

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

BUDA VIRÁG – PRINS REBECCA

**A KIFEJTŐS ÉS A FELELETVÁLASZTÓS
TESZTELÉS HATÁSÁNAK VIZSGÁLATA EGY
EGYETEMI MATEMATIKA KURZUSON**

Témavezetők:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

Szeibert Janka

tudományos munkatárs

HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

EDUTUS Egyetem

TARTALOMJEGYZÉK

ABSZTRAKT	3
1. ELMÉLETI HÁTTÉR.....	4
2. A KÍSÉRLET FELÉPÍTÉSE.....	9
2.1 Előzmények	9
2.2 Felépítés	10
2.3 Hipotézisek.....	11
3. EREDMÉNYEK.....	12
4. DISZKUSSZIÓ.....	14
5. KUTATÁSBAN VÉGZETT SAJÁT MUNKA	17
HIVATKOZÁSOK	18
MELLÉKLETEK	21

ABSZTRAKT

Kísérletünkben azt vizsgáltuk, hogy egy gép által javítható, feleletválasztós tesztelés hatékonysága hogyan viszonyul a hagyományos, kifejtős tesztelés hatékonyságához az egyetemi matematika oktatásban. Ezt valódi, elsőéves matematikatanár szakos hallgatók között vizsgáltuk. Az évfolyamot véletlenszerűen négy gyakorlati csoportra osztottuk. Közülük kettő otthon tesztelt, míg a másik kettő a gyakorlat utolsó 10 percében. Minden gyakorlati csoportban a hallgatók egyik fele kifejtős, a másik fele feleletválasztós tesztet írt. A félév során minden hallgatót végig ugyanazzal a tesztelési formával teszteltünk. A csoportok ugyanazt a tananyagot tanulták és ugyanazokat a zárthelyi dolgozatokat írták meg. A dolgozatok feladatai hagyományos, kifejtős feladatok voltak. Ezeken a dolgozatokon, a várt eredménnyel ellentétben, a „bentíró” kifejtős csoport ugyanúgy teljesített, mint a feleletválasztós csoportok. A hazavívós kifejtős csoport szignifikánsabb gyengébb eredményt ért el, mint a „bentíró” kifejtős csoport az első zárthelyi dolgozatban. A második zárthelyi dolgozatban nem volt kimutatható különbség semelyik két csoport között. Eredményünk azt mutatja, hogy rövid-, és középtávon egyforma tesztelési tudást mutatnak a különböző csoportok. Ezek alapján az időigényes, tanári befektetett munkát felválthatja az online tanulást segítő felületek munkája.

Kutatásainkat az MTA-ELTE Matematika Tanuláselméleti- és Pszichológiai Kutatócsoport tagjaiként végeztük az ELTE DOKK támogatásával az „Az előhívásos tanulás módszertana” alprojekt keretében.

1. ELMÉLETI HÁTTÉR

A 20. század eleje óta számos tanulmány készült a tanulásról és a memóriáról. A kutatók vizsgálták a tanulást és a memóriát a kognitív idegtudományok (Keresztes és mtsai., 2014) a pszichológia (Roediger. és Karpicke, 2006), a társadalomtudományok (Nuthall, 2000), a neveléstudomány (Larsen és mtsai., 2013), a tanulásmódszertan (Muzsnay és mtsai., 2024) tudományterületek mindegyikén. A tanulmányok többsége egyetért abban, hogy a memória három fő funkcióra bontható, a kódolásra, a tárolásra és az előhívásra. A memóriába való rögzítés folyamatát kódolásnak nevezzük, és tárolás alatt a rögzítettek „fejben tartását”, memóriába való beépülését értjük. Előhívásnak azt nevezzük, amikor a tároltakat felidézzük és valamilyen formában felhasználjuk.

A memória három fő funkciója iskolai környezetben a tanulási-tanítási folyamatában jelenik meg. Bár a teszteléses tanulás egyre elterjedtebb, az a tapasztalatunk, hogy az iskolákban még mindig az információ bevitelét a memóriába (kódolás) és annak megfelelő elraktározását (tárolás) tartják tanulásnak. Az előhívási funkció szerepe ebben az értelmezésben csak a tanulási folyamat eredményességének felmérése. Ilyenkor ellenőrizzük le, hogy a diákok milyen mértékben raktározták el az információkat. Tehát az előhívásra kizárólag felelés vagy dolgozat formájában kerül sor, általában a tanulási folyamat végén. Látható, hogy ebben az értelmezésben a tanulási folyamatnak nem része az előhívás. Sok szaktanár gondolja úgy, hogy a számonkérések szükségtelenek, egyetlen funkciójuk az osztályzat megállapítása. Értékes időt vesznek el a tanórákból, felesleges stresszforrást jelentenek a diákoknak, és jelentősen megnövelik a tanári munkát további adminisztrációs terhekkel.

Több mint száz évvel ezelőtt jelentek már meg a fenti értelmezéssel ellentétes tanulmányok miszerint az előhívás egy hatékony formája lehet a tanulási folyamatnak (Abbot, 1909, Gates, 1917). Azért, hogy a továbbiakban pontosabban beszéljünk róla, fontos definiálni azt a tanulási módszert, amikor az előhívási funkciónak kiemelt szerepet adunk: teszteléses- vagy előhívásos tanulásnak hívjuk a tanulásnak azt a formáját, amikor az elsajátítandó információ újraolvasása vagy újratanulása helyett azt aktívan előhívjuk a memóriából (angolul test-enhanced learning, retrieval-enhanced learning). A teszteléses megnevezés kicsit megtévesztő, mert tesztelés közben valóban előhívjuk az anyagot, de nem csak teszteléssel lehet előhívni. A hangsúly ugyanis nem a tesztek megírásán van, hanem az elsajátítandó tananyagok előhívásán, hozzáférést biztosító módon történő rögzítésén. Ez a magyarázat azt is mutatja, a sikeresen eltárolt információk előhívását gyakorolni kell, mert az, hogy egy diákunk sikeresen tárol egy tananyagrészt nem egyenlő azzal, hogy önállóan elő tudja hívni azt.

A teszteléses tanulás alapkövének Roediger és Karpicke (2006) cikkét tartjuk. Egyetemi hallgatókkal végzett alapkísérletükben szövegmemorizálási képességet vizsgálták teszteléses tanulás alkalmazásával laboratóriumi környezetben. A kísérletben résztvevő hallgatókat kísérleti és kontroll csoportra bontották. Első körben mindkét csoport feladata egy szöveg elolvasása volt. Ezután a kontroll csoport még háromszor újraolvasta a szöveget, míg a kísérleti csoportot a kezdeti olvasást követően háromszor tesztelték a szöveg tartalmából. Így a kísérleti csoport háromszor hívta elő az olvasott szöveg tartalmát. A tanulási folyamat végeztével a két csoport tanulási eredményességét több különböző időpontban megvizsgálták. Először öt perccel az utolsó tanulási fázis után. Az azonnali tesztelésnél az eredmény igazolta a kutatók sejtéseit, miszerint a kontrollcsoport jobban teljesít, mint a kísérleti csoport. A kontrollcsoport a megtanult szöveg tartalmának 83%-ára, míg a kísérleti csoport a 71%-ára emlékezett. Egy héttel későbbi visszakérdezés során meglepő eredmények születtek. A kontrollcsoport a tanult szöveg csupán 40%-ára emlékezett, míg a kísérleti csoport a 61%-ára. Jól látszik, hogy a kísérleti (teszteléssel tanuló) csoport többre emlékszik a tanult szövegből. Ez annak köszönhető, hogy a felejtés mértéke a kísérleti csoportnál szignifikánsan kisebb (14%), mint a kontrollcsoportnál (52%).

