Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar

Teszteljük a tesztet: a geometriai megértés szintjeinek újragondolása a magyarországi teszteredmények alapján

Tudományos Diákköri Dolgozat

Bereczky-Zámbó Csilla — matematika-fizika tanárszak, osztatlan

Muzsnay Anna — matematika-kémia tanárszak, osztatlan

Szeibert Janka — matematika-fizika tanárszak, osztatlan

Török Tímea — matematika-magyar tanárszak, osztatlan

Témavezető:

Szabó Csaba

egyetemi tanár, ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék

Budapest, 2018

1. Tartalomjegyzék

Absztrakt

A Van Hiele-elmélet és a rá alapuló mérés nemzetközi szakirodalomban széles körben ismert és elismert. Az elmélet öt egymásra épülő geometriai fejlettségi szintet különböztet meg, melyek geometriai tudásuk, szemléletük alapján sorolják diszjunkt osztályokba a diákokat. Dolgozatunkban megvizsgáltuk az elmélet és a teszt érvényességét felsőbb, egyetemi szinten. A kísérlet alanyai az ELTE matematika alapszakos elsőéves, illetve matematikatanár szakos elsőéves diákjai. Megállapítottuk, hogy az elmélet lényegében nem vezetett ellentmondásra az egyetemi kísérletünk alapján, viszont ami nem bizonyított, az az, hogy ez a fajta szintezés teljes és kizárólagos. Annak megvizsgálása érdekében, hogy egyáltalán milyen felépítések képzelhetőek el, először megpróbáltuk feltérképezni, és megtudni azt, hogy manapság mit értünk geometria alatt, és ezen szempontok, ismeretrendszer, geometriai kultúra alapján megkezdtük egy újabb teszt kidolgozását.

2. Bevezetés

Dolgozatunkban a magyarországi matematika- és matematikatanár szakos hallgatók geometriai megértési szintjét vizsgáljuk. Vizsgálatunk elméleti alapja az 1950-es években megalkotott, és azóta továbbfejlesztett Van Hiele szintek elmélete (Grigoriadou 2012). A szintek mérésére létezik egy nemzetközileg elismert teszt (Usiskin 1982). Kutatásunk első lépéseként mi is ennek a tesztnek a segítségével mértük fel a hallgatók geometriai megértési szintjét fél éves geometria kurzusuk elején, illetve vizsgájukat követően. A tesztek kiértékelése után teszteltük a tesztet: interjúkat folytattunk a diákokkal, ellenőriztük, hogy valóban a teszteredményeknek megfelelő szinten állnak-e. Az interjúk alapján kimutattuk, hogy a teszt az 5. Van Hiele szintet nem méri jól, új tesztkérdésekre van szükség. Az új teszt létrehozásához az első lépéseket megtettük és a dolgozatban javaslatot teszünk új tesztkérdésekre is.

A Van Hiele-elmélet és a rá alapuló mérés nemzetközi szakirodalomban széles körben ismert és elismert. A szintek a geometriai tudásuk, szemléletük alapján sorolják diszjunkt osztályokba a diákokat. Magyarországon egyértelműen meghatározható, hogy a Nemzeti Alaptanterv (3) és a kerettanterv (1; 2) alapján melyik korosztály melyik szinten kellene, hogy legyen.

Dina van Hiele-Geldof és Pierre van Hiele az 50-es években dolgozták ki a geometria megértésének szintjeit (Dehaene 1992). Vigotszkij, Piaget és Bruner (Bruner 1966, 1986, 1990; N. Kollár–Szabó 2004, Vigotszkij 1967) elmélete szerint minden életszakaszban megvannak a megértés fejlődési szintjei. Ezek a szintek egymást követik, egy diák nem juthat el egy felsőbb szintre az összes korábbi szint elsajátítása nélkül. A tanulás folyamata leegyszerűsítve ezen szintek egymást követő eléréséből áll. Emellett a matematika (és minden tudomány) különböző területeinek vannak megértési szintjei, amelyek szigorúan egymásra épülnek. A tanítási folyamat célja nem más, mint hogy a diákok minél magasabb szintre jussanak el a megértés egymást követő szintjei közül. A van Hiele házaspár a matematikán belül a geometria megértésének szintjeit dolgozta ki részletesebben. Elméletüknek, mint ahogy a fent említett elméleteknek is, van egy kommunikációt érintő vetülete. Eszerint a különböző szinten lévő emberek „különböző nyelvet beszélnek", és nem meglepő módon a különböző nyelvet beszélők nem értik meg egymást. Ezalatt a matematika, illetve azon belül a geometria esetén azt értik, hogy az egyik szinten lévők nem fogadják el a másik szinten érvelők indoklásait. Egy alsóbb szinten lévő diák fölöslegesnek gondolhatja a fölsőbb szinten lévő indoklását, mert nem érzi szükségesnek, hogy állításait külön alátámassza, számára azok teljesek. Ezzel szemben a fölsőbb szinten lévő nem tekinti teljes értékű indoklásnak az alsóbb szintű által adott magyarázatot. Erre a jelenségre egy részletesen kidolgozott példa található korábbi dolgozatunkban (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016).

A van Hiele házaspár elmélete nemzetközileg ismertté és elfogadottá vált, és ennek köszönhetően sokan kezdték el vizsgálni a geometriai fejlődés szintjeit. A magyar közoktatásban egyértelműen elkülönülnek ezek a szintek. Az első szint a 4. osztályos, a második szint a 6. osztályos, a harmadik szint a 8. osztályos, a negyedik szint pedig a 12. osztályos követelményrendszernek felel meg, ezt a későbbiekben részletesebben is kifejtjük. A 80-as években született meg a legismertebb teszt, amely ezeket a szinteket hivatott mérni (Usiskin 1982). Világszerte végeztek méréseket a felhasználásával, többek között az Egyesült Királyságban (Zachos 1994), az Amerikai Egyesült Államokban (Wang 2011), Malajziában (Chew 2009), Hollandiában (Grigoriadou 2012), a Dél-afrikai Köztársaságban (Selkirk 2011). A több mint negyven ország közül, ahol alkalmazták a tesztet és elemzéseket tettek közzé eredményeiről, mi most csak néhányat emelünk ki.

Malajziában több tanulmány is foglalkozik a diákok fejlettségi szintjével. Itt 13 éves korban kezdődik a középiskola, a matematikaoktatás az országban nem egységes. A tanulmányok közül Tay-é (Tay 2003) az első osztályosokra fókuszál, Chong (2001) a második osztályosok szintjét mérte fel, Rafidah pedig egészen a 4. osztályig terjesztette ki a vizsgálatokat (Rafidah 2003). Eredményeik alapján a malajziai középiskolás diákok első vagy második szinten vannak, és csak irányított Van Hiele-típusú oktatással jutnak el a második szintre.

Az Egyesült Királyságban (Jones 2002) erősen függ az oktatási módszertől, hogy milyen szintre jutnak a diákok. A központi szabályozás szerinti elvárt szint alacsonyabb, mint Magyarországon. Még így is az alsóéves középiskolások 40 %-a ez alatt a szint alatt teljesít, legtöbben az első vagy a második szinten vannak. Ez egy ellentmondásos helyzetet eredményez, amelyben a diákok megértési szintjét meghaladó szintű tananyagot kell(ene) tanítaniuk a tanároknak, ez pedig az elmélet kommunikációs megfontolásai alapján nem lehet hatékony. Ez rendkívül megnehezíti a tanítási-tanulási célok elérését, a későbbiekben kísérletet is teszünk ennek alátámasztására.

Görögországban sem jobb a helyzet (Kospentaris – Spyrou 2008), itt az oktatás még kevésbé egységes, a követelményrendszerről pedig a cikkből nem kapunk információt. A szerzők megállapítják, hogy a 15-23 évesek közül csak azok jutottak el második szintre, akik elvégeztek egy geometriakurzust is. (Korábban már megjegyeztük, hogy ez Magyarországon körülbelül az általános iskola negyedik-ötödik osztályában elvárt szint.) A méréseket mindenhol a Van Hiele-tesztek alapján folytatták (Usiskin 1982).

Ha megnézzük ezen 40 ország szakirodalmát, azt figyelhetjük meg, hogy mindenütt 1-2. szint körül mozognak a diákok. Ezek a nemzetközi eredmények azt sugallják, hogy a magyar NAT követelményei meghaladják más országok diákjainak és tanárainak teljesítményét. Önmagában is természetes a kérdés, hogy hogyan alakulnak a szintek a magyarországi diákok körében, elérik-e a tantervben szereplő elvárások szintjeit. A lényeges különbség a malajziai és brit diákok helyzetével szemben, hogy Magyarországon az oktatás erősebben központosított - a NAT lazábban, a kerettanterv szorosabban meghatározza a geometria oktatás tartalmát. Elvárható tehát, hogy Magyarországon a geometriai megértés térképe egységesebb legyen, és a fejlődési szintek korábbi életszakaszokra legyenek tehetők, mint a fenti országokban. Az eddigi viszonylag friss vizsgálatok általános iskolákban és középiskolákban vizsgálták a Van Hiele szinteket mérő tesztek eredményeit (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016; Győry; Herendiné Kónya 2003; Wang 2011) és megállapították, hogy a magyar átlagos középiskolások évfolyamtól függetlenül a kettes szinten vannak. Tehát elmondható, hogy a magyar diákok is jóval a hazai követelményrendszer alatt teljesítenek, valamint ami szintén meglepő lehet, hogy a gimnázium évei alatt nem tapasztalható fejlődés.

(Azonban az valóban igaz, hogy a diákok megértési szintje egységesebb, valamint ilyen viszonyításban magasabb is, hiszen a második szintet csak nagyon kevesen nem érték el.) A középiskolai követelmények alulmúlásának okáról előző dolgozatunkban (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016) és a későbbiekben is részletesebben írunk.

