EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

DR. SZABÓ CSABA – BURSICS ANNA –
EDŐCSÉNY ÁGNES CSENGE- MUZSNAY ANNA

GEOMETRIAI SZEMLÉLETFEJLŐDÉS A MAGYAR KÖZÉPISKOLÁKBAN

Módszertani tanulmány

Budapest, 2016

1. Tartalomjegyzék

2. Bevezetés

Dolgozatunkban a magyarországi közoktatásban tanuló diákok geometriai megértési szintjét vizsgáljuk. Ezt az 1950-es években kitalált és azóta tovább fejlesztett úgynevezett van Hiele szintek alapján tesszük [3]. A Nemzeti Alaptantervből [9] és a kerettantervből [6,7] kiderül, hogy melyik korosztály melyik szinten kell, hogy legyen. Ezt összevetjük azzal, hogy milyen szintet kíván meg az érettségi. A szintek mérésére létezik egy általánosan elfogadott teszt [11] amit kitöltettünk az ország számos középiskolájának minden évfolyamával. A tesztek eredménye alapján általános képet alkotunk a magyarországi középiskolások geometriai fejlettségi szintjéről.

3. A van Hiele elmélet

Dina van Hiele-Geldof és Pierre van Hiele az 50-es években dolgozták ki a geometria megértésének szintjeit [3]. Elméletük része egy átfogóbb elméletnek, miszerint a matematika (és minden tudomány) különböző területeinek vannak megértési szintjei. Ezek a megértési szintek egymásra épülnek és a tanítási folyamat célja ezen szintek egymás utáni elérése. A megértési szintek közül ők a geometria megértésének szintjeit dolgozták ki részletesebben. Az elmélet magába foglalja azt is, hogy a különböző szinten lévő emberek különböző nyelvet beszélnek és a különböző nyelvet beszélők nem értik meg egymást. Ezalatt azt értik, hogy az egyik szinten lévők nem fogadják el a másik szinten érvelők indoklásait. Vagy azért, mert fölsőbb szinten vannak, így a másik személy érvei számukra láthatóan hiányosak, vagy azért, mert egy alsóbb szinten például nem látják, hogy az adott állítás bármiféle indoklást igényelne. Erre mutatunk egy példát az összefoglaló fejezetben. A házaspár elmélete széles körűen elfogadottá vált, és ennek következtében sokan kezdték vizsgálni a geometriai fejlődés szintjeit. A 80-as években született meg a legismertebb teszt, amely ezeket a szinteket hivatott mérni [11]. Ezt a tesztet legalább negyven országban alkalmazták, például: az Egyesült Királyságban [13], az Amerikai Egyesült Államokban [12], Malajziában[1], Hollandiában [3], a Dél-afrikai Köztársaságban [10], stb... Magyarországon eddig csak általános iskolás tanulók vizsgálatára került sor [5]. Az Usiskin-féle teszt öt szintet mér, de a későbbi szakirodalom, és ahogy majd látható a mi vizsgálataink is azt mutatják, hogy a van Hiele házaspár öt szintjéből az első négy az, amelyek valóban tükrözik az elmélet törekvéseit. Mi dolgozatunkban azt vizsgáljuk, hogy ez az elmélet hogyan jelenik meg a magyarországi közoktatásban.

3.1. A szintek

1. szint, a ráismerés szintje: Rajzról, ábráról felismernek alakzatokat: kör, téglalap, négyzet, stb.. Ezeket az alakzatokat egy egységként látják. Az alakzatok részeit és tulajdonságait még nem ismerik fel. Egy négyzetre például nem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy parallelogramma. Nem nevezik meg az alakzat részeit, mint például csúcs, oldal, szög.

2. szint, a vizuális vizsgálódás szintje: A tanuló felismeri az alakzatok egyes részeit és az egyes részek viszonyát. Például egy négy derékszöggel rendelkező alakzatról meg tudják állapítani, hogy téglalap (akkor is, ha nincs szépen lerajzolva). Egy rombuszról tudják, hogy szemben lévő oldalai párhuzamosak, vagy egyenlő hosszúak, de ezeket a tulajdonságokat még nem kötik össze. Egy egyenlő oldalú négyszögről tudják hogy rombusz. A különböző alakzatok tulajdonságai közti összefüggéseket még nem látják. Egy négyzetre még most sem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy parallelogramma.