A neuropszichológia területén is születtek eredmények az előhívási hatással kapcsolatban. Keresztes és munkatársai (2014) kísérletében például német diákoknak kellett szuahéli szavakat megtanulniuk. A résztvevőknek először 60 szuahéli-német szópárt kellett elsajátítani. Ezt követően 30 szópárt újraolvastak, míg a másik 30 szópár esetén a szuahéli szó bemutatása után kellett felidézniük a szó német megfelelőjét. A kísérlet végén a résztvevők feladata az volt, hogy a tanult 60 szuahéli szó német megfelelőjét felidézzék. A résztvevők agyi aktivitását a folyamat egésze alatt vizsgálták. Az eredményekből kiderült, hogy azoknak a szavaknak a felidézése, amit újraolvasással sajátítottak el a diákok, nagyobb agyi aktivitást váltott ki közvetlenül a tanulás után, mint egy héttel később. Ezzel szemben a felidézéssel tanult szavak esetén kimutatták, hogy bár a kezdetleges agyi aktivitás kisebb, mint az újraolvasással tanult szavaknál, ez az aktivitás egy héttel később sem csökkent. Ezek alapján arra következtettek a kutatók, hogy a teszteléses tanulás alkalmazása megállítja az agyi aktivitás csökkenését. Ezt több szövegtanulási kísérletben is kimutatták (Zaromb és Roediger, 2010), és azt állapították meg, hogy az információ előhívása a memóriából, azaz az előhívásos vagy teszteléses tanulás hatékonyabb a tanultak hosszú távú tárolásában egy kezdeti tanulási fázis után, mint az újraolvasással való tanulás.

Képalkotó eljárásokkal, fMRI-vel kimutatták, hogy az előhívás kémiai nyomot hagy az agyban és így segíti az információ hosszútávú memóriában való rögzülését (Marin-Garcia, Mattfeld és Gabrieli, 2021)

Az előhívásos tanulás hatékonyságát összehasonlították más tanulási technikák hatékonyságával. Kimutatták, hogy az előhívásos módon tanulók jobb eredményeket érnek el, mint azok, akik „önmaguknak magyarázzák el” az anyagot (Larsen és mtsai., 2013) és eredményesebbek azoknál is, akik gondolattérképek segítségével tanulnak (Karpicke és J. R. Blunt, 2011). Az eddigi kutatások és azok eredményei alapján tehát az előhívásos tanulás a leghatékonyabb tanulási technika a szövegtanulások, memorizációs helyzetekben (Zaromb és Roediger, 2010). Az előhívási hatás kimutatható a kulcsszavak segítségével való tanuláshoz (Rawson és Pyc, 2010), tankönyvi szövegeknél (Roediger és Karpicke, 2006; Butler, 2010), térképeken való tájékozódáshoz (Carpenter és mtsai., 2007) és orvostanhallgatóknál, újraélesztési technikák tanulásánál és gyakorlásánál (Kromann, Jensen, Ringsted, 2009)

Felmerült további kérdésként, hogy a tesztelés hatékony-e különböző típusú tesztek esetén. Kimutatták, hogy mind a rövid kifejtős kérdésekkel, mind a feleltválasztós tesztekkel való tanulás egyaránt hatékonyabb az újraolvasásnál (Kang, McDermott és Roediger, 2007). Kísérletükben megállapították, hogy a rövid kifejtős kérdésekkel, vagy feleltválasztós tesztekkel való előhívás hatékony, és az előhívás hatása függ attól, hogy a tanulók kapnak-e visszajelzést megoldásuk helyességéről. Kang és munkatársai (2007) eredménye szerint a két előhívási forma közül, ha van visszajelzés, bár nem szignifikánsan, de a rövid kifejtős kérdésekkel való előhívás a hatékonyabb, azonban, ha nincs visszajelzés, akkor a feleltválasztós előhívás a hatékonyabb.

További kérdés volt, hogy mekkora lehet az előhívás hatása, olyan témakörök esetén, ahol nem csupán a tananyag memorizálásra van szükség, hanem annak felhasználására is. Ehhez kapcsolódóan megállapították, hogy a teszteléssel megszerzett tudás nem csak az adott témakörben használhatóbb, mint az ismétléssel megszerzett tudás, hanem más területre is könnyebben átvihető (Butler, 2010; van Eersel és mtsai., 2016). A mai napig folynak hasonló kísérletek a matematika területén (Bereczky-Zámbó, Muzsnay, Szeibert 2017 & 2019; Muzsnay, Szabó, Szeibert 2024). A matematikafeladatok megoldásához fejlett deduktív gondolkodási és problémamegoldási képesség szükséges, maguk a feladatok pedig sokszor összetettek. A feladatok gyakran tartalmaznak egymásra épülő elemeket, a fogalmak átlátásán felül azok alkalmazására is szükség van, míg a deduktív gondolkodás során egy sor logikai láncot vezet az út a feladat teljes vagy részmegoldásáig. A matematikai problémamegoldó

készségek fejlesztése az eljárások alkalmazását és mély fogalmi megértést, nem pedig csak memorizálást igényel. Bár ezek alapján a matematikai problémamegoldás vizsgálata nehezebb, a legújabb tanulmányok szerint az előhívásos tanulás alkalmazása hatékony eszköz lehet a matematikatanulásban (Bereczky-Zámbó, Muzsnay, Szeibert 2017 és 2019; Fazio 2019; Lyle és Crawford, 2011; Lyle és mtsai., 2016; Lyle és mtsai., 2020; Muzsnay, Szabó, Szeibert 2024). A valós iskolai környezetben végzett tesztelés matematikai problémamegoldásra gyakorolt hatásával kapcsolatos vizsgálatok száma még mindig kicsi (May, 2021). Felsorolunk néhányat azok közül az eredmények közül, amelyek jelen tanulmányunk szempontjából a legfontosabbak.

Avvisati és Borgonovi (2020) egyetlen tesztelés hatását vizsgálták a matematikai problémamegoldásban. Bár nagy mintájú kísérletük nem tekinthető valódi oktatási környezetben végzett kísérletnek, számunkra mégis releváns, mivel oktatási anyagot használ. Megmutatták, hogy a második tesztben elért átlagos matematikai teljesítményt kismértékben, pozitívan befolyásolják az első tesztben szereplő matematikai feladatok.

Egy másik tanulmányban May (2021) másodéves matematikatanár-jelöltek körében vizsgálta, az időben elosztott, ismétlődő előhívások hatását a hallgatók tudására és érvelési képességére. Eredménye alapján az előhívás pozitívan hatott a begyakorolt algoritmusokat használó feladatoknál, ahol a feladat megoldásához csupán procedurális tudásra volt szükség. Az ismételt előhívás hatása nem volt kimutatható a több ötletet és konceptuális gondolkodást igénylő feladatok esetén.

Yeo és Fazio (2019) azt vizsgálták, hogy van-e különbség az előhívásos tanulás és a mintamegoldásokkal segített tanulási folyamat között. Az, hogy melyik tanulási technika volt hatékonyabb számos tényezőtől függött. Például függött attól, hogy mennyi ideig kell a tanult ismeretanyagot tárolni és függött a tananyagok jellegétől is. Amikor a tanulóknak egy kidolgozott példa szövegét kellett megjegyezniük, az egy héttel későbbi előhívás során az ismételt tesztelés hatékonyabb tanulási technikának bizonyult, mint a példa újraolvasása. Azonban, amikor egy újszerű matematikai eljárás megtanulására és azonnali tesztelésre került sor, akkor az anyagok jellegétől függetlenül az ismételt olvasás hatékonyabb volt, mint az ismételt tesztelés. Ez összhangban van May (2021) eredményével.

A témánkhöz legszorosabban illeszkedő tanulmányt Lyle és mtsai. (2011) készítették. A pszichológia statisztikáról szóló kurzus minden előadásának a végén a hallgatók azt a feladatot

kapták, hogy idézzék fel az előadáson elhangzottakat. Így a hallgatók minden előadás végén a tananyag lényegi részét előhívták. Ez nagyon hasonlít a mi kísérletünk felépítéséhez, ahol a hallgatók minden gyakorlat végén előhívják az aznapi tananyagot. A heti rendszerességű előadás végi előhívás jelentősen növelte a tanulók vizsgaeredményeit. A hallgatók egyéni visszajelzései pozitívak voltak, hasznosnak találták a módszert, és tetszett nekik. Lyle és munkatársai későbbi tanulmányaikban az elosztott előhívásos tanulás hosszútávú hatását vizsgálták alapozó kalkulus kurzusokban (Lyle és mtsai., 2016; Lyle és mtsai., 2020). Azt találták, hogy a különböző típusú matematikai ismeretekre való emlékezés és azok hosszú távú megtartása esetén az elosztott tanulás sokkal hatékonyabb volt, mint a hagyományos tanulás.