Minket ezen kutatásunk alkalmával a Van Hiele modell magasabb szintjei érdekeltek, hogy milyen szinten állhatnak az egyetemi hallgatók, azon belül is a matematika szakos hallgatók. A fentiek alapján látható, hogy nagyobb matematikatudású diákok szintjeinek megállapítására és a Van Hiele elmélet helyességének tesztelésére magasabb szinteken is kevés példa volt mindmáig a nemzetközi szakirodalomban is. Magyarországon eddig általános iskolásokat és középiskolásokat vizsgáltak (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016; Győry), illetve tanítójelöltek szintjéről készültek felmérések (Herendiné Kónya 2003). Itthon a középiskolába belépő elvárt szint a NAT alapján a 3., a kilépő pedig a 4. Természetes, hogy a matematika szakra felvett egyetemi hallgatóktól az átlagnál magasabb geometriai megértési szintet várunk el, így megfelelő közegnek tűnt az elsőéves matematika alap-és tanárszakos hallgatók között megállapítani a szinteket, vizsgálni a modell helyességét. Azonban a középiskolai eredmények figyelembevételével elképzelhetőnek tartottuk azt is, hogy a hallgatók esetleg a várakozásainkon alul teljesítenek.

3. Kommunikáció

Az Usiskin-féle teszt eredeti szándéka szerint a Van Hiele-elmélet által felállított öt szintet méri, de eredményeink – a szakirodalom korábbi feltevéseivel egybehangzóan - azt mutatják, az elmélet törekvéseit valójában csak az első négy szint tükrözi.

„Ha fejleszteni akarjuk a gyerek képességeit és gyorsítani fejlődését, akkor arról a szintről kell kiindulnunk, ahol a gyerek éppen tart, vagyis az elvárásoknak a gyerek képességeihez és szükségleteihez kell igazodniuk.” Ez Vigotszkij legközelebbi fejlődési zóna elméletének a mottója. A legközelebbi fejlődési zóna kifejezés (Vigotszkij 1967) arra utal, hogy a gyereket körülvevő környezet akkor a legtámogatóbb, ha egy lépéssel éppen az aktuális fejlettségi szint előtt jár (N. Kollár – Szabó 2004). Az elmélet szerint akkor van esély a gyerek fejlődésre, ha a saját nyelvén szólunk hozzá. Vigotszkij munkái posztumusz jelentek meg, néhány közülük csak évtizedekkel halála után. Sokat hangoztatott alapelve, a legközelebbi fejlődési zóna elve a mai magyar tehetséggondozásban Pósa-módszer néven vált szélesebb körben ismertté. A kommunikáció, mint ahogy életünk számos színterén hatalmas jelentőséget kapott a történelem során és manapság is, magától értetődően az oktatás terén is fokozott figyelmet kapott mindig is. Tanulásban és tanításban betöltött szerepéről az évtizedek során számosan értekeztek, a legjelentősebbek tán Piaget, van Hiele és Bruner; azonban ezen elméletek közös magját mind Vigotszkij legközelebbi fejlődési zóna elmélete adta. Ez az elmélet hatványozottan jelenik meg Brunernél (Bruner 1966) -ben, majd későbbi narratíva elméletében (Bruner 1986), ahol kifejti, hogy a kulturális és személyiségfejlődést erősen meghatározza a családban végbemenő kommunikáció. Bruner azt mondja, hogy az oktatónak meg kell próbálnia arra ösztönöznie a tanulókat, hogy maguk is felfedezzék az összefüggéseket. Kiemelkedő szerepet tulajdonít az oktató és hallgató közötti kommunikációnak, a szókratikus tanulásnak. Éppen ezért nagyon fontosnak tartja a kellően gyakori szülő és a gyerek közti beszélgetést is. Az oktató feladatának tekinti azt, hogy a tanulni kívánt információkat a tanuló jelenlegi értelmi állapotának megfelelő formába öntse. Itt szeretnénk megjegyezni, hogy bár Vigotszkij 1896-1934-ig élt, munkái és elméletei máig érvényesek, míg követőinek (Piaget, Bruner) munkái folyamatos felülvizsgálaton és átalakításon mentek keresztül az idők során (Bruner például saját maga felülvizsgálta korábbi téziseit évtizedekkel később). A van Hiele házaspár ugyanezt a jelenséget – azaz azt, hogy minden gyermekhez a saját nyelvén kell beszélni, hogy fejlődést tapasztaljunk – a matematika területén fogalmazta meg. A Van Hiele elmélet tulajdonképpen a legközelebbi fejlődési zóna elméletének geometriára való leképezése. A Van Hiele elmélet szerint, emellett, a matematika minden területén léteznek olyan fejlődési szintek, amelyek lineárisan egymásra épülnek, és egy adott szintről csak a többi alsóbb szinten keresztül lehet eljutni. Azaz egy fölsőbb szinten a megértés elképzelhetetlen az összes alsóbb szint megértése nélkül.

Az iskolai kommunikáció alatt a tanórai előadásokat, magyarázatokat, beszélgetéseket értjük. A tanító tanár, oktató mindig egy általa a diákokról feltételezett szinten szólítja meg a hallgatóságot. Az oktató által feltételezett szint nagyon gyakran nem egyezik meg a diákokról feltételezhető szinttel. És a diákokról feltételezhető szint ritkán egyezik meg a diákok szintjével. A legtöbb egyetemi oktató ugyanazt a szintet feltételezi a diákokról, amilyennel ő került be az egyetemre, vagy amilyen szintet az ő évfolyamtársai ütöttek meg annak idején. Feltételezhető szintnek tekintjük a NAT által megfogalmazott kompetenciákat, tananyag- és tudásanyagot, míg a valódi szint pedig az, amit a diák éppen az adott pillanatban képvisel. Így az egyetemi oktató gyakran nem veszi figyelembe, hogy ma már nem csak a legkiválóbb jelentkezőket veszik fel az egyetemre, hanem annál sokkal többet. Ugyanakkor a középiskolai tananyag folyamatosan átalakul és a diák sem éri el általában a feltételezhető szintet. Számos tanulmány mutatta ki, hogy a diákok nem rendelkeznek a szükséges kompetenciákkal, mert az iskolában nem az életre és nem a NAT kompetenciáira, hanem az érettségire készítik fel őket (Csányi–Pozsonyi–Szabó 2014; Kovács–Palotay 2012). A feltételezett és a valós szint közötti eltérések pedig komoly problémát szülhetnek a továbbiakban. A korábbi elméletek azt sugallják, hogy akkor van esély a tanítási folyamat sikerességére (most sikeresség alatt a gondolkodási- és problémamegoldó készség fejlesztését értjük), ha az oktató felméri a diákok szintjét és annak megfelelően alakítja kommunikációját. E nélkül „legjobb" esetben is csak a tananyag memorizálása következhet be, annak megértésre elképzelhetetlen.

4. A szintek

4.1 A Van Hiele szintek és a teszt

Ahogyan azt már korábbi TDK dolgozatunkban is megfogalmaztuk (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016), az öt Van Hiele szint a következő:

1. szint, a ráismerés, vizualizáció szintje: Rajzról, ábráról felismernek alakzatokat: kör, téglalap, négyzet, …stb. Meg tudják nevezni ezeket, az alakzatokat egy egységként látják, a formát figyelve tekintenek. Az alakzatok részeit és tulajdonságait még nem ismerik fel. Elkülönítik, kategorizálják a különböző alakzatokat, de nem látnak kapcsolatot a különböző kategóriák között. Egy négyzetre például nem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy paralelogramma. Nem nevezik meg az alakzat részeit, mint például csúcs, oldal, szög.

2. szint, a vizuális vizsgálódás, elemzés, leírás szintje: A tanuló felismeri az alakzatok egyes részeit és az egyes részek viszonyát. Azonosítani tudják az alakzatok tulajdonságait, de ezeket még nem tudják összekötni és nem látják a különböző alakzatok tulajdonságai közötti összefüggéseket. Például egy négy derékszöggel rendelkező alakzatról meg tudják állapítani, hogy téglalap (akkor is, ha nincs szépen lerajzolva). Egy rombuszról tudják, hogy szemben lévő oldalai párhuzamosak vagy egyenlő hosszúak, de ezeket a tulajdonságokat még nem kötik össze. Egy egyenlő oldalú négyszögről tudják, hogy rombusz. Egy négyzetre még most sem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy paralelogramma.

3. szint, a fogalmak rendszerezésének, absztrakciónak szintje: A tanuló az egyes tulajdonságokat, fogalmakat már rendszerben látja. A tulajdonságok rendszerezése alapján következtetéseket tud levonni, és ebben a rendszerben fontos szerepe van az ok-okozatiságnak: például egy háromszögben két oldal egyenlőségéből következik két szög egyenlősége. Képesek definíciókat alkotni és megindokolni az állításaikat, következtetéseket levonni, de még nem teljes matematikai rendszerben gondolkoznak, nem értik a bizonyításokat. Tudják és értik, hogy minden négyzet téglalap, minden téglalap paralelogramma. Látják, hogy ha egy négyszög egyben téglalap és rombusz is, akkor az négyzet. A szakirodalomban tipikusan emlegetett példa a váltószögek felismerése, és az azzal való érvelés. Más típusú matematikai érvelésekre viszont még nem képesek. A geometriát még nem látják teljes ok-okozati összefüggésben.

4. szint, a formális következtetések szintje: Ez a szint egy általánosabb matematikai érettségi szint elérése a geometrián belül. Az általános matematikai szint alatt azt értjük, hogy már megkülönbözteti a definíciókat, tételeket, bizonyításokat, axiómákat, következményeket, elméleteket. Az állításoknál felmerül a bizonyítás iránti igény, ezeket a bizonyításokat értik és maguk is el tudnak végezni egyszerűbb bizonyításokat. Megértik a szükséges és elégséges feltételeket. A geometrián belül a tanuló megérti az alapfogalmak és az axiómák meglétét, az utóbbiakat el tudja különíteni a tételektől. Például be tudja bizonyítani, hogy egy háromszögnek van beírt köre. Teljes axiomatikus bizonyításra nem feltétlenül képesek. Például egy négy derékszöggel rendelkező négyszögre rámondja, hogy a szemben lévő oldalak egyenlők, de nem érzi, hogy ezt még be kéne bizonyítani.

5. szint, a fegyelem, a formális logika szintje. Megértik, hogyan épülnek fel a különböző matematikai rendszerek. Képesek absztrakt következtetések levonására, speciális geometriai interpretációk használata nélkül. Fel tudják mérni egy adott axióma hozzáadásának vagy kivételének hatását a rendszerből. Ez a szint már megköveteli a különböző geometriai axiómarendszerekben való gondolkodás és az azokban való bizonyítás képességét.