3. szint, a fogalmak rendszerezésének szintje: A tanuló az egyes tulajdonságokat már rendszerben látja. A tulajdonságok rendszerezése alapján következtetéseket tud levonni, és ebben a rendszerben fontos szerepe van az ok-okozatiságnak: például egy háromszögben két oldal egyenlőségéből következik két szög egyenlősége. Tudja és érti hogy minden négyzet téglalap, minden téglalap parallelogramma. Látja, hogy ha egy négyszög egyben téglalap és rombusz is, akkor az négyzet. A szakirodalomban tipikusan emlegetett példa a váltószögek felismerése és az azzal való érvelés. Más típusú matematikai érvelésekre viszont még nem képes. A geometriát még nem látja teljes ok-okozati összefüggésben.

4. szint, a formális következtetések szintje: Ez a szint egy általánosabb matematikai érettségi szint elérése a geometrián belül. Az általános matematikai szint alatt azt értjük, hogy már megkülönbözteti a definíciókat, tételeket, bizonyításokat. Az állításoknál felmerül a bizonyítás iránti igény, ezeket a bizonyításokat értik és maguk is el tudnak végezni egyszerűbb bizonyításokat. A geometrián belül a tanuló megérti az alapfogalmak és az axiómák meglétét, az utóbbiakat el tudja különíteni a tételektől. Például be tudja bizonyítani, hogy egy háromszögnek van beírt köre. Teljes axiomatikus bizonyításra nem feltétlenül képesek. Például egy négy derékszöggel rendelkező négyszögre rámondja, hogy a szemben lévő oldalak egyenlők, de nem érzi, hogy ezt még be kéne bizonyítani.

3.2. Kommunikáció

Ahogy már az elméletről szóló bevezetőben is említettük, az elmélet kimondja azt is, hogy a különböző szinten lévő emberek különböző geometriai nyelvet beszélnek, illetve hogy a különböző nyelven beszélők nem értik, nem érthetik meg egymást. Ez levetülhet a tanár-diák kommunikációra is, ha a tanár nem a tanuló megértési szintjén magyarázna. Ekkor ugyanis a diák nem értheti meg a tanár magyarázatát egy fogalomról vagy indoklását egy adott geometria feladathoz kapcsolódóan. Számos esetben előfordul, hogy a tanár valamely állítást, fogalmat nem magyaráz el részletesen, nem bizonyítja be [2]. Úgy gondolja, a diákok ezt már tudják, mivel korábban tanulták vagy maguktól is rá tudnak jönni. Feltételezi, hogy a diákokban meg van az igény és megfelelő tudás, hogy mélyebben megvizsgálják a tanultakat. A más nyelven történő kommunikálást az alábbi példán keresztül mutatjuk be.

Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak?

Erre például az alábbi válaszok érkezhetnek:

a) Az eredeti egyenessel párhuzamos és attól *d* távolságra lévő egyenesen.
b) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól *d* távolságra helyezkednek el.
c) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól *d* távolságra helyezkednek el. Az egyik egyenest úgy is meglehet adni, hogy a megadott egyenesnek kijelölöm egy *A* pontját, amelybe merőlegest állítok az egyenesre, majd felmérem rá a *d* távolságot. Végül az így kapott *P* pontban újabb merőlegest állítok az *AP* szakaszra.
d) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól *d* távolságra helyezkednek el. Az egyik egyenest elő lehet állítani úgy is, hogy a megadott egyenesnek kijelölöm két különböző *C* és *D* pontját, amelyekben merőlegest állítok a megadott egyenesre és felmérem rájuk a d távolságot. Az így kapott két ponton keresztül egyenest húzok.
e) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól *d* távolságra helyezkednek el. Az egyik egyenest úgy is meg lehet adni, hogy a megadott egyenesnek kijelölöm egy *A* pontját, amelybe merőlegest állítok az egyenesre, majd felmérem rá a *d* távolságot. Végül az így kapott *P* pontba újabb merőlegest állítok az *AP* szakaszra, jelöljük ezt az egyenest *f*-fel. Most megmutatom, hogy ebben a félsíkban ennek az egyenesnek minden pontja jó és más pont nem felel meg. Tekintsük ennek az *f* egyenesnek egy tetszőleges *Q* pontját és bocsássunk ebből merőlegest az *e*-