Kutatócsoportunk már több kísérletet is lefolytatott az előhívási hatás matematikai tananyag esetén kimutatható hatásáról. Egyrészt megmutattuk, hogy a tesztelés képes felzárkóztatni egy szakgimnázium diákjait egy elit iskola diákjaihoz az elemi geometria témakörében (Szeibert és mtsai., 2022). Másrészt megmutattuk, hogy hátrányos helyzetű, 9. évfolyamos diákok esetén a teszteléssel tanulás egy 3 hetes tanulási folyamat végén jobban megírt dolgozatot eredményezett (Szeibert és mtsai., 2022), mint a hagyományos módszerrel tanulóké. A kísérletet kiterjesztettük egyetemi szintre, ahol az eredmények azt mutatták, hogy egy elsőéves számelméleti kurzuson a teszteléssel tanuló hallgatók jobban teljesítettek a félév végi vizsgán. (Szabó és mtsai., 2023). Absztraktabb gondolkodást igénylő tárgyak esetében azt találták kutatótársaink, hogy bár középtávon még nincs különbség a kísérleti és kontrollcsoportok között, hosszútávon az előhívással tanuló csoportoknál a felejtés mértéke szignifikánsan kisebb, mint a kontrollcsoportnál (Muzsnay és mtsai., 2024).

Ezek alapján úgy tűnik, hogy az előhívásos tanulás hosszútávon működik a matematika tantárgy esetében is. Így mi feltételezve ennek hatékonyságát tovább szeretnénk vizsgálni a teszteléses tanulás egy-egy fontos aspektusát. A mai oktatás nagy részben hibrid. Megjelentek az online tananyagok, a diákok már sok esetben nem járnak be előadásokra. Ráadásul, a tanulási folyamat nagy részét az egyetemi vezetők a költséghatékonyság jegyében otthoni munka formákra próbálják átcsoportosítani. Emellett az oktatók terhelésének csökkentése egy folyamatos feladat. Ezen okok mentén jutottunk el ahhoz a kérdéshez, hogy milyen különbség léphet föl az online, vagy az egyetemen megírt „órávégi” tesztek esetén. Másrészt, ha a diákok feleletválasztós teszteket írnának, vajon ez hogyan hatna a közép és hosszútávú matematika tudásukra? A tanári terhek mindenképpen csökkennének, de vajon mennyire befolyásolja a diákok tudását a tesztelés formája? Ahogy fentebb olvashattuk, a szakirodalom azt mondja, hogy már memorizálandó tartalmak esetében is kis különbség látszik a diákok tudásában a

különböző tesztelési formák között. A fenti szakirodalmak alapján elmondható, hogy az elsajátítandó tananyagok esetében is van kis különbség, ha a diákokat különböző módokon teszteljük.

A matematikai feladatmegoldásnál nemcsak a memóriából való előhívás a fontos, hanem az is, hogy megfelelő sorrendben hívjuk elő és fűzzük össze a gondolatokat. Felmerül a kérdés, hogy ezt a fajta tudást lehet-e feleletválasztós teszteléssel fejleszteni. Ez tanári szempontól azért lenne jó, mert a feleletválasztós tesztelés géppel javítható, így az időigényes, megterhelő tanári javító munkát felválthatná online javítást segítő platform. Egy másik érdekes kérdés, hogy hatékonyabb-e a tesztelés, ha rögtön a tanulási folyamat után történik, mintha később, de még ugyanazon a napon. A későbbi tesztelésnek két előnye is lehet. Az egyik, hogy nem vesz el időt a tanórából, a másik, hogy a tanuló magának meg tudja választani a tesztelés időpontját az adott napon belül. Ugyanakkor egy hátránya, hogy a szaktanár nem tudja ellenőrizni használ-e segédeszközt a tanuló. Kísérletünkben ezt a két kérdést szeretnénk vizsgálni egyetemi környezetben matematikatanár szakos hallgatók körében.

2. A KÍSÉRLET FELÉPÍTÉSE

2.1 Előzmények

A kísérletünkben kezdetben 76 hallgató vesz részt. Ők mind az Eötvös Loránd Tudományegyetem tanárszakosok számára meghirdetett Bevezetés az algebra (bevalgm22vo) kurzusra járnak, melyet összesen 79 hallgató vett fel ebben a félévben (2024/2025/1), akik közül 3 hallgató egy előadáson vagy gyakorlaton sem jelent meg. A fennmaradó 76 hallgató közül négy többszöri tárgyfelvevő és két SNI-s (ADHD-s) diák volt.

Vizsgálatunk sajátossága, hogy a teszteléses kísérletet a sokszor megszokott laboratóriumi környezet helyett valódi oktatási környezetben végeztük. Ennek hátránya mindig az, hogy nem lehetséges teljesen egytényezősé tenni a kísérletet, azaz mindig fennmaradnak olyan tényezők, amiket a kísérlet természeténél fogva nem lehet kiszűrni - például a tanárok szerepe, diákok sajátosságai, órarendi beosztások, reguláris tananyag specialításai vagy a félév során fellépő egyéb váratlan körülmények. Előnye, hogy a laboratóriumi körülmények között már megvizsgált módszer kipróbálására sor kerülhet, és el lehet kezdeni a társadalmi hasznosíthatóságon dolgozni: milyen nehézségek, sikerek, hatások származnak a módszer alkalmazásából, milyen aspektusokra szükséges odafigyelni, kiknek érdemes és mikor alkalmazni az adott módszert.

A vizsgálatban a legújabb tanmenet alapján módosított *Bevezetés az algebra*ba kurzus előadás és gyakorlat tananyagát használtuk. A részletes tematika a dolgozat mellékletében (1. melléklet) található. A kurzus heti egy-egy 90 perces előadásból és gyakorlatból állt 13 héten keresztül. Az előadás a teljes évfolyamnak egy időpontban volt meghirdetve, a gyakorlatokon négy darab 17-21 fős csoportra oszlottak a hallgatók. A kvantitatív elemzéshez az adattisztítást elvégeztük: kihagytuk azokat, akik a félév során leadták a kurzust és a 2 db igazoltan Speciális Nevelési Igényű (SNI) hallgatót. Így összesen 74 hallgató, közülük 23 férfi, 51 nő adatait használtuk fel. Életkoruk 18 és 30 év között mozgott.

2.2 Felépítés

Ahhoz, hogy a kísérletben résztvevő hallgatókról egy átfogó képet kapjunk több tényezőt is figyelembe vettünk. A félév első hetében megírtattuk a kísérlet résztvevőivel a bemeneti teszteket. Kitöltettünk velük egy matematika tudástesztet (2. melléklet), amely felmérte, hogy megvan-e a kurzushoz szükséges matematikai háttérük. A teszt a középszintű érettségi szintjének felelt meg algebra, függvények és trigonometria témakörökből.

A gyakorlatok felépítése sokban megegyezett a szokásos egyetemi gyakorlatokkal: A diákok mindegyik gyakorlaton feladatokat (3. melléklet) oldottak meg az előző heti előadás elméleti anyagára építve egyénileg, és tanári segítséggel. A tesztelési hatás vizsgálatához az évfolyamot először két csoportra osztottuk. Két gyakorlati csoport hazavivős lett, ők hazavitték a teszteket. A másik két gyakorlati csoport bentíró lett, ők a gyakorlat utolsó 10 percében írták meg a teszteket. A „hazavivős” csoportoknak a gyakorlatuk napján kellett feltölteni a feladatot a tárgy Canvas felületére. Minden gyakorlati csoportot felosztottunk a tesztelés formája szerint, hogy lehetőleg egyenlő számban legyenek feleletválasztós és kifejtős formában tesztelő hallgatók. A névsor páratlanadik tagjai kifejtős, párosadik tagjai ikszelős teszteket írtak (4. és 5. melléklet). A félév során minden hallgató az első héten kapott tesztelési forma szerint tesztelt. A diákok nem látták a másik tesztelési csoport feladatát. A Canvas beadási felülete miatt egy egységes csütörtök délutáni beadási határidőt adtunk meg és nem ellenőriztük szigorúan, hogy a hallgatók a gyakorlatuk napján adják-e be a megoldásaikat. A hazavivős csoportoknál sem a dolgozat megoldásával eltöltött időt, sem a felhasznált anyagokat nem tudtuk felügyelni. Így azt sem tudtuk ellenőrizni, hogy az utasítások ellenére használtak-e külső segédeszközt. Ezekre az óra végi dolgozatokra a diákok a megírást követő 2 napon belül visszajelzést kaptak. A félév során folyamatosan töltöttük fel a mintamegoldásokat a kurzus Canvas felületére.