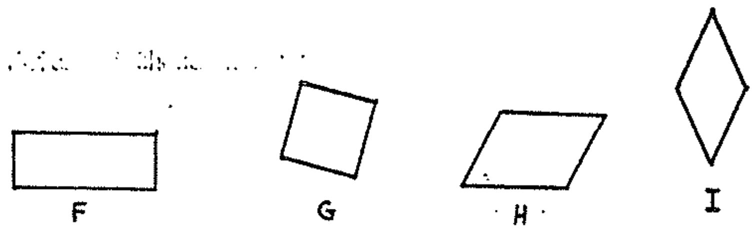
A Van Hiele modell alapján a diákok geometriai megértését ezen öt szint segítségével diszjunkt csoportokba lehet rendezni. A szintek talán legmeghatározóbb tulajdonsága, hogy rögzített sorrendűek és egymásra épülők. Tehát a szintek elsajátításának sorrendje nem felcserélhető, és ahhoz, hogy egy tanuló egy magasabb szintre jusson, minden korábbi szintet el kell érnie. Az elmélet alapján a szintek elérhetők, tehát valós tanulási-tanítási cél lehet az egymás utáni egyre magasabb Van Hiele szintek elérése. Az elmélet kommunikációs megfontolásai alapján azonban a különböző szinteken állók „más nyelven beszélnek”, így nehezen értik meg és fogadják el egymás érveléseit és gondolatmenetét. Ezáltal a tanítási folyamat akkor lehet sikeres, ha a tanítás során a diákok valós szintjéhez igazítjuk a kommunikációnk, „az ő nyelvükön próbálunk szólni”.

A hallgatók ilyesfajta geometriai megértésének vizsgálatára létezik egy nemzetközileg elismert teszt, az Usiskin-féle teszt (Usiskin 1982). Ez a teszt a Van Hiele szintek mérésére szolgál. Mind az öt szint mérésére 5-5 kérdés, tehát összesen 25 kérdés található a tesztben. A teszt jogköteles, az engedélyeket a szerzőtől megszereztük, és hozzájárulását követően kutatócsoportunk tagjai Győry Ákos vezetésével magyar nyelvre fordították. Mutatunk néhány példát a feladatokra.

Az első szintet mérő feladatok között szerepel az következő:

Melyik négyzet?

a. *Egyik sem.*
b. *Csak G.*
c. *Csak F és G.*
d. *Csak G és I.*
e. *Mind az.*



Az alábbi feladat pedig a negyedik szint mérésére szolgál:

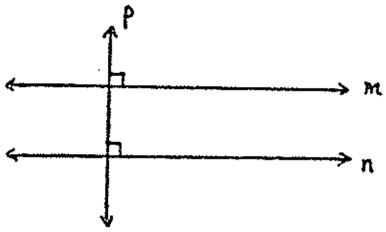
Tekintsük a következő síkban megfogalmazott állításokat:

i. *Két, ugyanarra az egyenesre merőleges egyenes párhuzamos.*

ii. *Egy egyenes, amelyik merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, merőleges a másikára is.*

iii. *Ha egy egyenes minden pontja egyenlő távolságra van egy másik egyenestől, akkor a két egyenes párhuzamos.*

Az alábbi ábrán az m és a p egyenesek merőlegesek egymásra, az n és a p egyenesek is merőlegesek egymásra.



A fenti állítások közül melyikből következhet, hogy m és n párhuzamosak?

a. *Csak i-ből.*

b. *Csak ii-ből.*

c. *Csak iii-ből.*

d. *i-ből vagy ii-ből.*

e. *ii-ből vagy iii-ből.*

Az alábbi feladattal pedig a teszt szerint az 5-ös szint meglétét lehet mérni:

Egy F-geometriában (ami különbözik attól, amihez hozzá vagy szokva) pontosan négy pont van és hat egyenes. Minden egyenesnek pontosan két pontja van. Ha a pontok P, Q, R, S, akkor az egyenesek {P; Q}, {P; R}, {P; S}, {Q; R}, {Q; S}, {R, S}.

Ebben a geometriában a metszi és a párhuzamos a következőt jelenti: például {P; Q} és {P; R} metszik egymást, hiszen P közös pontjuk, míg például {P; Q} és {R; S} párhuzamosak, mivel nincs közös pontjuk.

Az alábbiak közül melyik helyes?

a) *{P; R} és {Q; S} metszik egymást.*

b) *{P; R} és {Q; S} párhuzamosak.*

c) *{Q; R} és {R; S} párhuzamosak.*

d) *{P; S} és {Q; R} metszik egymást.*

e) *Az a)-d) állítások közül egyik sem igaz.*

(A kétségek a teszt helyességére az 5-ös szintet illetően már akár a kérdés elolvasása után is támadhatnak bennünk, azonban mi ezeket a már korábban is felmerülő kétségeket (Wilson 1990). a szakirodalomban elsőként kísérlettel igyekeztünk cáfolni vagy alátámasztani, amelyről a dolgozat későbbi részében bővebben is írunk.)

A tesztet a következőképpen kell kiértékelni: egy kitöltő elérte az adott tesztszintet, ha az adott szinthez tartozó öt kérdés közül legalább négyre tudta a helyes választ, és az előtte lévő szintek mindegyikénél legalább négy helyes választ adott a szintet mérő öt kérdésre. Az elért szintek közül a legmagasabb a kitöltő teszten elért szintje. Tehát egy tesztet kitöltő személy az 1. szinten áll, ha az első öt kérdésből legalább négyre helyesen válaszolt, viszont a második öt kérdés közül már csak legfeljebb háromra tudta a választ. Egy kitöltő a második szinten áll, ha az első öt, illetve a második öt kérdésből legalább négyet-négyet helyesen válaszolt meg, viszont a harmadik szintet mérő öt kérdésből már csak legfeljebb háromra tudott jól válaszolni, és így tovább. (Egyes esetekben megkülönböztetnek erős és gyenge Van Hiele szinteket, erős szint esetén a fent említett szabály alapján minden elért szint kérdései közül legalább négyre kell jó választ adni, míg gyenge szint esetén egy szintet elért a tanuló akkor, ha legalább három kérdésre tudta a helyes választ, és a tanuló szintje az a szint, ami után a következő szinten legfeljebb két jó megoldást adott. A továbbiakban mi egy diák Van Hiele szintje alatt az erős Van Hiele szintet értjük.) A Van Hiele elmélet szerint a szintek egymásra épülnek, így nem fordulhat elő olyan, hogy egy bizonyos szinten álló tanuló egy a saját szintjénél magasabb szinten legalább 4 kérdésre helyesen válaszol, hiszen ezáltal lenne a saját szintjénél magasabb elért szint, vagyis lenne olyan szint, amelyet elért, viszont az összes annál alacsonyabbat nem. Ezzel csak az 5. szint mérésekor ütközhetünk problémákba, ezt fogjuk a későbbiek során kifejteni.

5. Felsőoktatás és a szintek

5.1 Korábbi eredményeink

Korábbi kutatásaink során felmértük a magyar középiskolás diákok Van Hiele szintjét, és azt összehasonlítottuk a NAT által előírt adott korosztályra vonatkozó szintekkel (Bursics–Fehér–Muzsnay). Megfigyelhető, hogy a NAT egymásra épülő elemekből felépíthető fejlődési folyamatot ír elő (3), és ezek az elemek lényegében egyértelműen megfeleltethetők a Van Hiele szinteknek. Mint ahogyan a bevezetőben írtuk, egy általános iskolás tanulónak 6. osztályra a második, 8. osztályra a harmadik szintre kell eljutnia, míg a középiskola 12. osztályára a negyedik Van Hiele szintet kell elérnie a NAT előírásai szerint. Ehhez képest azonban a középszintű érettségi (a diákok 95%-a középszinten érettségizik matematikából) geometria feladatai legfeljebb a harmadik szintet követelik meg. Ez azért probléma, mert sokszor mind a tanárok, mind a diákok kizárólagos célja az érettségi vizsgán való jó teljesítés (Csányi–Pozsonyi–Szabó 2014; Kovács–Palotay 2012), amihez pedig nincs szükség a bizonyítás iránti igény megjelenésére, azaz a negyedik szint elérésére. Mindezek ismeretében is megdöbbentő az eredmény, miszerint az 570 magyar középiskolás korú diák (a kiválogatott diákok lényegében lefedik magyar középiskolások teljes spektrumát) Usiskin-féle teszten elért eredményének átlaga 2,09 és 2,46 között mozog, és a gimnáziumi évek alatt a geometriai megértési szintek átlaga nem fejlődik (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016; Győry).

5.2 Tesztelés az egyetemen

Annak érdekében, hogy megvizsgáljuk az elmélet és a teszt érvényességét felsőbb, egyetemi szinten, kitöltettük az Usiskin-féle tesztet az ELTE matematika alapszakos elsőéves diákjaival, illetve a matematikatanár szakos elsőéves diákjaival.

Mindkét csoporttal az egyetemi tanulmányaik második félévében végeztük el a kísérletet, ennek egyik oka az volt, hogy így már egy féléven keresztül egyetemi tananyagot is tanulhattak matematikából, másrészt az első egyetemi geometriakurzus mindkét szakon a II.félévre esik, így a hallgatókkal megírattuk a tesztet a kurzus elvégése előtt, majd fél évvel később ugyanazon hallgatókkal a geometriavizsga után is.
A felmérést először a matematika BSc-s hallgatók körében végeztük, 65 hallgató bevonásával 2016 tavaszi félévében. Hasonló kísérleti beállítást alkalmaztunk 2018 tavaszi félévében az 51 tanárszakos hallgató részvételével.

A tesztek kitöltése előtt különböző előfeltevéseink voltak, így például valószínűsítettük, hogy a matematika irányban továbbtanuló hallgatók a két legmagasabb, tehát a 4. és 5. szinten, vagyis a NAT alapján legalább 12. osztályos szinten fognak állni geometriából. Ezen kívül pedig azoktól, akik a 4. szinten állnak, a geometriakurzus elvégzése során szintemelkedést vártunk. Ennek ellenére a középiskolai eredmények tanulságai alapján elképzelhetőnek tartottuk azt is, hogy lehet akár pár olyan hallgató, aki csak 3. szinten áll, az ő esetükben viszont a Van Hiele elmélet értelmében a megértési szintjük a kurzus elvégzésével sem emelkedhetett, részben a szintek egymásra épülése részben pedig az elmélet kommunikációs vetülete miatt, hiszen egy egyetemi geometriaórán az oktató minden bizonnyal magasabb szinten tárgyalja a tananyagot, mint amilyenen eredetileg ők voltak. Azonban az az eshetőség, miszerint valaki fél éven keresztül tanulhat az egyetemen geometriát és levizsgázhat belőle anélkül, hogy a NAT szerinti 12.-es szintet elérhetné, elsőre valószerűtlennek tűnt.