re. Az így kapott pont legyen *B*. Az *APQB* négyszög *A*-nál, *P*-nél, *Q*-nál lévő szöge derékszög, ezért a *B*-nél levő is derékszög. Tehát az *APQB* négyszög téglalap. Így szemben levő oldalai egyenlő hosszúak. Tehát $AP=BQ=d$. Már tudjuk, hogy *f* minden pontja jó, tehát *d* távolságra van *e*-től. Az egyenestől való távolság definícióját felhasználva megmutatom, hogy a félsík más pontjai nem jók. Állítsunk *e* egy tetszőleges pontjába merőlegest *e*-re, legyen a tetszőleges pont *X*, és a merőleges illetve *f* egyenes metszéspontja *Y*. Ekkor $XY=d$, ebből viszont következik, hogy ha a merőleges egy *Y*-tól különböző *Z* pontját vizsgálom, akkor *XZ* távolság nem lesz *d*.

f) Két egyenesen, melyek az eredeti, *e* egyenessel párhuzamosak és attól *d* távolságra helyezkednek el. Elegendő csak az egyik, az *e* egyenessel határolt félsíkra belátni. Legyen *A* az *e* egyenes egy tetszőleges pontja. Bocsássunk merőlegest *e*-re az *A* pontban. Erre a merőlegesre mérjünk föl *d* távolságot *A*-ból. Az így kapott pont legyen *P*. *P*-ben állítsunk merőlegest az *AP* egyenesre. Legyen ez az egyenes *f*. Megmutatjuk, hogy az *f* pontjai jók és más pontok nem felelnek meg. Először belátjuk, hogy *f* párhuzamos *e*-vel. Mivel *e* és *f* is szimmetrikus *AP*-re, *e* és *f* metszéspontjának képe az *AP* egyenesre is metszéspont lenne. Ekkor *e* és *f* egyeneseknek két metszéspontja lenne, ez pedig nem lehetséges. Legyen *Q* az *f* egy tetszőleges *P*-től különböző pontja és *Q* vetülete *e*-re legyen *B*. Tükrözzük az *e* és *f* egyeneseket az *AB* szakasz felezőmerőlegesére. Az *e* egyenes képe önmaga, mivel *A* képe *B* és *B* képe *A*. Legyen *f* képe *f'*, *P* képe *P'*. Ekkor *AP* szakasz képe *BP'* szakasz. És mivel a *BAP* és *ABQ* szögek derékszögek, ezért *P'* rajta van a *BQ* egyenesen és *BP'* hossza *d*. Az *f* és az *f'* egyenesek az *AB* felezőmerőlegesén metszik egymást. Mivel *f* párhuzamos volt *e*-vel, *f'* is párhuzamos *e*-vel. A párhuzamossági axióma miatt $f=f'$. Tehát *P'* eleme *f*-nek, azaz $P'=Q$, így a *PQ* szakasz hossza *d*. Ezzel beláttuk, hogy az *f* egyenes minden pontja *d* távolságra van *e*-től. A bizonyítás második fele ugyanúgy megy mint az előző esetben.

Egy ötödikes tanuló nagy valószínűséggel az a) és b) válaszok valamelyikét fogja adni, tehát a keletkező alakzatot már felismeri, de az indoklás szükségessége fel sem merül benne, hiszen nyilvánvaló, szemmel látható, hogy mi lesz az eredmény. Ez a kettes megértési szintről tanúskodik. A c) és d) válaszok a hármas szint megfelelői, hiszen itt már ok-okozati összefüggést is feltár a válaszadó azáltal, hogy az eredményhez vezető utat is részletezi.

Az e) lehetőség már a négyes szintről árulkodik, hiszen logikusan végigvezetett gondolatmenetet ismerhetünk meg. Ugyanakkor a matematikával mélyebben foglalkozókat ez a gondolatmenet sem elégíti ki, hiszen az indoklásnak egyszer csak vége szakad anélkül, hogy a mi esetünkben például az axiómákig eljutottunk volna.

Egy a b) választ adó tanulóban valószínűleg fel sem merül az igény, hogy olyan szintű indoklást fűzzön az eredményéhez, mint amit az f) lehetőség mutat be. „Látja", hogy a válasza helyes, és ez elég is neki, nem jut eszébe megvizsgálni, hogy más pontok nem lehetnek-e jók, vagy ezen pontok mindegyike valóban jó-e. Ha egy magasabb megértési szinten álló diáktársa az e) válaszlehetőséget fejti ki, azzal nem tud mit kezdeni, hiszen egy nyilvánvaló dolgot minek magyarázunk? A gond abból ered, hogy a „nyilvánvaló" fogalma a különböző megértési szinteken mást jelent.