A tanári hatás csökkentése érdekében az előadó által tanított két gyakorlati csoport, a dolgozatmegírás helyszínét és időpontját tekintve, különböző kategóriába került.

	Kísérleti csoport	Tesztelési feladat
1. csoport és 3. csoport	Bentírós kifejtős	Gyakorlat utolsó 10 percében egy feladat megoldása
	Bentírós feleletválasztós	
2. csoport és 4. csoport	Hazavivős kifejtős	Gyakorlat napján egy feladat megoldása
	Hazavivős feleletválasztós	

1. táblázat

Az évfolyam kísérleti elosztása

2.3 Hipotézisek

1. A kifejtős módon előhívó hallgatók jobb dolgozatot írnak rövidtávon, mint az ikszelős módon előhívó hallgatók.
2. A kifejtős módon előhívó hallgatók jobb dolgozatot írnak középtávon, mint az ikszelős módon előhívó hallgatók.
3. A helyben előhívó hallgatók jobban szerepelnek rövid-, és középtávon.

A félév során a hallgatóknak két zárthelyi dolgozatot kellett írniuk. Ezek hat-hat feladatból álltak, és egy feladat teljes megoldása 6 pontot ért, egy zárthelyi dolgozaton maximum 36 pontot lehetett szerezni. Az első zárthelyi dolgozat megírására a félév 9. hetében került sor. Eredetileg a 6. héten írta volna az évfolyam, de az őszi szünet és egy tűzriadópróba miatt későbbre került a dolgozat. Az első zárthelyi dolgozat az első hat hét anyagát kérte számon, úgy, hogy a hat feladat közül 3 a beadandó házi feladatokra, 3 az óra végi tesztekre hasonlított. A második zárthelyi dolgozatot (6. melléklet) a hallgatók a félév 12. hetében írták. A dolgozat az egész félév tananyagát kérte számon, amit a hallgatók előre tudtak. A dolgozat 36 pontjából 20 pontot a félév első hat hetében tanult tananyag ismeretével lehetett megszerezni. A második zárthelyi dolgozat három-három feladata ismét a beadandó házi feladatokra és az óra végi tesztekre hasonlított.

2.4 Statisztikai módszerek

Általános lineáris modellekkel hasonlítottuk össze a csoportok zárthelyi dolgozatokon elért pontszámát. A pontszámot minden elemzésben százalékra váltottuk. A bementi pontszám vizsgálatakor a tesztelés helyszínét (hazavivős és bent írás), a teszt típusát (kifejtős és feleltválasztós), valamint ezek interakcióját vettük be a modellbe magyarázóváltozóként. Az első és második zárthelyi dolgozat, valamint az utóteszt esetében a fenti kategóriákon kívül a bementi matematika teszt eredményét is bevettük a modellbe, ezzel kontrolláltunk a hallgatók alaptudására. Modellszelekciót az Akaike-féle információkritérium (AIC) alapján végeztünk (Faraway, 2016). A magyarázó változókat egyesével eltávolítottuk a modellekből, és a legalább 2 AIC-értékkel alacsonyabb modellt választottuk. Két hasonló AIC-értékű modell esetén az egyszerűbbet választottuk. Főhatást csak akkor vettünk ki, ha már nem szerepelt interakciója a modellben. A szignifikanciaszintek meghatározásához Wald χ^2 tesztet használtunk. A statisztikai vizsgálatokat az R 4.3.3 (R Core Team, 2024) programmal végeztük. Az általános lineáris modelleket a glmmTMB 1.1.9 (Brooks et al. 2017) csomag segítségével futtattuk, valamint a car 3.1-2 (Fox & Weisberg, 2019), DHARMA 0.4.6 (Hartig, 2022) és emmeans 1.10.3 (Lenth, 2024) csomagokat használtuk a modellek diagnosztikájához.

3. EREDMÉNYEK

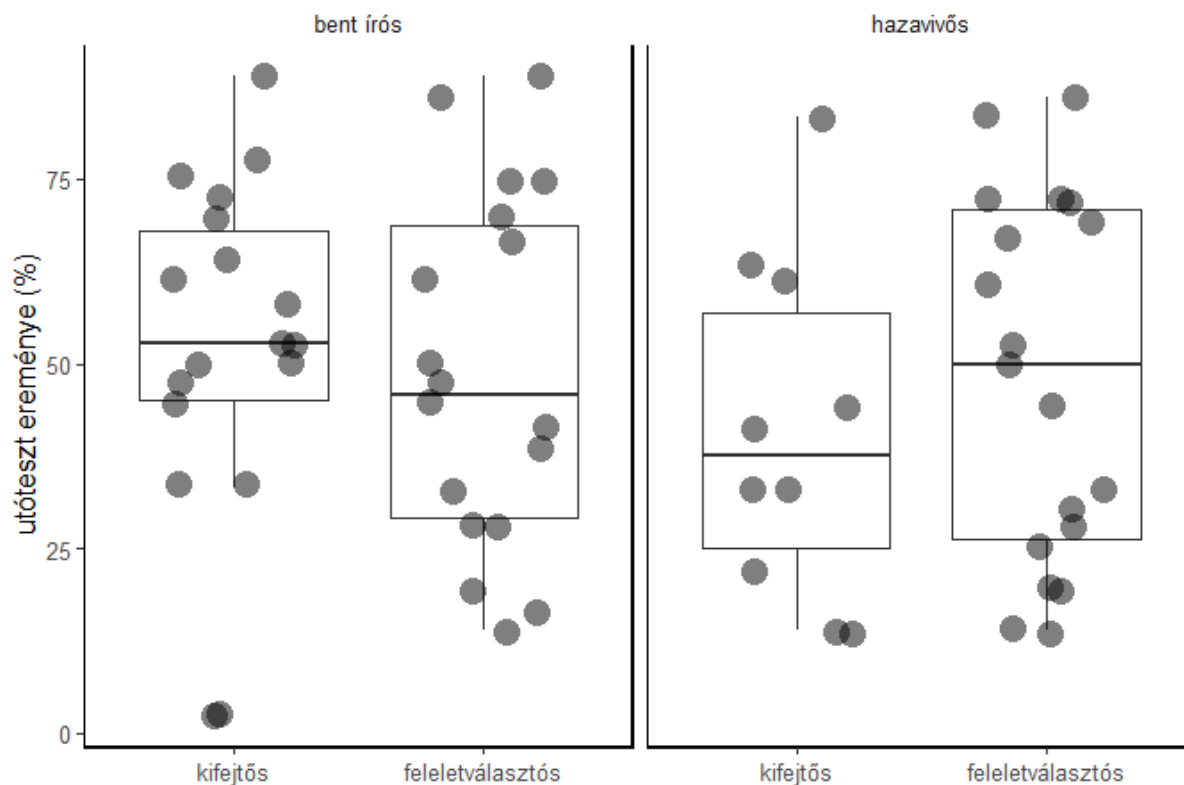
A bementi pontszámokban nem volt különbség a csoportok között (összes $\chi^2 < 2,50$; összes $p > 0,11$). A többi zárthelyi dolgozatnál és az utótesztnél is csak a bementi teszt maradt a végső modellben, azaz a különböző csoportok között nem volt különbség (2. táblázat), minden esetben szignifikáns összefüggés volt a bementi teszt és a dolgozat eredménye között (összes $\chi^2 > 36,0$; összes $p < 0,0001$). A dolgozatok eredményeinek leíró statisztikája az 2. táblázatban található.

tesztelés típusa	tesztelés helyszíne	bemeneti teszt (%)		1. zárthelyi eredménye (%)		2. zárthelyi eredménye (%)		utóteszt eredménye (%)	
		átlag	szórás	átlag	szórás	átlag	szórás	átlag	szórás
kifejtős	bent írás	69,7	13,8	52	23,2	50,86806	23,36679	59,1	29,3
	hazavívós	61,3	15,2	40,9	21,6	52,43056	31,23126	63,1	19,4
feleletválasztós	bent írás	61,9	21,3	49,1	23,9	48,4375	29,22118	54,1	22,4
	hazavívós	66,5	12,8	46,1	25,5	52,62346	25,92641	60,8	27,1