A kísérlet eredményeit az alábbi táblázat mutatja:

	Matematika BSc		Matematika tanárszak	
	1. kitöltés (db)	2. kitöltés (db)	1. kitöltés (db)	2. kitöltés (db)
3. tesztszint	27	11	24	24
5. tesztszint	38	16	18	22
3.→5. ugrás	0		7	
5.→3. visszaesés	0		6	

A BSc-s diákoknál és a tanárszakosoknál is minden hallgató, aki értékelhető teljesítményt nyújtott, vagy az 5. vagy a 3. szinten áll(t). A negyedik szinten senki. Szembetűnő, hogy a teszt eredményei szerint a diákok nagy része valóban, 3., azaz 8. osztályos tanulótól elvárt szinten áll. Megfigyelhető az is, hogy az alapszakos hallgatóknál nem volt szintugrás, míg a tanárszakosoknál volt 3. szintről 5.-re való ugrás és 5.-ről 3. szintre való visszaesés is a fél év eltelte során, ami egyrészt a Van Hiele elmélet kommunikációs vetületének mond ellent, másrészt annak, hogy az elmélet alapján nincs visszafejlődés, egy már megszerzett szintet nem lehet elveszíteni. Azonban mi magyarázza a különböző képzési módon tanuló hallgatók eredményének ilyen különbségét? A jelenség oka az lehet, hogy 2016-ban az alapszakosok esetén még papír alapon töltettük ki a tesztet, míg a tanárszakosoknál már az Edubase online rendszert használtuk, ami a kitöltést követően megjelenítette a kitöltő pontszámát, sőt az elrontott feladatokat is, és azok helyes megoldását is. Így a tanárszakosok esetén már akadtak olyanok, akik a félév elteltével emlékeztek a rontott válaszaikra, és azokat, vagy azok egy részét javítani tudták.

Szembetűnő tény az is, hogy a teszt szerint a hallgatók között nincs 4. szinten lévő diák, vagyis aki eléri a 4. szintet, az az 5.-et is. Sőt, számos olyan hallgató is volt, aki a 3. és 5. szint kérdéseit jól töltötte ki, a 4.-et viszont nem. (Ilyenkor a szabályok szerint 3. szinten áll az illető.) Ez ellentétben áll a szintek egymásra épülésével. Már maga Usiskin is amikor megalkotta a tesztet, azt sejtette, hogy ez a teszt az 5. szintet nem jól méri, és a szakirodalomban több helyen is találunk erre vonatkozó kétségeket, azonban mint már említettük, a tesztet korábban főként 1-2. szint körül mozgó diákok körében töltötték csak ki, de eddig még sosem olyan társasággal, aki elérhette volna a magasabb szinteket. A mi eredményeink alátámasztják a korábbi kétségeket arról, hogy az 5. szintet valóban lehet-e mérni és hogy ezek a kérdések tényleg mérik-e az 5. szintet.

Meggyőződésünk, hogy az axiomatikus gondolkozás folyamatosan fejlődik a matematikai képességekkel és nem pedig a 4. Van Hiele szintet követően kezd kialakulni. Ugyanakkor nagyon kevés olyan ember él a világon, akinek lehetősége van mélyebben belemerülni más axiómarendszerek vizsgálatába. Magyarországon ilyet csak matematika szakos hallgatóknak, az egyetemi törzsanyagon kívül tanítanak. Akár a hiperbolikus, akár a gömbi geometriát vesszük, a geometria tanszékek néhány oktatóján kívül senki nem ért hozzájuk az alapvető összefüggéseket leszámítva. Tehát a különböző axiómarendszerekben való gondolkodás, bizonyítás képességének szintje elméletben létezik, azonban kétségkívül csak a társadalom igen szűk rétege tartozhat bele. Ezzel a szinttel kapcsolatban még további problémák is felmerülnek: egyrészt, érdemes-e egyáltalán ezt mérni, hiszen mint mondtuk, viszonylag pontosan megállapítható, kik azok az emberek, akik ezt elérhetik. Másrészt nem is biztos, hogy mérhető, és ha igen, akkor is újabb nehézségként merül fel, hogy ki állíthatná össze a mérésére szolgáló tesztet. Az a pár, a szintet elérő ember, saját magának? Az Usiskin-féle teszt nem is ezt az 5. szintet méri, hanem tulajdonképpen logikai következtetésekre kérdez rá. Miután megbizonyosodtunk arról, hogy a teszt ezen része nem teljesen azt méri, amit valójában szeretne mérni, és felmerült az igény egy új tesztre a magasabb szinteken álló egyének geometriai megértési szintjének mérésére, mi a fenti okokból nem is ennek a szintnek a mérésére szolgáló, jól működő teszt megalkotását tűztük ki célul, hanem elsőként az az ötlet merült föl, hogy a 4. szintet lehetne finomítani. Ennek alapját az adta, hogy lényegi különbségek vannak aközött, hogy valakiben felmerül a bizonyítás iránti igény, és aközött, hogy különböző bizonyításokat el is tud végezni, valamint a bizonyítások nehézségi fokai között is jelentős, esetleg mérhető különbségek lehetnek.

Mivel már az első kitöltés után felmerült a gyanúnk, hogy a teszt hibás, hiszen egyrészt elképzelhetetlen, hogy egy matematika szakos hallgató a NAT szerinti 8. osztályos, azaz 3. szinten teljesítsen a teszten, másrészt a 4. szinten lévő hallgatók meglepő hiánya miatt.

Annak érdekében, hogy megvizsgáljuk, hogy milyen szinten állnak a hallgatók valójában, interjúkat készítettünk.

5.3 A teszt tesztelése – Interjúk

Mint ahogyan a bevezetőben is említettük, és ahogy Usiskin (1982) cikkében is szerepel, tesztelni kell a teszt eredményeit, vagyis tesztelni kell a tesztet. Annál is inkább, mert nehéz elhinni, hogy egy egyetemi geometria kurzus elvégzése után is volt olyan hallgató, aki az általános iskolás szinten maradt. Először a BSc-s kísérletet hajtottuk végre. Az összes diákot behívtuk egy interjúra. Az interjún általában a kutatócsoport két-három tagja vett részt és a diákok 1-3 fős csoportokban jelentek meg. Minden alkalommal ugyanazokat a kérdéseket tettük föl, és amikor egyszerre több fő vett részt az interjún, figyeltünk arra, hogy mindenkiről megkapjuk a szükséges információkat. Ez az információ az volt, hogy az illető valóban a teszt által kimutatott szinten van-e geometriából. A leszűrt tapasztalatok alapján egy évvel később már főként azokat a tanárszakos hallgatókat hívtuk be, akik valamelyik alkalommal nem érték el az 5-ös szintet, de kontroll kedvéért néhány hallgatót azok közül is behívtunk, akik mindkét alkalommal 5-ös szinten teljesítettek. Akik nem mindkét alkalommal 5-ös szinten teljesítettek, az általában vagy azt jelentette, hogy a félév során szintváltás történt, vagy pedig azt, hogy a hallgató mindkét alkalommal 3. szinten írta meg a tesztet. A szintváltás mindkét irányba megjelent. Ezekről a későbbiekben írunk. Először a BSc-s diákokkal végzett interjúk tapasztalatait írjuk le. Mindenkinek az alábbi két kérdést tettük föl:

1. feladat: *Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?*

2. feladat: *Igaz-e, hogy minden háromszögnek létezik köréírt köre?*

Elsősorban az első kérdésre adott reakciókra voltunk kíváncsiak. A válaszok minőségéből egyértelműen lehet következtetni a hallgató Van Hiele szintjére. Elsősorban azt szerettük volna megtudni, hogy:

1. Megadja-e a helyes választ (ez mindenkinek sikerült).
2. Felmerül-e benne a bizonyítás igénye (ezt egy egyszerű miért kérdéssel teszteltük).

3. Látja-e, hogy a bizonyítás két részből áll.

4. Ad-e egy eljárást arra, hogy hogyan vette fel a két párhuzamos egyenest.

5. Visszavezeti-e a problémát egy másik problémára.

6. Visszavezeti a problémát az axiómákig.

Azt gondoljuk, hogy a 4. Van Hiele szinthez az 5. pontig el kell jutni. Számítottunk arra, hogy sokan nem jutnak el a 2. pontig, ezért, hogy ezeknek az interjú alanyoknak ne legyen kudarcélménye, feltettük a második kérdést is. Sejtettük, hogy erre a kérdésre jól fognak válaszolni a hallgatók, ugyanis ez a kérdés többek közt a matematika érettségi tételek között is szerepel. A teljesség kedvéért ebben a dolgozatban nem csak összefoglaltuk az interjúk során tapasztaltakat, hanem néhányat pontosan le is írtunk.

5.3.1 Példák alapszakos interjúkra

Köszönés és leültetés után föltettük az 1. kérdést. (*Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?*) A diákok általában gyanakvóan néztek, keresték a csapdát. Megmondtuk nekik, hogy nem arra vagyunk kíváncsiak, hogy tudják-e a helyes választ, hanem a válaszadás közbeni reakcióikat figyeljük. A táblára felrajzoltunk egy egyenest és tőle távolabb egy d hosszú szakaszt, majd megkezdődött a feladatról való beszélgetés.

-Mi a feladat megoldása?

-Hát két egyenes.

-Rajzolja be, hogy melyik két egyenes. (A hallgató odament a táblához és felrajzolt két látszólag párhuzamos egyenest.)

-És miért pont ez a két egyenes? Most elegendő nekünk az, ha csak az egyik egyenesről beszél, látjuk, hogy a másiknál ugyanaz a helyzet.

-Mert az egyenest azt úgy kapjuk, hogy merőlegest bocsátunk az eredetire, felmérünk d *távolságot, ami megad nekünk egy pontot és ebben a pontban merőlegest bocsátunk az előbbi egyenesre.*

-És hogyan bizonyítaná be, hogy ez az egyenes a válasz?

-Azt kell megmutatni, hogy az egyenes minden pontja jó, és más pont nem jó.

-És azt hogy mutatná meg?