A matematikai bizonyításokat, indoklásokat korábbi ismeretekig vezetjük vissza, vagyis valamilyen számunkra nyilvánvaló gondolatra építjük érvelésünket. Ezért két ember akkor tud együttműködni, a köztük zajló kommunikáció akkor lesz sikeres, ha a látható, nyilvánvaló dolgok számukra ugyanott vannak. Ha egy ötödikes gyereknek nyilvánvaló, hogy két párhuzamos egyenes minden pontja egyenlő távol van a másik egyenestől, akkor ez az ő számára nem igényel bizonyítást. A tanár tudja, hogy ezt a tanulótól el kell fogadnia és azt is tudja, hogy ez az állítás nem magától értetődő. Nem minden geometriában igaz, csak a párhuzamossági axióma teszi igazzá.

Amíg a tanár nem méri fel a diákok szintjét, és kommunikációját nem alakítja annak megfelelően, addig esély sincs arra, hogy a tanítási folyamat sikeres legyen a gondolkodás, problémamegoldó képesség fejlesztését tekintve, legfeljebb a tényanyag átadása valósulhat meg. Ha azonban sikerül feltérképeznie a gyerekek megértési szintjét, azonos kommunikációval apró lépésekben lehetőség van a fejlesztésre.

4. Közoktatás és a szintek

4.1. Nemzeti Alaptanterv

Kutatásunk keretében megvizsgáltuk a Nemzeti Alaptantervet, hogy lássuk, milyen fejlődést várhatunk el a közoktatásban résztvevő tanulóktól. Megállapítottuk, hogy a NAT olyan fejlődési folyamatot ír elő, mely egymásra épülő elemekből áll, s amelynek elemei lényegében egyértelműen megfeleltethetők a van Hiele szinteknek. A harmadik szint például a NAT-ban a következőképpen jelenik meg: hatodik osztályra elvárható a tárgyak összehasonlítása, azonosítása, osztályokba sorolása tulajdonságok szerint, a közös tulajdonságok felismerése. Nyolcadik osztályra a tanulónak már rendelkeznie kell a sík- és térbeli alakzatok csoportosításának képességével. A negyedik szinten az előírt fejlődés következő lépcsőfokaként a diákoktól elvárják a bizonyítási igényt illetve középiskolai tanulmányaik végére bizonyos bizonyítások megértését, egyszerűbb bizonyítások konstruálását.

A NAT-ban megfogalmazott célokat a kerettanterv tovább részletezi, így annak tartalmát is nagyítónk alá vettük. Megállapítottuk, hogy az általános iskola alsó tagozata számára előírt tanagyag, például a háromszög, négyzet és téglalap felismerése, ezek előállítása rajzolással szabadon vagy egy-két tulajdonság megadásával az első szinttel azonosítható. Az 5-6. osztályosoknak ismernie kell síkidomok, sokszögek (háromszögek, négyszögek) szemléletes fogalmát, azaz a kettes szinttel kell rendelkezniük, majd képesnek kell lenniük különböző alakzatokat tulajdonságok szerint csoportosítani, azaz elvárható, hogy eljussanak hatodik osztály végére a hármas szintre. Később, 7-8. osztály befejeztével már a diákok közelítenek a negyedik szinthez azzal, hogy képesnek kell lenniük tételek megfogalmazására megfigyelés alapján és rendelkezniük kell a bizonyítási igénnyel.

Összességében tehát elmondható, hogy az általános iskola alatt a harmadik, középiskola végére pedig a negyedik van Hiele szintre kellene eljutniuk a gyerekeknek a NAT előírásai szerint.

