

$$10!x^{10} + 12y^{20} + 110z^{1211} = 44z^{2017} + 6$$

2) Határozd meg $73737311^{99993330002}$ maradékát modulo 73.

Vagy

Határozd meg $2017^{1111^{1212}}$maradékát modulo 43.

5) Mely pozitív n-ekre igaz?

$$\sigma(3n) = \sigma (n) + 24$$

3) Tudjuk, hogy a 11 primitív gyök modulo 29. Igaz-e, hogy 11^5 és 11^7 is primitív gyökök?

„C” - Tematika

Forrás: http://web.cs.elte.hu/~csaba/bboard/2017o/algszetan117/ea2013algsze1.pdf

Az előadások anyaga

Algebra és számelmélet 1

1. **előadás:** Munkamemória-tesztek. Oszthatóság definíciója (1.1.1)Prímszám definíciója (1.4.2). Felbonthatatlan szám definíciója (1.4.1). Felbonthatatlan számok a páros számok körében (4k + 2 alakúak felbonthatatlanok, a 4k alakúak nem.). A páros számok körében nincs prím. (1.4.9. Feladat). Vizsgaanyag a gyakorlatról: oszthatósági szabályok:1,2,3,4,5,6,8,9,10,11.
2. **előadás:** Maradékos osztás tétele (1.2.1,1.2.1A).Kitüntetett közös osztó definíciója (1.3.2). Euklideszi algoritmus. Kitüntetett közös osztó létezésének bebizonyítása az euklideszi algoritmus segítségével (1.3.3). Kitüntetett közös osztó egyértelműsége. Két szám kitüntetett közös osztója előáll a számok egész együtthatós kombinációjaként (1.3.5). Gyakorlatról: a^n-1prím=> a=2 és n prím,visszafelé nem igaz. Mersenne-szám: $M_p=2^p-1$. 2^n+1prím=> n kettő-hatvány,visszafelé nem igaz. Fermat-szám:$F_n=2^2n$ +1
3. **előadás:** Kitüntetett közös osztó egyértelműsége és tulajdonságai (4db)(pl.1.3.4, többi előadáson). Prímszám definíciója (1.4.2). Felbonthatatlan szám definíciója (1.4.1). ***Z***-ben a felbonthatatlan számok és a prímek megegyeznek (1.4.3).Relatív prím definíciója (1.3.7, 1.3.8). $(a, m) = (b, m) = 1 \Rightarrow (ab, m) = 1$. Ha $c|ab$és$(c, a) = 1$, akkor $c|b$ (1.3.9). A számelmélet alaptétele (1.5.1). Végtelen sok prím van(5.1.1).
4. **előadás:** Kanonikus alak. Osztók és kitüntetett közös osztó meghatározása a kanonikus alakból. Fermat-szám:.$F_m \quad 2 = F_{m-1}F_{m-2} \dots F_1F_0$. A Fermat-számok páronként relatív prímek => újabb bizonyítás arra, hogy a prímek száma végtelen. Visszafele számterjedelem teszt, kihagyjuk-e a 11-est? Kongruencia definíció (2.1.1). A kongruencia ekvivalenciareláció (reflexív, szimmetrikus, tranzitív). Kongruencia tulajdonságai (5 db)(2.1.2).Maradékosztály definíciója. Kannibálok és a 100 matematikus – elkezdve.
5. **előadás:** Végtelen sok $4k-1$ alakú prím van. A kannibálos feladat megoldása két színnel általános iskolás nyelven. A kannibálos feladat megoldása akárhány színnel maradékosztályokkal. Egyszerűsítési lemma(2.1.3A)-ből nem feltétlenül következik, hogy!!! Lineáris kongruencia definíció (2.5.1) Lineáris kongruencia megoldhatósága (2.5.3),

Lineáris diofantikus egyenlet megoldhatósága (1.3.6) Lineáris kongruencia megoldásszáma, az összes megoldás meghatározása, ha egy ismert (2.5.4) Lineáris kongruenciák megoldási módszerei: 1) Vegyük észre a megoldást Próbálgatás. 2)Átalakítás diofantikus egyenletté. 3)Redukáljuk a két oldalt modulo m. 4) Osszuk a két tagot és a modulust is ugyanazzal a számmal.(Vigyázat! a modulus változik) 5) Osszuk a két oldalt egy modulushoz relatív prímszámmal. 6) Vegyük észre, hogy mivel kell szorozni a két oldalt, hogy a baloldalon *x* szerepeljen. 7) Adjunk hozzá a jobb oldalhoz annyit, hogy a baloldal együtthatójával lehessen osztani. (2.2.2). Redukált maradékosztály definíció (2.2.6). Redukált maradékrendszer definíció (2.2.8)