-Felveszek az egyenesen egy tetszőleges pontot (közben rajzolt) és ebből a pontból merőlegest bocsátok az eredeti egyenesre (felrajzolta az ábrára a harmadik derékszöget is). És akkor ez egy téglalap, tehát a szemben lévő oldalai megegyeznek. (Itt már tudtuk, hogy az interjúalany a 4-5. szinten van, de folytattuk a kérdezgetést.)

-Honnan tudja, hogy ez téglalap?

-Onnan, hogy négy derékszöge van.

-Én csak hármat látok.

-De akkor a 4. is derékszög.

-Miért?

-Mert egy négyszög belső szögeinek az összege 360º.

-Ez miért igaz?

-Húzzunk be egy átlót, és az a két háromszög egybevágó.

-Honnan tudja, hogy ez a két háromszög egybevágó?

-Hát mert mindkettőnek van egy szöge, ami derékszög, és ezen felül még egy szöge, ami megegyezik, és egy oldaluk pedig közös.

-És miért egyenlőek azok a szögek?

-Mert váltószögek.

-Miért?

-Mert az ábra szimmetrikus.

Itt megköszöntük a részvételt és elköszöntünk.

A válaszadók közül többen eljutottak a téglalap felrajzolásáig, és ettől a ponttól több eltérő bizonyítást is adtak. Volt, aki a négyszög szögeinek összegét úgy indokolta, hogy felosztotta azt két háromszögre és azt mondta, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180º. Ilyenkor megkérdeztük, hogy ezt honnan tudja. Válaszként felrajzolt egy háromszöget a táblára, melynek egyik oldalegyenesét a vele szemben található csúcsba tolta el és meghosszabbította a többi oldalegyenest is. Felhasználva, hogy az eltolás szögtartó és hogy metsző egyenesek metszéspontjában keletkező szemközti szögek egyenlő nagyságúak belátta, hogy a háromszög szögeinek összege 180º, azaz a klasszikus bizonyítást mondta el. Mi itt csak arra figyeltünk, hogy a megfelelő résznél valóban kimondja-e a párhuzamossági axiómát, vagy legalábbis utal-e rá. Olyan is volt, aki berajzolta az oldalak felezőpontjait és megmutatta, hogy az ábra (négyszög) szimmetrikus. Továbbá interjúztattunk olyan hallgatót is, aki ezek között az állítások között körbe-körbe járt a beszélgetés alatt.

Előfordult olyan hallgató is, aki másképp adta meg az egyenest: az eredeti egyenesen kijelölt két különböző pontot, merőlegest bocsájtott a két pontban az eredeti egyenesre, felmért *d*-*d* távolságot, majd az így kapott pontokra illesztett egyenest. Majd azt mondta, hogy ez az egyenes párhuzamos az eredetivel.

-Mit jelent az, hogy párhuzamos?

-Hogy nem metszik egymást.

(Ilyenkor úgy rajzoltuk az ábrát, hogy valahol távol a felrajzolt egyenes elmetszi az eredeti egyenest.)

-Ilyen nem lehet.

-Miért? (Itt kicsit többet gondolkozott a tanuló, de ráérzett arra, hogy a kapásból felmerülő válaszok nem lennének helyénvalóak.)

Rövid gondolkodás után azt válaszolta, hogy szimmetriai okok miatt a túloldalon is lenne egy metszéspont. Két egyenesnek pedig nem lehet két metszéspontja, hacsak nem egyeznek meg.

Akadt olyan matematika BSc-s hallgató is aki kevésbé mintaszerűen válaszolt a kérdésre. Bemutatunk egy ilyen típusú interjút is:

- *Hát 2 egyenes.*

- *Melyik kettő?*

- *Hát ez meg ez (felrajzolta a táblára).*

- *És miért az?*

- Hát mert ez az egyenes.

- De hogy kapta meg ezt az egyenest.

(Akkor általában ő is megadta jól az eljárást, amivel az egyenest felvette.)

- És miért ezek azok a pontok?

- Mert ezek vannak rajta az egyenesen.

Ilyenkor gyorsan váltottunk és megkérdeztük, hogy van-e minden háromszögnek köréírt köre.

Olyan hallgatóval is beszélgettünk, aki szintén az eredeti egyenesen kijelölt két különböző pontot, merőlegest bocsájtott a két pontban az eredeti egyenesre, felmért *d-d* távolságot, majd az így kapott pontokra illesztett egyenest és innen nem jutott tovább. Innen kicsit körülményesebb is az általunk ismert bizonyítás. Ezt az is mutatja, hogy számos 5. szintű hallgató is először így vette fel az egyenest, majd amikor megkérdeztük, hogy ennek az egyenesnek miért jó minden pontja, akkor hirtelen taktikát váltott, másképp vette fel az egyenest, mert látta, hogy az a módszer célravezetőbb.

Egy hallgató kivételével kis rávezetés után mindenki tudta, hogy igen, létezik minden háromszögnek köréírt köre és ez az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. Minden alkalommal lerajzoltuk úgy a három egyenest, hogy nem egy pontban metszik egymást. Ekkor mondták, hogy ez lehetetlen, ezek egy pontban metszik egymást és sikerült indokolniuk is. Érdekesség, hogy egy hallgató úgy bizonyította ezt be, hogy rajzolt egy háromszöget, köré egy nagy kört és annak a sugarát kezdte el csökkenteni.

5.3.2 Példák tanárszakos interjúkra

A tanárszakosok, akiket később teszteltünk, abban különböznek a matematika BSc szakosoktól, hogy nekik részben más a tananyag: náluk nagyobb hangsúlyt kap az elemi geometria (hiszen később a középiskolában is azt kell tanítaniuk), ezért az általuk tanult anyagrész közelebb áll az Usiskin-féle teszt kérdéseinek a szelleméhez. Ugyanakkor kevesebb matematikát tanulnak, mint az alapszakos hallgatók. Az a néhány interjúztatott hallgató, aki 5. szinten volt félév elején és félév végén is, az a válaszait másképp fogalmazta meg, mint az alapszakos hallgatók. Például az egyikük azt mondta, hogy az egyenest az eredeti eltolásával kapjuk meg. A BSc-s diákokkal készített interjúk tapasztalatai alapján innen már nem kérdeztünk többet…

A tanárszakosoknál a 2. kérdés az alapszakosakkal ellentétben az volt, hogy van-e minden háromszögnek beírt köre. A harminckét válaszolóból négy azt mondta, hogy igen, huszonnyolc pedig azt, hogy nem mindig. Voltak olyan interjúalanyok, akiknek miután nem sikerült bebizonyítaniuk, hogy minden háromszögnek van beírható köre, feltettük azt a kérdést, hogy van-e minden háromszögnek köréírt köre. A hallgatók közül volt olyan, aki miután ezt megoldotta, be tudta látni a beírt körre vonatkozó tételt is.

Alább egy olyan hallgató válaszaiból idézünk, aki az első alkalommal 5-ös, második alkalommal 3-as szintet ért el a teszten, viszont az interjú során kétséget kizáróan meg tudtuk állapítani, hogy valójában csak 3-as szinten van.

- *Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?*
- *Tehát van egy egyenes, nevezzük e-nek, és egy d távolság, vagyis egy szakasz. (Közben rajzolja.) Ezt most szerkesszem meg neked, vagy csak mondjam el, hogy hol vannak azok a pontok?*

  (Megkértük, hogy mondja meg, hol vannak a pontok. Ezt sikeresen megtette, majd ezután megpróbáltuk rávezetni arra, hogy ezt bizonyítsa is be.)
- *És ez biztos?*
- *Miért ne lenne az? Szerintem biztos.*
- *És miért biztos ez akkor?*
- *Az e egyeneshez kettő párhuzamost szerkesztettünk, és mivel párhuzamosak, és ezt tudom, mert ugyanazt a... Öhm. Mivel kettő helyen is felmértem, és a végpontokat kötöttem össze, ezért biztos, hogy párhuzamost kaptam, mert hogy bármelyik következő ponton néznék egy merőlegest, akkor az is ugyanúgy d távolságra lenne.*
- *És miért lenne az is?*
- *Mert párhuzamos.*
- *És nem lehetne például úgy, hogy: (ekkor összekötöttük a két kijelölt pontot egy olyan görbével, ami nem d távolságra volt e-től minden pontban).*
- *Ez nem egyenes. Nem tudom mire vagy kíváncsi most még.*
- *Be tudnád-e látni, bármelyik pontról, hogy ezek jók, vagyis hogy ezek mind d távolságra vannak?*

- *Szerintem nem tudnám belátni, mármint most ide tudnék húzni, de ez nem számítana belátásnak…*

  Ezután rögtön áttértünk a második feladatra.

Volt olyan 3-as szintű hallgató, aki több alkalommal is az általa rajzolt ábrára igyekezett támaszkodni.

- *(Mikor már a második kérdés bizonyításán próbálkozott.)*
- *Várjál, rajzolok egy jobbat, hátha kitalálok tőle valami okosat.*
- *Jó, és akkor egyáltalán létezik ez a metszéspont? Kettő metszéspontját ugye mindig ki tudjuk választani, de a harmadik biztos, hogy ugyanott metszi őket?*
- *Szerintem mindig metszik egymást. Várj, most rajzolok egy nagyon absztraktat. Hát, ebből nem látok sokat… Erre nem tudok biztosat mondani, de ha kéne, tuti azt mondanám, hogy metszik.*

A 4. szint finomításának motivációját tán a következő példa is kellően alátámasztja, hiszen lényegi különbség van például a bizonyítási igény megjelenése, és a különböző nehézségű bizonyítások elvégzése között, valamint abban is jelentős különbségek mutatkoznak, hogy a hallgatók milyen bonyolultságú állításokra vezetik vissza a kérdést a bizonyítás során.

(Megkérdeztük azt is, hogy minden háromszögnek van-e köréírható köre. A hallgató eljutott addig, hogy a köréírható kör középpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja.)

- *(…) És most megint meg fogod kérdezni, hogy ezek minden esetben metszik egymást? Mert arra nem tudok válaszolni, de mivel van mindegyik háromszög minden oldalának szakaszfelező merőlegese, ezek pedig egy pontban metszik egymást* - ezt nem tudom *bizonyítani, - akkor biztos, hogy van köréírható körük is, az összesnek.*

A bizonyítási képességek hiányosságaira is sok esetben akadt példa.

(Az első a korábban már hivatkozott interjú folytatásában.)