4.2. Érettségi

A magyar közoktatásban a tanulmányok az érettségi vizsgával zárulnak, ezért az erre való felkészülés minden iskolában központi szerepet kap. Gyakran mind a tanárok, mind a diákok szemében az érettségi vizsgán való jó szereplés az egyedüli cél a tanulók fejlesztése és önfejlesztése szempontjából. [2,8]

A középszintű matematika érettségi két részből áll: az egyik rész 12 feladatot tartalmaz, amelyek megoldásaként a diákoknak csak a végeredményt kell feltüntetni 45 perc alatt. A második részben 6 darab több feladatrészből álló hosszabb kérdés közül az érettségiző tanulóknak 5-t kell megoldaniuk 135 perc alatt, ahol a végeredményhez vezető út lépéseit is fel kell tüntetni. Az elmúlt 8 érettségi időszak feladatsorait megvizsgálva megállapítottuk, hogy az első részben szereplő feladatok 14,55%-a, a második részben található kérdések 29,13%-a geometria feladat. Megvizsgáltuk, hogy az érettségi elvárásai összhangban vannak-e a NAT által megfogalmazott célokkal. A kerettanterv és az érettségiben szereplő geometria feladatok mennyisége alapján azt feltételeztük, hogy az érettségi négyes szintet vár el. Ezzel szemben azt állapítottuk meg, hogy a középszintű érettségi, melyet a középiskolás tanulók körülbelül 95% tesz le, legfeljebb hármas szintet követel meg. Erre mutatunk, most néhány példát. A 2016-os tavaszi érettségi második részében található az alábbi geometria feladat:

a) Az ABC háromszög két csúcsa A (–3; –1) és B (3; 7), súlypontja az origó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit!

c) Adott az A (–3; –1) és a B (3; 7) pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz!

Ebben a feladatban a megértési szintek közül a hármasra van szükség, így persze az elsőre és a másodikra is a szintek egymásra épülése miatt, hiszen a megoldáshoz fogalmak, definíciók, tulajdonságok ismeretére van szükség, valamint alakzatok közti összefüggések felfedezésére. A hármas szinthez tartozik az alábbi következtetés: abból, hogy egy adott szakasz derékszögben látszik a keresett pontból, következtetni kell arra, hogy a szakaszra, mint átmérőre írt Thalész-körön található a pont.

Egy másik feladata 2014 őszéről:

Egy biliárdasztal játékterülete téglalap alakú, mérete 194 cm × 97 cm. A játékterület középpontja felett 85 cm-rel egy olyan (pontszerűnek tekinthető) lámpa van, amely fénykúpjának a nyílásszöge 100°.

c) Számítással állapítsa meg, hogy a lámpa megvilágítja-e a játékterület minden pontját! (11 pont, ábrával szemléltetve)

Ennek a feladatnak a megoldásakor több nehézség is adódhat. Először is a szövegértés kapcsán: vajon hogyan kell érteni a pontszerű lámpa fénykúpját? Ez valószínűleg nem triviális minden végzős diák számára, bár az ábra segíthet az értelmezésben.

A feladat megoldásakor először is fel kell ismerni, hogy a kérdés egy sík és egy kúp metszetére vonatkozik. Innentől lényegében csak szögfüggvényeket kell használni, ami szerencsés esetben rutinfeladat, szemléletet nem igényel. Ezek alapján ez a feladat egy második van Hiele szinten álló diák számára teljesíthető, amennyiben rendelkezik a megfelelő algebrai háttérrel.

Gyakran találkozunk az érettségi vizsgákban az alábbi típusfeladatként visszatérő feladattal. Mi a 2013-as tavaszi változatot ismertetjük:

A vízszintessel 6,5°-ot bezáró egyenes út végpontja 124 méterrel magasabban van, mint a kiindulópontja. Hány méter hosszú az út? Válaszát indokolja! (3 pont)

Ennek a feladatnak a megoldásához bőven elég az egyes, vagy legfeljebb a kettes szint.

Összefoglalva tehát azt tapasztaltuk, hogy a középszintű érettségi elvárásai nincsenek összhangban a NAT elvárásaival. Az elméleti, előírt elvárások és a valóságos elvárások között nagy szakadék tátong.

5. A teszt

Kutatásunk következő lépéseként a magyar középiskolások geometriai szemléletfejlődését vizsgáltuk, amelyhez az Usiskin-féle tesztet használtuk. A teszt az öt van Hiele szintet méri, 25 feladattal, melyek közül mindegyik szinthez 5-5 feladat tartozik. Az első szintet mérő feladatok között szerepel az alábbi feladat is:

Melyik négyzet?