2. táblázat

A dolgozatokon elért pontszámok százalékos értékei csoportonként

A lineáris modell alapján egyik hipotézisünk sem teljesül. A kifejtős módon előhívó hallgatók azonosan teljesítettek az első dolgozatban, mint az ikszelős módon előhívó hallgatók. Ez csak a közvetlen tanulási folyamat utáni tudást hasonlítja össze, így a hosszútávú tárolás vizsgálatához ez az eredmény nem járul hozzá. A második hipotézisünk nem teljesülése ugyanezt mondja el középtávon. Azt már tudjuk korábbi tanulmányokból, hogy matematika tanulás esetén a tesztelés középtávon hatékony. Ezért levonhatjuk azt a következtetést, hogy a kifejtős és az ikszelős előhívási módszer egyformán hatékony. A harmadik hipotézisünk sem teljesült még középtávon sem. Ez azt sugallja, hogy a hallgatók otthon valóban előhívták a tananyagot és nem használtak segédeszközt. Kimondható tehát, hogy matematikai tananyag esetén, ha jól választjuk meg az ikszelős feladatokat, akkor rövid- és középtávon ugyanolyan tudás szerezhető, mint a kifejtős feladatokkal való előhívás esetén.



1. ábra

Az utóteszt eredményei tesztelési csoportokra bontva

Az 1. ábra a második zárthelyi dolgozaton szerzett pontok eloszlását mutatja. Látható, hogy mind a négy csoportban szinte teljesen egyforma a pontszámok eloszlása. Ez azt jelenti, hogy a négyféle kezelés egyformán hat középtávon a matematikai tudásra.

4. DISZKUSSZIÓ

A dolgozatban a tesztelési hatás négyféle lehetőségét vizsgáltuk a *Bevezetés az algebra* kurzuson. Bent írás, hazavívós, feleletválasztós, kifejtős csoportjaink voltak. Az első hipotézisünk, hogy a kifejtős csoportok jobban fognak szerepelni a két dolgozatban, mint az ikszelősök nem teljesül. Ezt azt jelenti, hogy a tesztelés két formája a rövidtávú tudásra egyforma hatással van. Ugyanez mondható el az első dolgozat középtávú utótesztjéről, vagyis a második hipotézisünk sem teljesül. A harmadik hipotézisünk is megbukott, mert a statisztikai elemzés alapján a bentírós és a hazavívós csoportok egyformán teljesítettek. Ezek alapján rövid- és középtávon a kifejtős tesztelést felválthatja az ikszelős tesztelés, ami a hosszas, megterhelő

tanári javítómunkát megkönnyíti. A tanári munkamennyiség tovább csökkenthető online tanulást segítő felületek és ezek automatikus javítási rendszereinek alkalmazásával. Ezeknek a felületeknek a használata alkalmas órai és otthoni tesztelésre is. Eredményeink alapján rövid- és középtávon a bentírók csoport ugyanolyan eredményes, mint a hazavivők csoport, ezért az otthonra kiadott tesztelés nem veszi el a tesztelésre szánt néhány percet a tanórából.

Ez egy élő, nem laboratóriumi kísérlet volt, ezért számtalan más tényező befolyásolhatta a kísérlet eredményeit, mint a különböző fajta tesztelések. Az egyik ilyen a tanári hatás, amit azzal próbáltunk kiküszöbölni, hogy az egyik gyakorlatvezető mind a 4 fajta csoportot tanította, a másik két gyakorlatvezető két-két félért, amik közül az egyik bentírók a másik hazavivők volt. Mindkettőben volt kifejtős és ikszelős is. Egy másik ilyen hatás a lemorzsolódás. Feltűnően magas volt a lemorzsolódás aránya az egyik hazavivők gyakorlati csoportban. Ennek a csoportnak a gyakorlata volt az egyetlen olyan gyakorlat, amely a késő délutáni órákban volt (16:15-17:45). Ebben a csoportban volt a legkisebb a csoportlétszám. Ez nem véletlen, mert ha tehetik, a hallgatók nem vesznek fel késő délutáni órákat. Azok vesznek fel ezeket az órákat, akik kizsorulnak a többi gyakorlati csoportból, vagy a többi órájuk egy időszámban van a többi gyakorlattal. Így, ide kerülnek általában az évismétlők, akiknek a felsőbb éves óráik nem voltak egyeztetve az első éves órarenddel. Ezt a gyakorlatot vette fel egy kivételével az összes többeszeri tárgyfelvevő, a másoddiplomások, és ide került mindkét SNI-s (ADHD) hallgató. A 16 hallgatóból 6-an már a második dolgozatot sem írták meg. Mindkét SNI-s hallgató és egy évismétlő lemorzsolódott. Ez azt jelenti, hogy ebben a csoportban a lemorzsolódás mértéke 37,5% volt, míg a többi gyakorlati csoportban maximum 25%. Ezek alapján a hallgatók eloszlása a gyakorlati csoportok között nem volt minden szempontból véletlenszerű és ez kihatással lehet a tesztelési eredményekre is. Egy másik lehetőség az, hogy maga a hazavivők tesztelési forma hat a lemorzsolódásra. Ennek elemzése egy külön kutatás tárgya kell, hogy legyen.

A lemorzsolódó hallgatóknak kétharmada azok közül került ki, aki nem járt előadásra, míg az előadásokra járóknak mindössze 18%-a morzsolódott le (3. táblázat). Ez a jelenség is kétféle magyarázattal bírhat. Az egyik, hogy az előadás pozitívan hozzájárult a gyakorlati teljesítményhez, a másik, hogy azok nem jártak előadásra, akiknek olyan iskolán kívüli elfoglaltságai voltak, amelyek általában megakadályozták őket a folyamatos tanulásban. Tudomásunk van arról, hogy több hallgató is saját magát tartotta el napi 6-8 óra munkával. Ez a jelenség szintén egy külön vizsgálatot érdemel.

	Megbukott	Nem bukott meg
Járt előadásra	12,82	55,13
Nem járt előadásra	24,36	7,69

3. táblázat

Lemorzsolódó hallgatók eloszlása

Az átlagok azt sugallják, hogy a hazavivős kifejtős csoport jobb eredményt ért el a többi csoportnál és ő az egyetlen csoport, aki javított a bemeneti teszt átlagához képest. Ez csalóka, mert, ahogy írtuk, az egyik hazavivős csoportban nagy volt a lemorzsolódás, és a második zárthelyi dolgozatra már csak a legjobbak jöttek el. Így nem meglepő, hogy jobban írták meg a dolgozatot. A csoportban megmaradó 8 hallgatóval a statisztikai modell lefuttatható, de nem ad megbízható eredményt. A másik három csoport eredményei azonban jól értelmezhetők és valósnak tekinthetők.

5. KUTATÁSBAN VÉGZETT SAJÁT MUNKA

A *Bevezetés az algebra* kurzuson a teljes oktatási folyamatban részt vettünk, mi, a dolgozat két szerzője. Részt vettünk a kísérlet felépítésének megalkotásában. Mind a ketten egy-egy gyakorlati csoport gyakorlatvezetői voltunk. A kurzushoz hetente gyakorlati feladatsorokat készítettünk, amiket aztán az előadóval véglegesítettünk. Heti rendszerességgel házi feladatsorokat állítottunk össze az előadó jóváhagyásával. A félév során megírt 2 zárthelyi dolgozatot mi készítettük elő és az előadóval véglegesítettük. A heti rendszerességgel beadott házi feladatokat, óra végi dolgozatokat mind a négy gyakorlati csoport hallgatóinak mi javítottuk. Az óra végi tesztek mintamegoldásait mi írtuk. A kurzushoz tartozó Canvas felületet mi ketten kezeltük, elláttuk az adminisztratív feladatokat is. A bemeneti teszteket mi javítottuk, ennek adatait feldolgoztuk.

Kutatásainkat az MTA-ELTE Matematika Tanulásméleti- és Pszichológiai Kutatócsoport tagjaiként végeztük az ELTE DOKK támogatásával az „*Az előhívásos tanulás módszertana*” alprojekt keretében.