- *Mert arra nem tudok válaszolni, de mivel van mindegyik háromszög minden oldalának szakaszfelező merőlegese, ezek pedig egy pontban metszik egymást* - ezt nem tudom *bizonyítani, - akkor biztos, hogy van köréírható körük is, az összesnek.*

- *Mostmár akkor tényleg csak az van hátra, hogy ezek egy pontra illeszkednek. Próbáld meg, aztán legfeljebb megyünk tovább, ha nem megy, nem muszáj.*
- *Gondolkodom. De akkor ezt mostmár feltehetem, hogy van köréírható köre, vagy ezt csak akkor tehetem fel, hogyha ezt már bebizonyítottuk?*

Valamint sok esetben pont a bizonyítási igényről világlott ki, hogy nem túl erős, ha van.

- *Van-e minden háromszögnek beírt köre?*
- *Van.*
- *És miért?*
- *Mert a középpontja a (...) szögfelezők metszete.*
- *És ez miért igaz?*
- *Mert ezt tanultuk az iskolában.*

Erre másik példa:

- *(Miután nem sikerült a beírható kör meglétét bizonyítania egy másik hallgatónak:)*
- *Van-e minden háromszögnek köré írható köre?*
- *Van.*
- *És miért?*
- *Mert az oldalfelező merőlegesek mindig metszik egymást, egy pontban.*
- *Miért?*
- *Nem tudom, mert így működik a matek.*
  (Ezt kimondva kis szünet után a hallgató megadta a klasszikus bizonyítást, két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helyével, „Ja, igen, ez volt a bizonyítás…" és miután ezt megoldotta, a beírt körre vonatkozó tételt is be tudta bizonyítani, azonban kijelenthető, hogy az igényt csak erős külső motiválásra lehetett felszínre hozni.)

Az elmélet kimondja, hogy az a hallgató, aki egyszer megszerzett egy adott Van Hiele szintet, az azt meg is tartja, illetve csak abban az esetben történhet szemléletfejlődés, ha az oktató és a hallgató közti kommunikáció megfelelő. Tehát az elmélet azt sugallja, hogy az év elején 3. szinten teljesítő hallgató a félév végén, a geometriakurzus ellenére sem vált szintet, ugyanis az egyetemi oktató által alkalmazott nyelv szintje magasabb az övénél: egy egyetemen matematikát oktató tanár minimum 4. szintet vár el a hallgatóságtól. Ezzel szemben 112 tanulóból volt hét olyan, aki az első fordulóban 3., majd a második fordulóban 5. szinten teljesített. Az interjúk során viszont kiderült, hogy 3. szinten állnak mind a heten. Ennek a jelenségnek a hátterében az Edubase nevezetű online program áll. A tanárszakosoknál ugyanis már nem papír alapon, hanem a program segítségével végeztük a tesztelést, ami sajnálatos módon a kitöltést követően megmutatta az elrontott válaszokat, és azok helyes megoldását is. Így a diákok közül voltak olyanok (nem sokan), akik emlékeztek, hogy előző alkalommal mit rontottak el, és ez alapján tudták javítani az eredményüket Ahogyan azt korábban említettük, az elmélet az 5. szintről való visszalépést sem engedné, ennek ellenére voltak olyan tanulók, akik bár 5. szintet értek el az első teszten, a másodikon 3. szinten teljesítettek. A teszt tesztelését követően, kiderült, hogy ők azon kevés emberek közé tartoztak, akik igen jó érzékkel tudtak tippelni, lehet véletlenül jól kitölteni egy tesztet.

Az interjúkból az derült ki, hogy mindenki, aki nem 5. szinten teljesített a teszten mindkét alkalommal, az valójában 3. szinten áll. Megállapítható tehát, hogy a Van Hiele teszt felfele torzít. Az interjúk eredményi alapján azt mondhatjuk, hogy a Van Hiele elmélet egyetemi szinten sem vezet ellentmondásra, azonban a szintek mérésére szolgáló teszt az 5. szinten megbukott. Ezenkívül pedig kiderült, hogy ugyanazt a tesztet kétszer nyugodtan ki lehet töltetni a hallgatókkal, nem (nagyon kevesen) fognak emlékezni a kérdésekre, főleg, ha nem kapnak visszajelzést a hibáikról.

5.4 Túl a Van Hiele szinteken

A Van Hiele elmélet kommunikációs része nem vezetett ellentmondásra az egyetemi kísérletünk alapján. A Van Hiele-ék által meghatározott szintek valóban egymásra épülnek, és a 4. szintig jól mérhetőek az Usiskin által létrehozott teszttel. Ami viszont nem igaz, az az, hogy ezek a geometria megértésének egyetlen lehetséges szintjei. Az első három szint csak alakzatokkal foglalkozik, viszont a geometria egyáltalán nem csak síkbeli alakzatokról szól, pláne nem csak a parallelogrammáról, hanem sok minden másról is. Az igaz, hogy léteznek olyan tipikus megértési szintek, amelyek egymásra épülnek és igaz rájuk a Van Hiele elmélet, de egészen biztosan fel lehet írni másféle szinteket is, amik nincsenek ellentétben a Van Hiele elmélettel. Azt gondoljuk, hogyha az egész geometriát kell a tesztnek lefednie, akkor nincs bizonyítva, hogy ez a teszt azt is méri. Nem tudjuk, hogy aki itt 5. szinten teljesít, az a geometria más területén, más értelmezésénél hogyan szerepelne.

Az Usiskinre hivatkozó cikkek alapján úgy tűnik, hogy 1980-ban ezt a tesztet egységesen jónak ítélték a világban. Azóta is használják, és működik, leszámítva egyetlen elemet, ami sok helyen, már magánál Usiskinnél is megemlítést nyer, kutatásunk során pedig bebizonyosodott, ez pedig az 5. szint. Tapasztalataink azt mutatják, hogy még a matematikával komoly szinten foglalkozó egyetemistáknál sem jön elő triviálisan az 5. szint, azaz a más axióma rendszerben, és a más geometriában való gondolkodás és bizonyítás képessége. Ugyanakkor egyáltalán nem igaz, hogy tudni kell a mi geometriai rendszerünkben bizonyítani ahhoz, hogy valaki axiomatikusan gondolkozzon egy másikban. A teszten nem véletlenül tapasztaltuk, hogy 12 olyan hallgató is volt, aki teljesítette a 3. szintet és az 5. szintet is, de a 4. szint nem sikerült neki. Az 5. szint úgy gondoljuk, megbukott, mert hol bukhatna meg máshol, mint egy egyetem matematika szakán; és főleg azért, mert a világon nagyon kevesen jutnak el odáig, hogy lehetőségük legyen ilyen szinten gondolkozni. Ezt a szintet lehet, hogy be kéne illeszteni valahova, de az nem igaz, hogy lineárisan fejlődik és a 4. Van Hiele szint után következik, hanem ennek a szintnek a fejlődése párhuzamosan történik a matematikai érettséggel, és nem pedig a geometriai megértéssel.

Annak megvizsgálása érdekében, hogy egyáltalán milyen felépítések képzelhetőek el az 5. szint helyett, vagy az eddigi Van Hiele szintekkel párhuzamosan, először megpróbáltuk feltérképezni, és megtudni azt, hogy manapság mit értünk geometria alatt. 1957 illetve 1980 óta sokat változott a világ, és még ha ez a teszt meg is felel az akkori geometria szellemének, érdemes felülvizsgálni. Tehát fontos lenne először megtudni, hogy mit kell érteni a mai világban geometria alatt, majd pedig az alapján kéne tesztet készíteni. Megtettük az első lépéseket, megkérdeztük mi az a geometria. Három egyetemi geometria oktatót kérdeztünk meg arról, hogy ők mit értenek ma geometria alatt: Dr. Csikós Balázs habilitált egyetemi docenst, az ELTE TTK Geometria Tanszék vezetőjét, Dr. Naszódi Márton szintén habilitált egyetemi docenst és Dr. Muzsnay Zoltánt, habilitált egyetemi docenst, a Debreceni Egyetem TTK Geometria Tanszék vezetőjét.

Csikós Balázs a lineáris algebra és a geometria összekapcsolását tekinti kiemelkedően fontosnak. Azt, hogy a determinánsra gondolhatunk úgy, mint egy lineáris leképezésre a tér fölött, vagy például a mátrixszal való szorzásra tekinthetünk úgy, mint egyfajta transzformációra. Lényegesnek tartja azt is, hogy lássuk, hogy az algebrai egyenleteket össze lehet kapcsolni geometriai alakzatokkal. Erre egy kézenfekvő példa a lineáris programozás, ahol van sok-sok egyenlőtlenségből álló rendszer, és a maximalizálás a feladat: ilyenkor nekiállhatunk számolgatni, de valószínűleg egyszerűbben megoldható a feladat, ha látjuk, hogy az egyenlőtlenségekre úgy is gondolhatunk, mint félsíkokra vagy félterekre, és azoknak a metszetét keressük. Meg kell érteni a feladathoz kapcsolódó geometriai képet.

Naszódi Márton hasonlóképpen gondolkozik a geometriai szemléletről, megértésről.

Szerinte is az összefüggéseket kell látni: azt, hogy az alakzatokhoz kapcsolható algebrai egyenlet, és az, hogy valaki az algebrai egyenletet össze tudja kötni adott alakzat képével, az egy fontos képesség. Ne csak mint formális egyenletet lássa, hanem lássa, hogy geometriailag az milyen élőlény. Amikor például egy többváltozós függvénynek tanulja a diák az érintőjét, akkor lássa, hogy ott egy geometriai vektorfogalomról van szó, illetve egy érintősíkról.

Muzsnay Zoltán egy másik nézőpontot képvisel. Az előzőekkel ellentétben ő pont azokat a tulajdonságokat, mennyiségeket emelné ki, amelyek paraméterezéstől, koordináta-rendszertől függetlenek. Ahogy Einstein is megfogalmazta, a fizikai törvények igazából geometriai tulajdonságok, és egy törvény nem függhet viszonyítási rendszertől, koordináta-rendszertől. Azokra a geometriai tulajdonságokra, összefüggésekre, jellemzőkre helyezné a hangsúlyt, amik nem függenek attól, hogy milyen segédeszközt használunk.