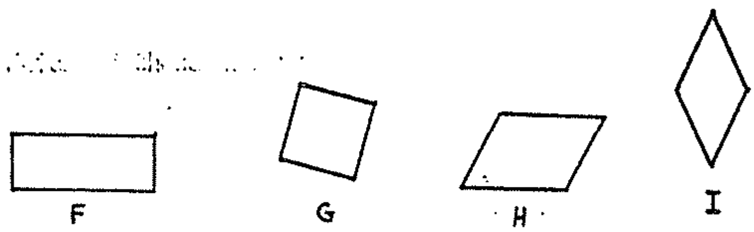
a. Egyik sem.

b. Csak G.

c. Csak F és G.

d. Csak G és I.

e. Mind az.

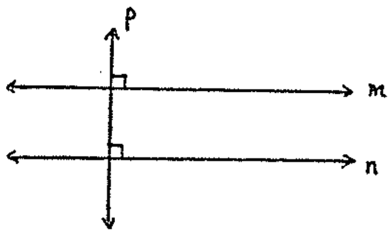


A negyedik szintet vizsgáló kérdésekre pedig a következő feladat szolgál példaként:

Tekintsük a következő síkban megfogalmazott állításokat:

- *i. Két, ugyanarra az egyenesre merőleges egyenes párhuzamos.*
- *ii. Egy egyenes, amelyik merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, merőleges a másikára is.*
- *iii. Ha egy egyenes minden pontja egyenlő távolságra van egy másik egyenestől, akkor a két egyenes párhuzamos.*

Az alábbi ábrán az m és a p egyenesek merőlegesek egymásra, az n és a p egyenesek is merőlegesek egymásra.



A fenti állítások közül melyikből következhet, hogy m és n párhuzamosak?

a. Csak i-ből.
b. Csak ii-ből.
c. Csak iii-ből.
d. i-ből vagy ii-ből.
e. ii-ből vagy iii-ből.

6. Értékelés

Vizsgálatunk során az első négy szint eredményeire fókuszáltunk. A feladatsor online formátumban és nyomtatott formában is elérhető, megoldására 35 perc áll rendelkezésre. Az általunk felmért tanulók egy része online felületen, egy másik része pedig nyomtatott formában tanórai keretek között töltötte ki a tesztet.

Az adatok nem csak a mi általunk végzett mérések eredményeit, hanem Győry Ákos [4] Debreceni Egyetemen doktorandusz miskolci középiskolai tanár kutatásának eredményeit is tartalmazzák.

A felmért középiskolák között szerepel egy budapesti és három miskolci gimnázium, valamint egy zenei szakközépiskola. Ezek mellett az ELTE matematika alapképzésében tanuló első éves hallgatók is kitöltötték a tesztet.

Normál tantervű középiskolában tanuló diákok közül összesen 294 gyerek segítette munkánkat a teszt kitöltésével, 109 kilencedikes, 105 tizedikes, 20 tizenegyedikes illetve 60 végzős. Ezen diákok közül voltak, akik általános tantervű oktatásban részesültek, olyanok, akik nyelvi előkészítő osztályba jártak, illetve olyanok is, akik az Arany János Tehetséggondozó Programban vettek részt.

A hatvankét általunk felmért zenei konzervatóriumban tanuló diák közül 18 kilencedikes-, 17 tizedikes-, 15 tizenegyedikes-, 12 tizenkettedikesként vett részt a felmérésben.

A speciális matematika tagozaton tanuló diákok körében végzett mérést 149 gyerek közreműködésével végeztük, akik közül 54 kilencedikes, 63 tizedikes illetve 32 tizenegyedikes volt. Az ő eredményeiket Győry Ákos [4] elemezte.

Az ELTE elsőéves matematika szakos hallgatói összesen 65-en töltötték ki a tesztet. 11 hallgatóval esettanulmányt is végeztünk. A kurzus végén megkértük, hogy online töltsék ki újra a tesztet, hogy megállapíthassuk, mennyit fejlődtek a félév során, de ezt a 65 hallgatóból csak 12-en töltötték ki.

Összesen tehát 570 tanulóval töltettük ki a tesztet, akik a középiskolás korosztály teljes spektrumát lefedték.

A NAT előírásai alapján a középiskolás diákok osztályonkénti eredményeinek lineáris fejlődését vártuk, mely során az elméletileg harmadik szinten álló kilencedikeseknek a tizenkettedik osztályra a negyedik szintre kell eljutniuk. A matematikushallgatók megértési szintjéről egyértelműen a legmagasabb, négyes szintet feltételeztük.