HIVATKOZÁSOK

- Abbott, E. E. (1909). On the analysis of the factors of recall in the learning process. *Psychological Monographs*, 11, 159–177.
- Alyahyan, E., & Düşteğör, D. (2020.) Predicting academic success in higher education: literature review and best practices. *Int J Educ Technol High Educ* 17, 3. <https://doi.org/10.1186/s41239-020-0177-7>
- Authors (2023). *Revista De Educación*
- Avvisati, F., & Borgonovi, F. (2020). Learning mathematics problem solving through test practice: A randomized field experiment on a global scale. *Educational Psychology Review*, 32(3), 791–814. <https://doi.org/10.1007/s10648-020-09520-6>
- Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szeibert Janka: A teszteléses tanulás hatékonyságának vizsgálata az elemi geometria tanításában. TDK dolgozat, 2017
- Bereczky-Zámbó Csilla, Muzsnay Anna, Szeibert Janka: Az előhívási hatás eredményessége a deduktív következtetést igénylő feladatok esetén. TDK dolgozat, 2019
- Brooks, M. E., Kristensen, K., Van Benthem, K. J., Magnusson, A., Berg, C. W., Nielsen, A., Skaug, H. J., Mächler, M., & Bolker, B. M. (2017). Modeling zero-inflated count data with glmmTMB. <https://doi.org/10.1101/132753>
- Butler, A. C. (2010). Repeated testing produces superior transfer of learning relative to repeated studying. *Journal of experimental psychology. Learning, memory, and cognition*, 36(5), 1118-1133. <https://doi.org/10.1037/a0019902>
- Carpenter, S., Pashler, H., Rohrer, D., Cepeda N. ,J. 2007. Enhancing learning and retarding forgetting: Choices and consequences. *Psychonomic Bulletin & Review*, 14 (2), 187-193
- Di Martino, P., Gregorio, F., & Iannone, P. (2023). Transition from school into university mathematics: experiences across educational contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 113(1), 1–5. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10217-0>
- Dunlosky, J., Rawson, K. A., Marsh, E. J., Nathan, M. J., & Willingham, D. T. (2013). Improving students' learning with effective learning techniques. *Psychological Science in the Public Interest*, 14(1), 4-58. <https://doi.org/10.1177/1529100612453266>
- Faraway, J. J. (2016). Extending the linear model with R: generalized linear, mixed effects and nonparametric regression models. CRC press
- Fazio, L. K (2019). Retrieval practice opportunities in middle school mathematics teachers' oral questions. *British Journal of Educational Psychology*, 89(2), 653-669. <https://doi.org/10.1111/bjep.12250>
- Fox J, Weisberg S (2019). An R Companion to Applied Regression, Third edition. Sage, Thousand Oaks CA. <https://socialsciences.mcmaster.ca/jfox/Books/Companion>
- Gates, A. I. (1917). Recitation as a factor in memorizing. *Archives of Psychology*, 6(40).

- Hailikari, T., Nevgi, A., & Komulainen, E. (2008). Academic self-beliefs and prior knowledge as predictors of student achievement in mathematics: A structural model. *Educational Psychology*, 28(1), 59–71. <https://doi.org/10.1080/01443410701413753>
- Hartig F (2022). DHARMA: Residual Diagnostics for Hierarchical (Multi-Level / Mixed) Regression Models. R package version 0.4.6, <https://CRAN.R-project.org/package=DHARMA>
- Kang, S. H. K., McDermott, K. B., & Roediger, H. L. (2007). Test format and corrective feedback modify the effect of testing on long-term retention. *European Journal of Cognitive Psychology*, 19, 528–558.
- Karpicke, J. D., & Blunt, J. R. (2011). Retrieval practice produces more learning than elaborative studying with concept mapping. *Science*, 331, 772–775. <https://doi.org/10.1126/science.1199327>
- Keresztes, A. Kaiser, D., Kovács, G. & Racsmány, M. (2014) Testing promotes long-term learning via stabilizing activation patterns in a large network of brain areas. *Cerebral Cortex*, 24, 3025–3035
- Kosiol, T., Rach, S. & Ufer, S. (2019). (Which) Mathematics Interest is Important for a Successful Transition to a University Study Program? *International Journal of Science and Mathematics Education* 17, 1359–1380. <https://doi.org/10.1007/s10763-018-9925-8>
- Kromann, C. B., Jensen, M. L., & Ringsted, C. (2009). The effect of testing on skills learning. *Medical education*, 43(1), 21-27.
- Larsen, D. P., Butler, A. C., & Roediger, H. L. (2013). Comparative effects of test enhanced learning and self-explanation on long term retention. *Medical Education*, 47(7), 674–682. <https://doi.org/10.1111/medu.12141>
- Lenth R (2024). emmeans: Estimated Marginal Means, aka Least-Squares Means. R package version 1.10.3, <https://CRAN.R-project.org/package=emmeans>
- Lyle, K. B., and Crawford, N. A. (2011). Retrieving essential material at the end of lectures improves performance on statistics exams. *Teaching of Psychology*, 38(2), 94–97. <https://doi.org/10.1177/0098628311401587>
- Lyle, K. B., Bego, C. R., Hopkins, R. F., Hieb, J. L., & Ralston, P. A. (2020). How the amount and spacing of retrieval practice affect the short- and long-term retention of mathematics knowledge. *Educational Psychology Review*, 32, 277–295. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09489-x>
- Lyle, K. B., Hopkins, R. F., Hieb, J. L., & Ralston, P. A. (2016). Spaced retrieval practice increases college students' short- and long-term retention of mathematics knowledge. *Educational Psychology Review*, 28(4), 853–873. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9349-8>
- Marin-Garcia, E., Mattfeld, A. T., & Gabrieli, J. D. (2021). Neural correlates of long-term memory enhancement following retrieval practice. *Frontiers in Human Neuroscience*, 15, 584560.

- May, B. M. (2021). Effects of spaced, repeated retrieval practice and test-potentiated learning on mathematical knowledge and reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(1), 92–107. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1961034>
- Mayerhofer, Martin & Lüftenegger, Marko & Eichmair, Michael. (2023). Impact of a Mathematics Bridging Course on the Motivation and Learning Skills of University Students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*. 1-36. <http://dx.doi.org/10.1007/s40753-023-00224-0>
- Muzsnay, A., Szabó, C., & Szeibert, J. (2024). Retrieval practice—a tool to be able to retain higher mathematics even 3 months after the exam. In *Annales Mathematicae et Informaticae*.
- Nuthall, G. (2000). The role of memory in the acquisition and retention of knowledge in *science and social studies units*. *Cognition and instruction*, 18(1), 83-139.
- R Core Team (2023). R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. <<https://www.R-project.org/>>.
- Rach, S., Ufer, S. (2020). Which Prior Mathematical Knowledge Is Necessary for Study Success in the University Study Entrance Phase? Results on a New Model of Knowledge Levels Based on a Reanalysis of Data from Existing Studies. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 6, 375–403. <https://doi.org/10.1007/s40753-020-00112-x>
- Rawson, K. A., Pyc, M. 2010. Why Testing Improves Memory: Mediator Effectiveness Hypothesis. *Science* Vol. 330, Issue 6002, pp. 335. DOI: 10.1126/science.1191465
- Roediger, H. L., III, & Karpicke, J. D. (2006). Test-enhanced learning: Taking memory tests improves long-term retention. *Psychological Science*, 17, 249–255.
- van Eersel, G. G, Verkoeijen, P. P. J. L., Povilenaite, M., & Rikers, R. (2016). The testing effect and far transfer: The role of exposure to key information. *Frontiers in Psychology*, 7, Article 1977. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.01977>
- Yeo, D. J., & Fazio, L. K. (2019). The optimal learning strategy depends on learning goals and processes: retrieval practice versus worked examples. *Journal of Educational Psychology*, 111(1), 73–90. <https://doi.org/10.1037/edu0000268>
- Zaromb, F. M., & Roediger, H. L. (2010). The testing effect in free recall is associated with enhanced organizational processes. *Memory & cognition*, 38(8), 995-1008.