A célunk alkotni egy (vagy több) olyan tesztet, ami megfelel ezen szempontoknak, ennek az ismeretrendszernek, geometriai kultúrának. Ahogyan az interjúk alapján is láttuk, a geometria nagyon sokrétű, más területeken máson van a hangsúly, és éppen ezért nehéz lenne egy tesztben minden szempontot egyszerre figyelembe venni. Továbbá a fentieken túl szeretnénk egy térbeli tesztet is létrehozni az Usiskin-féle teszt mintájára, ugyanis azt többen hiányolják. Egy meggyőző érv a térbeli teszt megalkotása mellett az a tény, hogy a téri szemlélet szorosan összefügg a matematikai képességgel, ennek kiinduló pontja Dehaene hármas kódolás modellje (Dehaene 1992). Ezt nem úgy gondoltuk megtenni, hogy kitalálunk néhány kérdést és a teszt máris kész, hanem figyelembe vesszük, hogy mit mondanak a geométerek. Az ez alapján készített tesztet kitöltetjük, majd megnézzük, hogy standard vagy az Usiskin-féle teszttel megegyező eloszlást kapunk-e, megfelelő-e az elvárásoknak, módosítjuk, ha kell, és ha kész, akkor még több emberrel kitöltetjük. Igaz, ez egy nagyon hosszú folyamat, de a mai modern kutatásmódszertan illetve pszichológia megkívánja. Mi ebben a dolgozatban csak néhány kérdést állítottunk össze. Amit át kell gondolni az az, hogy ezek az algebrai típusú, koordinátarendszeres feladatok kiknek valók, kik azok, akiknek kiadhatók. Szemmel látható, hogy az új NAT nem követi ezen kérdések szemléletét (3), ugyanis nincs egy éve, hogy a kör egyenlete már nem része a tantervnek. Bár távolságot kell számolni a Pitagorasz-tétel alapján a NAT szerint, a kör egyenlete még sem tananyag. Kérdés az, hogy ezekkel a tesztkérdésekkel tényleg geometriai megértési szinteket mérnünk-e, illetve azáltal, hogy nem követi a NAT-ot, a valóságtól elrugaszkodott-e vagy sem a tesztkezdemény. Azt gondoljuk, hogy ha egy országban kialakul egy követelményrendszer, az nem jelenti azt, hogy minden matematikai tartalom kellő formában és mértékben van felölelve. Ha megnézzük, hogy Németországban nem tanítanak számelméletet, viszont a deriválás a tananyag részét képezi, akkor észrevesszük, hogy az egyes országok nagyon különböző oktatási kultúrával rendelkezhetnek. Éppen ezért egyáltalán nem biztos, hogy mindenkinek ugyanaz a teszt való. Senki ne essen kétségbe, ha az ő diákjai nem írják meg jól akár ezt a tesztkezdeményt, akár az Usiskin-féle tesztet, mert nem kétségbevonhatatlan, hogy úgy kell tanítani a diákot, hogy egy Van Hiele teszten jól szerepeljen.

5.5 Javaslat tesztkérdésekre

Az alábbiakban a készülő tesztek pár lehetséges kérdésére közlünk példákat. A tesztkérdések között szerepelnek az algebrai összefüggéseket előtérbe hozó kérdések, valamint a „geometriaibb” szemléletet hangsúlyozó kérdések is.

Az alábbi kérdések mindegyike az $\mathbb{R}^3$ *euklideszi térre vonatkozik.*

1. Adott két egyenes. Melyik állítás igaz az alábbi állítások közül a helyzetükre?

(a) Mindig metszők.
(b) Mindig párhuzamosak.
(c) Mindig metszők vagy párhuzamosak.
(d) Nem mindig metszők vagy párhuzamosak.
(e) Vagy egy vagy nulla pontjuk közös.

2. A kocka lapjainak síkjai részekre osztják a teret. Melyik hamis az alábbi állítások közül?

(a) Nincs olyan térrész, ami tartalmaz egyenest.
(b) Van olyan térrész, ami nem tartalmaz félegyenest.
(c) Van olyan térrész, ami tartalmaz félegyenest.
(d) Nincs olyan egyenes, ami legalább öt térrészbe belemetsz.
(e) Egy kocka egy lapközéppontján átmenő egyenes legalább három térrészbe belemetsz.

3. Legyen $u \in \mathbb{R}$ *paraméter! Tekintsük az alábbi egyenletet:* $(a-u)^2 - b^2 = 5$.
Melyik állítás igaz az alábbiak közül?

(a) *Minden* $a \in \mathbb{R}$*-hez létezik olyan* $b \in \mathbb{R}$*, mely kielégíti az egyenletet.*
(b) *Van olyan* u *érték, amire a fenti egyenletnek nincs megoldása.*
(c) *Minden* u *értékre végtelen sok olyan* a, b *számpár létezik, mely kielégíti az egyenletet.*
(d) *Rögzített* $b \in \mathbb{R}$*-hez végtelen sok* $a \in \mathbb{R}$ *érték létezik, amely kielégíti az egyenletet.*
(e) *Minden* $b \in \mathbb{R}$*-hez egyértelműen létezik* $a \in \mathbb{R}$*, mely kielégíti az egyenletet.*

4. Legyen adott egy ABC *derékszögű háromszög, befogói:* $a, b \in \mathbb{Q}$*, átfogója* $c \in \mathbb{Q}$*, területe* T*. Az* ABC *háromszögből középpontos nagyítással kapjuk az* $A'B'C'$ *háromszöget (oldalai:* $a, b \in \mathbb{Q}$*, területe* T'*,* $m_c{}'$ *a* c'*-höz tartozó magasság). Mely állítás igaz az alábbiak közül?*

(a) $a', b' \in \mathbb{Q}$*, viszont* c' *nem mindig racionális.*
(b) $a', b', c' \in \mathbb{Q}$
(c) $T' \in \mathbb{Q}$
(d) $a', b' \in \mathbb{Q}$ *vagy* c' *és* $m_c{}' \in \mathbb{R}$.
(e) a' *és* c' *nem lehet egyszerre racionális.*

5. Adott az $x^2 + y^2 = 7$ *egyenlettel megadott pontok halmaza:* H*. Melyik állítás hamis az alábbiak közül?*

(a) H *tartalmaz egyenest.*
(b) H*-ba a tér minden egyenese belemetsz, melynek van olyan pontja, hogy* x, y *koordinátára* $x^2 + y^2 < 7$ *teljesül.*
(c) *Van olyan egyenes, melynek minden* x, y *koordinátájára igaz, hogy* $x^2 +$

$y^2 = 7$.

(d) A H halmaznak lehet pontosan egy közös pontja egy egyenessel.

6. $x^2 - 2x + y^2 - 2ay + z^2 + 6z = -10$ *ahol* $a \in \mathbb{R}$. *Mely állítás(ok) hamis(ak) az alábbiak közül?*

(a) Minden a *esetén van olyan* x, y, z *számhármas, amely kielégíti az egyenletet.*

(b) Van olyan a, *amire végtelen sok megoldása van az egyenletnek.*

(c) Van olyan a, *amire pontosan egy megoldása van az egyenletnek.*

(d) Minden z, a*-ra van olyan* x, y *számpár, mely kielégíti az egyenletet.*

7. *Tekintsük a következő egyenletrendszert:*

I. $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 6z = a$ *ahol* $a \in \mathbb{R}$ *és*

II. $x + y + z = 0$

Mely állítás(ok) igaz(ak) az alábbiak közül?

(a) Minden a*-ra van megoldása az egyenletrendszernek.*

(b) Minden x, y *számpár esetén van olyan* z, a, *mely kielégíti az egyenletrendszert.*

(c) Minden a *-ra végtelen sok megoldása van az egyenletrendszernek.*

(a) Nincs mindig megoldása az egyenletrendszernek, de ha van, akkor végtelen sok megoldása van.

6. Összefoglalás

Dolgozatunkban a magyarországi matematika-és matematikatanár szakos hallgatók geometriai megértési szintjét vizsgáltuk a Van Hiele modell segítségével. A Van Hiele-elmélet tekintélye széles körben elismert a nemzetközi szakirodalomban, hasonlóan a rá alapuló mérés, amely 1982-es megalkotása óta a mai napig gyakorta alkalmazott. Azonban a teszt magasabb, egyetemi szinten való alkalmazhatóságának vizsgálata nemzetközi színtéren is hiánypótló vállalkozás. Kutatásunk során az ELTE elsőéves matematika alapszakos valamint elsőéves matematika tanárszakos hallgatóival töltettük ki az Usiskin-féle tesztet.

A tesztet a kísérletben résztvevő minden diák két alkalommal töltötte ki, egyszer a tavaszi félév elején, egyszer pedig ugyanazon félév végén. A két kitöltés között mind az alap- mind a tanárszakos hallgatók elvégezték első egyetemi geometriakurzusukat, az alapszakosok Geometria1, a tanárszakosok Bevezetés a geometriába címen. Korábban már megállapítottuk, hogy a NAT és a kerettanterv követelményei alapján egyértelműen behatárolható, hogy a diákok a középiskola évei folyamán mely szintek eléréséig kellene eljussanak, megvizsgáltuk és megállapítottuk azt is, hogy a tanulók valós teljesítményei azonban lényegesen ezen szintek alatt vannak. Ezek alapján a középiskolába belépő elvárt szint a 3., a kilépő pedig a 4., így az volt a feltételezésünk, hogy a felmérésünkben résztvevő matematika területén továbbtanuló hallgatók már mind legalább a 4. szinten vannak, a geometriakurzus elvégzése után pedig akár az 5. szintet is elérhetik.

A tesztek eredményei alapján azonban a 4. szinten csak elhanyagolható számú hallgató állt, a legtöbben a 3. vagy az 5. szintet érték el. Saját eredményeink is alátámasztották az Usiskin által és a szakirodalomban azóta is többször megfogalmazott kétséget arra vonatkozóan, hogy a teszt kérdései valóban jól mérik-e az 5. szintet. Erre további bizonyítékként szolgál az a tény, hogy a hallgatók között sok olyan volt, aki a 4. szintet nem érte el, viszont az 5. szint kérdéseire jól tudta a választ; ez pedig a szintek alapvető tulajdonságának, az egymásra épülésnek is ellentmond. A geometriakurzus elvégzése után pedig azt tapasztaltuk, hogy általánosan érdemi fejlődés a szintek alapján nem történt a tanulók geometriai megértésében, ennek okaként pedig a Van Hiele elmélet kommunikációs részével egybehangzóan azt feltételezzük, hogy az oktató által feltételezett hallgatói megértési szint magasabb, mint a diákok valós eredményei, hiszen az ismert elméletek alapján a tanítási folyamat akkor lehet sikeres, vagyis akkor járulhat hozzá eredményesen a tanuló gondolkodási és problémamegoldó készségének fejlesztéséhez, ha az oktató a hallgatók valós megértési szintjének megfelelően alakítja kommunikációját. A Van Hiele elmélet részét képezi az a meggondolás is, hogy a különböző szinten lévő egyének „különböző nyelvet beszélnek", tehát nem értik meg, vagy nem fogadják el egy másik szinten lévő indoklásait. Ezáltal a feltételezett és a valós szintbeli különbségek kommunikációs akadályokhoz, majd a tanítási folyamat meghiúsításához vezethetnek.