A gimnáziumok eredményeit az alábbi táblázat foglalja össze. A gimnáziumokat itt nem nevezzük meg, hanem A, B, C, D betűkkel jelöljük.

1. táblázat: Gimnáziumi eredmények

Osztály	A	B	C	D	Átlag	Fő
9.	2,29	2,10	2,09	2,46	2,22	109
10.	1,82	2,16	2,21	1,86	2,08	105
11.	3,43	-	2,50	-	2,60	20
12.	2,43	2,67	2,89	1,00	2,19	60

Ezekből az eredményekből három dolog egyértelműen kiolvasható. Egyrészt az, hogy a gimnáziumba bekerülő diákok által elért eredmények átlaga a teszten 2,22 az elvárt 3 helyett. Ez lényegében iskolától független, hiszen az átlagok mindegyik iskolában 2,09 és 2,46 között mozognak. Másrészt, hogy a végzős diákok sem érik el a tőlük elvárható szintet. Harmadik megállapításként pedig kimondhatjuk, hogy a gimnáziumi évek alatt a geometriai megértési szintek átlaga nem fejlődik, hiszen a kilencedik osztályos tanulók átlaga lényegében megegyezik a végzős diákokéval.

Az egyetlen pozitív irányba kiugró érték az az „A" gimnázium tizenegyedik osztályosainak 3,43-as átlaga, mely lényegében megfelel a NAT által előírt tizenegyedikes szintnek. Megörültünk ennek az eredménynek és azt gondoltuk hogy ezt az eredményt egy erős matematika fakultációs csoport érte el. Kérdésünkre azonban a tanárnő elmondta, hogy a csoport valóban fakultációra jár, de biológiából. A csoport összesen hét fős, így a tanárnőnek volt elég ideje a tananyagot a NAT elvárásainak megfelelően megtanítani.

A tesztek alapján tehát arra következtethetünk, hogy a hagyományos gimnáziumokban a gyerekek geometriai fejlettségi szintje nem a NAT elvárásainak megfelelően alakul. Látható, hogy ez az átlag alig-alig változik évfolyamonként és a gimnáziumból kikerülők átlaga is csupán 2,19, tehát az elméleti bemeneti szintet sem éri el a gyakorlati kimenet. Nagy átlagban az tapasztalható, hogy a középiskolában nem fejlődik a diákok geometriai megértési szintje.

A gimnáziumi eredményektől elkülönítve értékeltük a zenei konzervatórium eredményeit a kiugróan alacsony értékek miatt. A 2. táblázat adatait vizsgálva megállapítható, hogy ebben az intézményben sincs fejlődés, sőt a gyerekek az általános iskola alsó tagozatában elvárható második szintet sem érik el.

2. táblázat: Zenei szakközépiskola eredményei

Osztály	Átlag	Fő
9.	1,17	18
10.	1,59	17
11.	1,13	15
12.	1,17	12

A BSC-sek közül heten teljesítettek a hármas szint alatt, a középiskola bemeneti szintjét sem érve el. Ez a vizsgált hallgatók 10%-a. A többi hallgató eredménye két részre osztható: 31-en a álltak a hármas szinten, és csupán 27-en a negyedik szinten. Ez annál is megdöbbentőbb, minthogy ezek a hallgatók már elvégeztek fél évet az ELTE matematika szakán. Érdekes megfigyelni, hogy pontosan az elit gimnáziumból érkező hallgatók érték el a négyes szintet.

7. Összegzés

Dolgozatunkban a magyarországi középiskolások geometriai megértési szintjeit vizsgáltuk. Az Usiskin-féle tesztek alapján megállapítható, hogy a középiskolában a diákok geometriai megértési szintje nem a NAT elvárásainak megfelelően alakul. A NAT az általános iskola végeztével a harmadik, a középiskola végeztével a negyedik szintet várja el. A mérések alapján megállapítottuk, hogy a kilencedikesek és a tizenkettedikesek is a kettes és a hármas szint között vannak. Ezek szerint már a középiskolába kerülő gyerekek sem állnak a tőlük elvárt szinten, és ebből a lemaradott helyzetből a következő négy év tanulmányai sem tudják őket kiemelni.