MELLÉKLETEK

1. Melléklet: Bevezetés az algebra tárgyatematika

Tárgy neve: Bevezetés az algebra

Tárgy kódja: bevalgm22vo

Tárgyfelelős neve: Károlyi Gyula

Tárgyfelelős tudományos fokozata: DSc

Tárgyfelelős MAB szerinti akkreditációs státusza: AR

Az oktatás célja: A manipulatív készség elsajátítása az alapvető algebrai ismeretek révén, ezek összekapcsolása a geometriával és a trigonometriával.

Kompetenciák:

a) Tudás: Rendelkezik azokkal az ismeretekkel, amelyek lehetővé teszik, hogy szaktárgyának eredményeit megismerhesse, értelmezhesse.

Törekszik a tantárgy tananyagában szereplő fogalmak, ismeretek, összefüggések megértésére, elsajátítására és alkalmazására.

b) Képesség: Képes a matematika témakörében szakszerűen kifejezni magát mind szóban, mind írásban.

Képes a tantárgyban szereplő fogalmak, elméletek és tények közötti összefüggések megteremtésére, elméleti ismeretek gyakorlati alkalmazására és közvetítésére.

c) Attitűd: Nyitott a szakmai megújulásra, fejlődésre, a rendszeres továbbképzésre.

Igénye van matematikai tudásának gyarapítására, új matematikai ismeretek megszerzésére.

d) Autonómia és felelősség:

Elkötelezett az igényes munkára, folyamatos önművelésre törekszik.

Képes feladatait az oktatóinak szakmai támogatása mellett önállóan megoldani.

Az oktatás tartalma (az elsajátítandó ismeretanyag tömör leírása):

Lineáris egyenletrendszerek, Gauss-elimináció. Mátrixok és mátrixműveletek. Komplex számok, trigonometrikus alak, egységgyökök. Polinomok maradékos osztása, gyökei, Horner-elrendezés, gyöktényezős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggések, szimmetrikus polinomok, többszörös gyökök. Lagrange-interpoláció. Irreducibilis polinomok fogalma és szerepe. Harmad- és negyedfokú egyenletek.

Az értékelés rendszere:

Évközi munka beadandók és/vagy zárthelyi és/vagy órai munka alapján és szóbeli vizsga az előadások anyagából.

Ajánlott irodalom:

Freud Róbert: Lineáris algebra.

Kiss Emil: Bevezetés az algebra

2. Melléklet: Matematikai tudásteszt

Szintfelmérő 2024.09.17.

Kérjük töltsse ki az alábbi táblázatot. Értelemszerűen minden sornál csak egy jelölést, pl. x-et kell írni.

Itt nem kell sokat gondolkodni, ez inkább a tanult ismeretekről szól.

		biztosan nem volt ilyen	nem emlékszem rá, hogy let volt ilyen	hallottam már róla, de nem tudom pontosan mi az/nek tudnék rá pontosan válaszolni	hallottam és tudom is, mit jelent/tudnék rá válaszolni
1.	Hallotta már a számelmélet kifejezést?				
2.	Ismeri a 2-vel és 5-tel való oszthatósági szabályt?				
3.	Tudja hogyan lehet átváltani egy 4-es számrendszerbeli számot 5-ös számrendszerbelivé?				
4.	Tudta, hogy minden egész szám felbontható prímek szorzatára?				
5.	Hallott a számelmélet alaptételéről?				
6.	Hallotta már a relatív prím kifejezést?				
7.	Tudta, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális?				
8.	Hallott már olyan szabályt, hogy egy szám mikor osztható 3-mal vagy 9-cel?				
9.	Tudta, hogy az $a^n - b^n$ minden pozitív n egész esetén felbomlik ($a - b$)($a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}$) alakban?				
10.	Látott már olyan feladatot, hogy milyen x -re lesz 3-mal osztható az $54x32$?				
11.	Látott már olyan feladatot, hogy milyen számjegyre végződik a 19^{2020} ?				
12.	Hallott róla, hogy végtelen sok prímszám létezik?				
13.	Tanult a legnagyobb közös osztóról?				
14.	Hallott már arról, hogy egy négyzetszám 3-mal osztva milyen maradékot adhat?				
15.	Tudja, hogy mi az a maradékos osztás?				
16.	Tanulta, hogy a legkisebb közös többszöröst a törtek összeadásánál használjuk?				
17.	Látott olyan feladatot, hogy a $100!$ hány 0-ra végződik?				

A feladatok megoldásához számológép nem használható. Minden számítást a lapon végezzen el.

Sz/1: Mennyi 8 és 12 legkisebb közös többszöröse?

Sz/2: Készítse el a 280 prímtényezősz felbontását!

Sz/3: Az alábbi számok közül mely párok relatív prímek? Soroljuk fel az összes lehetőséget! 21, 45, 32

Sz/4: Bontsa fel prímek szorzatára a következő számot: 420

Sz/5: Karikázza be azokat a számokat, amik oszthatók

a. 3-mal.

283, 9672, 1176, 111111, 111112

b. 6-tal.

283, 9672, 1176, 111111, 111112

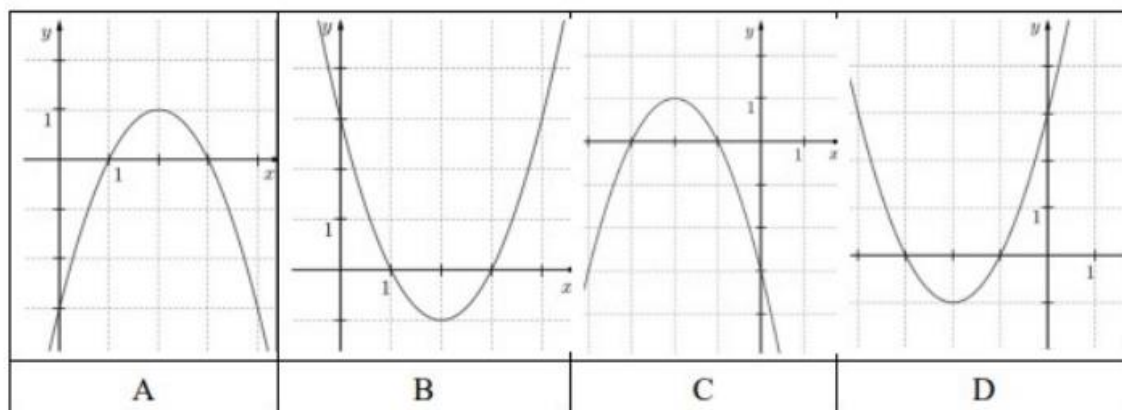
c. 4-gyel.

2345, 1234, 48148, 32100, 76432

F-V/1:

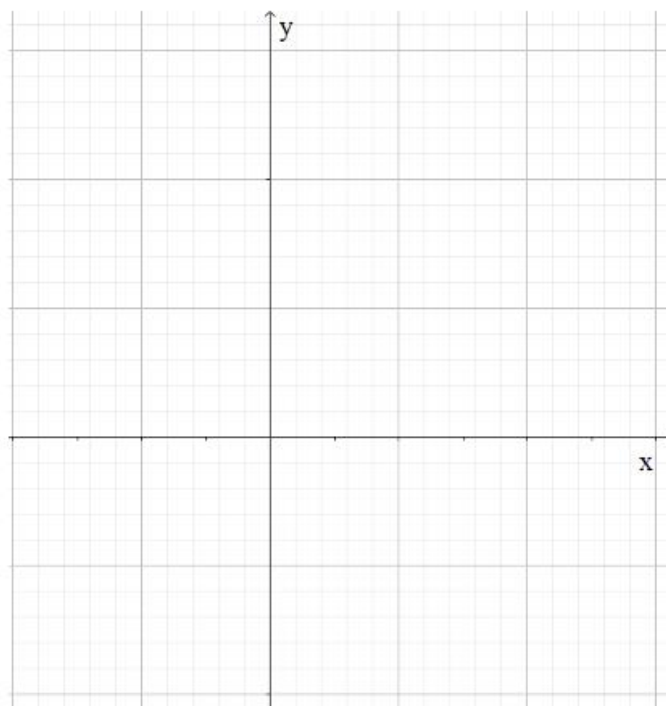
Adott a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = (x - 2)^2 - 1$ függvény.

- A $P(3; y)$ illeszkedik a g függvény grafikonjára. Adja meg y értékét!
- Az alábbi grafikonok közül válassza ki g grafikonját (karikázza be a megfelelő betűt) és adja meg g értékkészletét!