Annak érdekében, hogy megállapíthassuk, valóban a NAT által elvárt 8.osztályos szinten van-e a matematika szakos hallgatók jelentős része, teszteltük a teszt eredményeit és a hallgatókkal interjúkat készítettünk. Megfigyelhettük, hogy minden olyan tanulós, aki nem teljesített mindkét alkalommal 5. szinten, valójában 3. szinten áll. Az interjúk eredményei alapján azt mondhatjuk, hogy a Van Hiele elmélet egyetemi szinten sem vezet ellenmondásra, az elmélet kommunikációs vetülete is igazolódni látszik az egyetemisták és az egyetemi oktatók körében is, azonban az Usiskin-féle teszt az 5. szinten megbukott, általánosan pedig felfelé torzít.

Bár kutatásunk alátámasztotta, hogy az elmélet egyetemi szinten sem vezet ellentmondásra, az továbbra sem bizonyított, hogy a teszt a teljes geometriát lefedné. Úgy gondoljuk, hogy felállíthatók másfajta megértési szintek is, amelyek nincsenek ellentmondásban a Van Hiele-elmélettel. Egy ilyen teszt készítésének első lépéseként megkezdtük feltérképezni, egyáltalán mit is értünk manapság geometrián. Első körben két geometria tanszékvezető és egy habilitált docens véleményét kértük ki arról, hogy mi igazán fontos geometria területén; a válaszaikban egyrészt az algebra és a geometria összekapcsolásának képességét, másrészt a viszonyítási rendszertől független geometriai tulajdonságok, összefüggések vizsgálatát emelték ki. Meggyőződésünk szerint ez két különböző irányzat, amelyek nem feltétlenül épülnek egymásra, ezáltal a megfontolásokból kiindulva két különböző teszt megalkotása is lehetséges. Célunk ezen szempontoknak megfelelő, valamint az Usiskin-féle teszt alapján, egy annak szellemiségével rokon térbeli teszt megalkotása. Tudjuk, hogy a kész tesztek elérése egy rendkívül hosszú folyamat, azonban elindulva az úton már megtettük az első lépéseket felé, valamint a dolgozatban szerepel néhány előzetes javaslatunk is a lehetséges tesztkérdésekre.

6.1 Önálló munkánk összefoglalása

Miután megválasztottuk jelen dolgozatunk témáját, (a Van Hiele modell tesztelése magyar diákok körében) mivel Magyarországon a Van Hiele teszt alkalmazására nemigen volt példa, korábbi TDK dolgozatunk (Bursics–Fehér–Muzsnay 2016) során megszereztük az eredeti Usiskin-féle teszt jogait, azt követően pedig a csapat aktívan részt vett a teszt magyarra fordításában, ezzel létrehoztuk tán az első magyar Van Hiele szintek mérésére szolgáló tesztet. Ezután leszűkítettük témánk és megfogalmaztuk a kutatási célt, – vagyis elsőként terveztük megállapítani a Van Hiele szinteket matematika szakos egyetemisták körében, valamint szintén hiánypótló módon a Van Hiele teszt tesztelése magasabb megértési szinteken volt célunk – majd megterveztük magát a kutatást.

Először, 2016 tavaszi félévének elején és végén 65 az ELTE matematika alapszakján hallgató diákkal kitöltettük a tesztet, majd 2018 tavaszi félévének elején és végén ezt megismételtük ű 51 tanárszakos hallgató körében is. A teszteket az alapszakos hallgatókkal papír alapon, míg a tanárszakosokkal az Edubase online rendszer segítségével töltettük ki. Értékeltük a válaszokat, ezek alapján megállapítottuk a diákok teszt szerinti Van Hiele szintjét. Ezután a kapott adatokat összevetettük és elemeztük, ezek alapján pedig megállapítottuk a teszt kritikus részét.

Miután értékeltük a teszt eredményeit, továbbra is fenntartottuk a kapcsolatot a kutatásban részt vevő hallgatókkal, a teszteken elért eredmények alapján kiválasztottuk az interjúk alanyait. Megfogalmaztuk az interjúkérdéseket, ezt követően pedig levezettük az interjúkat. A hallgatók válaszaiból megállapítottuk a hallgatók valós Van Hiele szintjét, és kiemeltük az interjúk lényegi mozzanatait. Összevetettük az interjúk eredményeit a teszt eredményeivel, és ez alapján már bizonyítottan ki tudtuk jelenteni, hogy a teszt nem méri jól az 5-ös szintet. Ennek orvoslására megfogalmazódott bennünk egy új teszt megalkotására való törekvés.

Megtettük az első lépéseket a teszt megalkotása felé, nagy szakmai tekintélyű geométereket kerestünk fel azzal a kérdéssel, hogy mi ma a geometria lényege. Mint ahogy a Van Hiele elmélet felállítása és Usiskin tesztjének megalkotása óta a világ is rengeteget változott, ugyanúgy mára a geometria lényege sem egyezik meg azzal, ami hatvan vagy harminc évvel ezelőtt volt, így az új teszt szakmai megalapozottságához valóban elengedhetetlen ez a kérdés. A geométerek javaslatain elindulva megkezdtük az új teszt tervezését, ezek alapján alkottunk meg pár lehetséges tesztfeladatot.

A dolgozat megírásáig kutatásunk eredményeit a következő helyeken ismertettük:

1. Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások Konferencia, Budapest, 2017.: A geometriai szemléletmód fejlődése. (Muzsnay Anna, Szabó Csaba)

2. Előadás tartása meghívott előadóként: Széchenyi István Egyetem Alkalmazott Matematika Tanszék, Győr, 2017.: A geometriai szemlélet fejlődése és nemfejlődése az egyetemen. (Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szabó Csaba, Szeibert Janka)

3. Előadás tartása meghívott előadóként: Pavlov Jozef Safárik University, Kassa, 2017.: Students understanding geometry on high-school and university levels. (Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szabó Csaba, Szeibert Janka)

7. Hivatkozások

Bruner, Jerome Seymour 1966. *Toward a Theory of Instruction*. Mass.: Belkapp Press. Cambridge.

Bruner, Jerome Seymour 1986. *Actual Minds, Possible Worlds.* MA: Harvard University Press. Cambridge.

Bruner, Jerome Seymour 1990. *Acts of Meaning.* MA: Harvard University Press. Cambridge.

Bursics Anna – Fehér Ágnes Csenge – Muzsnay Anna 2016. *Geometriai szemléletfejlődés a magyar középiskolákban.* TDK dolgozat

Chew, Cheng Meng 2009. Enhancing Students' Level of Geometric Thinking through Van Hiele's Phase-based Learning. *Indian Journal of Science and Technology*. U. Science Malaysia.

Chong, L. H. 2001. *Pembelajaran geometri menggunakan perisian GSP dak kaitannya dengan tahap pemikiran Van Hiele dalam geometri.* Unpublished master's thesis. Universiti Malaya. Kuala Lumpur.

Csányi Petra – Pozsonyi Enikő – Szabó Zsanett 2014. *A számelmélet oktatásának hatékonysága általános- és középiskolában.* TDK dolgozat

Dehaene, Stanislas 1992. Varieties of numerical abilities. *Cognition*,

Grigoriadou, Olga 2012. *Reasoning in geometry How first learning to appreciate the generality of arguments helps students come to grips with the notion of proof*. Msc Thesis. U. of Amsterdam

Győry Ákos: *Van Hiele levels of gifted Hungariam pupils* (manuscript)

Herendiné Kónya Eszter 2003. A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei. *Iskolakultúra*. Debreceni Egyetem

Jones, Keith 2002. Issues in the teaching and learning of geometry. In: Linda Haggarty (Ed), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics*. London, Routledge

Kospentaris, George – Spyrou Panayiotis 2008. Assessing the development of geometrical thinking from the visual towards the analytic-descriptive level. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*. Strasbourg.

Kovács Veronika – Palotay Dorka 2012. *Ez is hungaricum - A modern tudomány és az oktatás kapcsolata*. TDK dolgozat

N. Kollár Katalin – Szabó Éva 2004. *Pedagógia Pszichológusoknak*. Osiris Kiadó. Budapest.

Rafidah Mohd Nor 2003. *Mengenalpasti tahap pemahaman pelajar sekolah menengah mengenai konsep geometri berdasarkan kepada teori van Hiele.* Unpublished master's thesis, Universiti Kebangsaan Malaysia. Bangi.

Selkirk, C. H 2011. An investigation into the level of understanding of two-dimensional shapes among learners at the end of the Intermediate Phase in a well-resourced former Model school in the Eastern Cape: A case study, M. Ed., U. of Fort Hare.

Tay Bee Lian 2003. *A Van Hiele-based instruction and its impact on the geometry achievement on form one students*. Unpublished master's thesis. Universiti Malaya. Kuala Lumpur.

Usiskin, Zalman 1982. Van Hiele levels and achievment in secondary school geometry. *Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project* Department of Education. University of Chicago. US.

Vigotszkij, Lev Szemjonovics 1967. *Gondolkodás és beszéd*. Akadémiai Kiadó. Budapest

Wilson, Mark 1990. Measuring a van Hiele Geometry Sequence: A Reanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education*

Wang, Sasha 2011. *The van Hiele theory through the discursive lens: Prospective teachers' geometric discourses*. PhD dissertation. Michigan State University.

Zachos, I. 1994. *Problem Solving in Euclidean Geometry in Greek Schools,* PhD dissertation, The U. of Leeds School of Education.

(1) *Kerettanterv 5-8. osztály,* 2012.

http://kerettanterv.ofi.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html

(2) *Kerettanterv 9-12. osztály,* 2012.

http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html

(3) *Nemzeti alaptanterv*, 2018.

https://www.oktatas2030.hu/wp-content/uploads/2018/08/a-nemzeti-alaptanterv-tervezete_2018.08.31.pdf