Elgondolkodtunk azon, hogy mi lehet ezen nem túl fényes eredmények hátterében. Két okot vizsgáltunk meg részletesebben. Az egyik ok az érettségi követelmény, a másik pedig az esetleges nem megfelelő kommunikáció tanár és diák között.

A legtöbb középiskolában a tanárok szinte kizárólag az érettségire készítik fel a tanulókat. [2,8] Az érettségin való jó szereplés szinte egyedüli célként jelenik meg, hiszen a tanárok, a diákok és az iskolák minősítése során is az érettségin nyújtott jó teljesítmény az egyik legfontosabb szempont. Az érettségi viszont, ahogyan azt korábban megállapítottuk, nem követel meg harmadiknál magasabb megértési szintet. Ez a tény csökkentheti, és gyakran csökkenti is a tanárok motivációját a NAT szerinti oktatásra, ami a tananyag mennyisége miatt érthető is. Ha a számonkérésben nem a problémamegoldás, hanem a rutinfeladatok elvégzése kap hangsúlyt, természetes, hogy az oktatásban is ez kap nagyobb szerepet. Összefoglalva, a középszintű érettségi elvárásai nincsenek összhangban a NAT elvárásaival. Az elméleti, előírt elvárások és a valóságos elvárások között nagy szakadék tátong.

A másik ok, amelyet kiemelünk, a tanár és a tanítvány közti esetleges nem megfelelő kommunikáció. Ahogy az elmélet is kimondja és a példán is szemléltettük, ha nem megfelelő nyelven közelítjük meg a tanulókat, akkor esély sincs arra, hogy magasabb megértési szintre juttassuk el őket. Beigazolódott az elméletnek az a tétele, hogy az egyetlen járható út az, hogy a diákok megértési szintjét megismerve az adott szintről kezdjük el vagy folytassuk a tanítási folyamatot. Így lesz lehetőségük „felvenni a fonalat”. Amíg a tanár nem méri fel a diákok szintjét, és kommunikációját nem alakítja annak megfelelően, addig esély sincs arra, hogy a tanítási folyamat sikeres legyen a gondolkodás, problémamegoldó képesség fejlesztését tekintve, legfeljebb a tényanyag átadása valósulhat meg. Ha azonban sikerül feltérképeznie a gyerekek megértési szintjét, azonos kommunikációval apró lépésekben lehetőség van a fejlesztésre.

8. Hivatkozások

[1] Chew, C. M.: Enhancing Students' Level of Geometric Thinking through Van Hiele's Phase-based Learning, *Indian Journal of Science and Technology,* U. Science Malaysia, 2009.

[2] Csányi, P. – Pozsonyi, E. – Szabó, Zs.: A számelmélet oktatásának hatékonysága általános- és középiskolában. *TDK dolgozat*, 2014.

[3] Grigoriadou, O.: Reasoning in geometry How first learning to appreciate the generality of arguments helps students come to grips with the notion of proof, *Msc Thesis*, U. of Amsterdam, 2012.

[4] Győry, Á.: Van Hiele levels of gifted Hungariam pupils (manuscript)

[5] Herendiné Kónya, E.: A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei, *Iskolakultúra*, Debreceni Egyetem, 2003.

[6] *Kerettanterv 5 8. osztály,*2012.

http://kerettanterv.ofi.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html

[7] *Kerettanterv 9-12. osztály,* 2012.

http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html

[8] Kovács, V. – Palotay, D.: Ez is hungaricum - A modern tudomány és az oktatás kapcsolata. *TDK dolgozat*, 2012.

[9] *Nemzeti alaptanterv*, 2012.

http://ofi.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf

[10] Selkirk, C. H.: An investigation into the level of understanding of two-dimensional shapes among learners at the end of the Intermediate Phase in a well-resourced former Model C school in the Eastern Cape: A case study, *M. Ed*., U. of Fort Hare, 2011.

[11] Usiskin, Z.: Van Hiele levels and achievment in secondary school geometry, Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project Department of Education, University of Chicago, US., 1982.

[12] Wang, S.:The van Hiele thoery through the discursive lens: Prospective teachers' geometric discourses, *PhD dissertation*, Michigan State University, 2011.

[13] Zachos, I.: Problem Solving in Euclidean Geometry in Greek Schools, *PhD dissertation*, The U. of Leeds School of Education, 1994.