6. **előadás:** Számok osztályozása kezdőbetű szerint. Ha $r_1,...r_{(m)}$ teljes maradékrendszer modulo m és(a,m)=1,akkor $ar_1,...,ar_{(m)}$ is teljes maradékrendszer modulo m (2.2.10).(gyakorlatról). Ha $r_1,...r_{\phi(m)}$ redukált maradékrendszer modulo m és (a,m)=1, akkor $ar_1,...,ar_{\phi(m)}$ is redukált maradékrendszer modulom(2.2.10).***Vizsgatájékoztató.*** Euler-féle ϕ függvény értékének kiszámítása (2.3.7). Euler-Fermat tétel (2.4.1, 2.4.1A, 2.4.1B). Három részletesen kidolgozott példa (TUDNI KELL GYAKORLATRA) Wilson tétel (2.7.1).$x^2 \equiv 1$ (p)-nek 2 megoldása van ($x = \pm 1$)
7. **előadás:** Szimultán kongruencia-rendszer megoldhatósága, megoldása(2.6.1). Relatív prímmodulusok esetén (2.6.1A). Kínai maradéktétel (bizonyítás nélkül) (2.6.2). Nem feltétlenül páronként relatív prím modulusok esetén (2.6.13feladat). Számelméleti függvény definíciója (6.1.1) Példák: f(n) = 0, f(n) = 1, d(n) (1.6.3), σ(n) (6.2.1), ϕ(n)(2.2.7, 2.3.1). Tétel: Ha $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ és d|n,akkor $d = \prod p_i^{\beta_i}$ ahol $\beta_i \le \alpha_i$. Multiplikatív számelméleti függvény definíciója (6.1.2). Teljesen multiplikatív számelméleti függ- vény definíciója (6.1.3). Multiplikatív függvény meghatározottságáról szóló tétel (6.1.7). Tétel: Ha f multiplikatív, akkor f (1) = 0 vagy f (1) = 1, ha f f= 0 (6.1.6).Lemma (NFL):Ha n=ab, (a,b)=1 és d|n⇒pontosan egy olyan d_1, d_2 pár van,hogy $d=d_1 d_2$ és $d_1|a$, $d_2|b$. Automorf számok, két darab kétjegyű van. d(n),σ(n), multiplikatívak(bizonyítással).
8. **előadás: Rend a lelke mindennek:** Ha (a,n)=1,akkor $a^{20} \equiv 1 \bmod 100$. Rend definíciója (3.2.1). Tétel (3.2.2): Ha (a, m) = 1, akkor az alábbi állítások ekvivalensek: 1)$o_m(a) = k$ 2)a-nak pontosan k különböző hatványa van mod m 3)$a^n \equiv 1 \pmod m \Leftrightarrow k|n$ 4) $a^t \equiv a^s \pmod m \Leftrightarrow k|t-s$. Tétel: $o_n(g) = k \Rightarrow o_n(g^i) = k/(i,k)$. Rend kiszámolás táblázattal, példák: $o_{11}(3) = 5$ és $o_{11}(2) = 10$. 2 rendjének kiszámolása mod 23 kétféleképpen: táblázattal és ügyeskedéssel. A 2 hatványainak kiszámolása mod 17.Olyan elem, amely rendje16,biztosan nem szerepel ebben a táblázatban. Mersenne-számok prímosztói: $q|2^p - 1 \Rightarrow q \equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow q = kp + 1$Végtelen sok prím van – renddel.

9. **előadás:** GYAKORLATRÓL: Mersenne-számok prímosztói: $q|2^p - 1 \Rightarrow q \equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow q = kp + 1$. Primitív gyök definíciója(3.3.1). Tétel: Pontosan akkor létezik primitív gyök mod n,ha $n=p^\alpha$, $2p^\alpha$,2 vagy 4,ahol $p>2$ prím és $\alpha > 0$ (bizonyítás prímekre) (3.3.5). Tétel: Az alábbi állítások ekvivalensek: 1) g primitív gyök modn 2) g-nek $\phi(n)$ különböző hatványa van modn 3) g^m 1(modn) $\phi(n)$m 4) g^t g^s(modn) $\phi(n)$t s 4) Minden mod n redukált maradékosztály előáll, mint g valamely hatványa. Tökéletes szám definíciója (6.3.1). Tétel: Egy m páros szám pontosan akkor tökéletes, ha $n=2^{(p-1)}(2^p-1)$alakú, ahol 2^p-1Mersenne-prím.(6.3.2). Völgytétel

10. **előadás:** Annak alapos vizsgálata, hogy a 2 primitívgyök-e modulo 43. Felírás táblázattal, elmélkedések a rend lehetséges értékeiről. Következtetések levonása számolásokból és elszámolásokból. ☺ A 2 nem primitív gyök mod 23: igazolás táblázattal és Euler-Fermat tétellel. A 3 nem primitív gyök mod 23: igazolás az előző táblázattal. $x^{37}\equiv 59$ mod 43 típusú kongruencia megoldása: keressük x-et 3^i alakban. A táblázatból. Egy másik hasonló kongruencia megoldása modulo43. Innentől feltételezzük, hogy egy kongruenciát mindenki meg tud oldani táblázattal.

11. **előadás:** Fermat-problémakör szorzat=hatvány lemma. Pitagoraszi számhármasok, alapmegoldások, az összes megoldás leírása

12. **előadás:** GYAKORLATON:Gyűrű, komutatív gyűrű, egységelemes gyűrű, test. Példák. Mátrixok,műveletek mátrixokkal.Az n*n-es mátrixok gyűrűt alkotnak. Az asszociativitás és a disztributivitást csak később bizonyítjuk. Gyűrűben 0 a = 0. Ha 0=1, akkor a gyűrű egyelemű. A 0-nak nincs reciproka.