**F-V/2:**

Adott a $[0; 6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2 - 8x + 11$ hozzárendeléssel megadott függvény.

- Igaz, hogy a függvény grafikonja átmegy a derékszögű koordinátarendszer origóján?
- Igaz, hogy a függvény grafikonja átmegy a derékszögű koordinátarendszer x tengelyén?
Ha igen, mely ~~pont~~ pont(ok)an metszi az x tengelyt?
- Ábrázolja a függvényt:

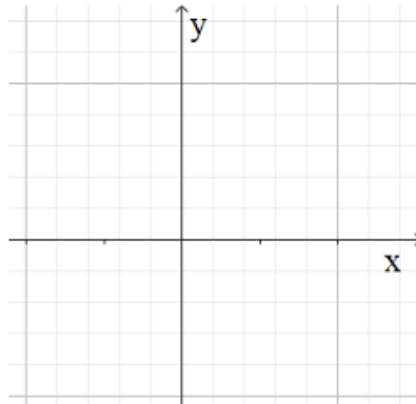


- A $\underline{v} = (a; b)$ vektor az origóból a függvény minimumába (tengelypontjába) mutat. Adja meg az a, b ismeretlenek értékét.

F-V/3:

Megadtunk négy derékszögű koordináta-rendszerbeli pontot: $A(-2; -2)$, $B(6; -2)$, $C(5; 5)$, $D(2; 4)$.

- a. Ábrázolja a négy pontot az alábbi koordináta-rendszerben:



- b. Adja meg koordinátáival az $\overrightarrow{AC}$ vektort.
 c. Adja meg koordinátáival az $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ vektort.
 d. Adott az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok egy-egy reprezentánsa:



Válassza ki (karikázza be) az alábbi ábrák közül azt, amelyik az $\underline{a} - \underline{b}$ vektor egy reprezentánsa lehet.

**A/1:**

- a. Adja meg t értékét, hogy teljesüljön az alábbi egyenlet:

$$\frac{(4 \cdot 5^2 + 5) \cdot 3}{5^2 - 5} = t \cdot 0,75$$

- b. Az 5 hányadik hatványával egyenlő az alábbi kifejezés?

$$\frac{(5^2)^{7+3} \cdot 5}{5^3}$$

- c. Alakítsa szorzattá az alábbi kifejezést.

$$5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 10a^2b$$

- d. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok körében:

$$\frac{1}{3}x^2 = 3$$

A/2:

Legyen f a valós számok halmazán értelmezett függvény, melynek hozzárendelési szabálya

$$f(x) = x^2 - 11x + 30$$

Igazolja, hogy ha $f(x) \neq 0$, akkor minden esetben igaz lesz, hogy:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x-4}{x-6}$$

Kg/1: Adott a síkon az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű kör. Hogyan helyezkedik el a körhöz képest a (7; 7) pont? Karikázza be a megfelelő sorszámot:

1. Külső pont
2. Rajta van
3. Belső pont

Kg/2: Válassza ki annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a P(5; 9) ponton és párhuzamos a $\underline{v}(2; -5)$ vektorral.

Karikázza be a megfelelő sorszámot:

1. $2x - 5y = -35$
2. $5x + 2y = 43$
3. $2x - 5y = -53$
4. $5x - 2y = 7$

T/1:

Döntse el az alábbi négy állításról, hogy melyik igaz, illetve hamis. Írjon ez alapján I vagy H betűt a sor végére.

A: Van olyan derékszögű háromszög, amelyben az egyik befűesszűg szűnusza $1/2$.

B: Ha egy háromszűg egyik befűesszűgének szűnusza $1/2$, akkor a háromszűg derékszűgű.

C: A derékszűgű háromszűgek bármelyik szűgének értelmezűűk a kosűnuszűt.

T/2:

- a. Mennyi $\cos(120^\circ)$? Karikázza be a megfelelőt.

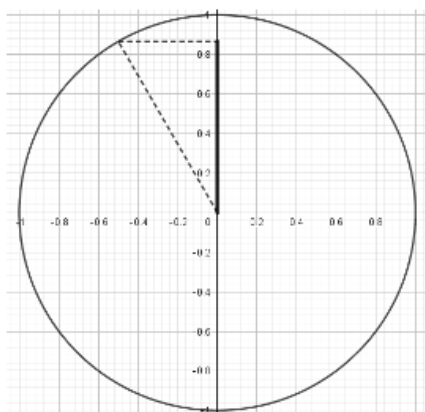
$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

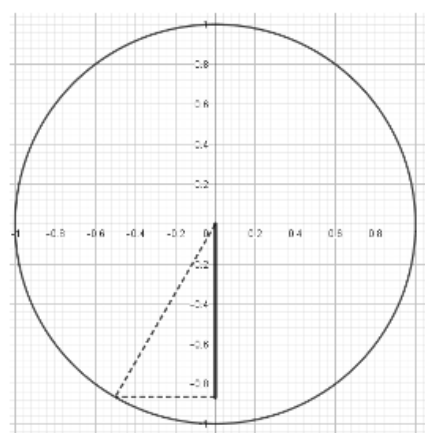
$$\frac{-1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

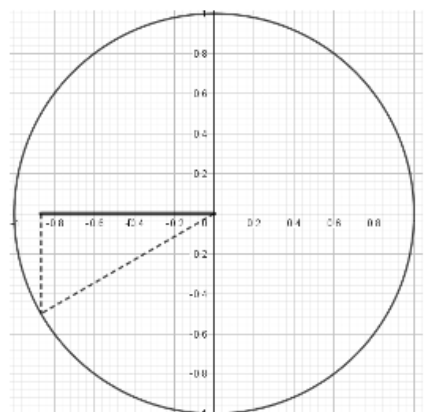
b. Kösse össze a megfelelő párokat.



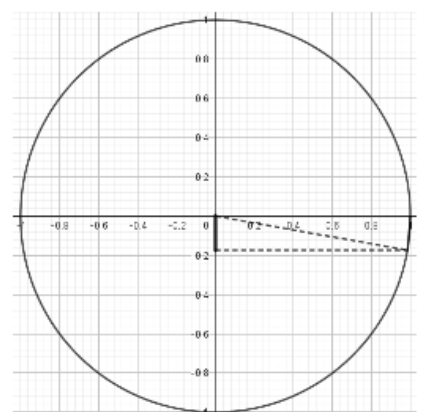
$\sin 240^\circ$



$\cos 120^\circ$

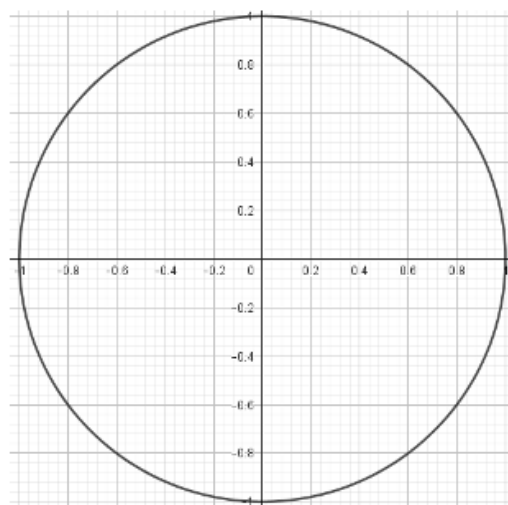


$\cos 210^\circ$



$\sin 350^\circ$

c. $\cos 180^\circ$ -hoz (ez alapján) mit rajzolna az egységkörbe? Készítsen ábrát.



3. Melléklet: Órai feladatsor

3. feladatsor

2. I) Igazold, hogy egy másod vagy harmadfokú polinom pontosan akkor irreducibilis, ha nincs gyöke!

II) Mutass a fenti megállapításra ellenpéldát negyed és ötödfokú polinomokra.

0,7. Melyik n -ekre lesz $2^n + 1$ és $2^n - 1$ egyszerre prím?

105. Irreducibilisek-e az $f(x) = x^4 - 3x^3 - 1$, $g(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 1$ és $h(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x - 1$ polinomok $\mathbb{Z}_2$ fölött? Irreducibilisek-e $\mathbb{Q}$ fölött?

912. Bontsuk fel $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ felett az alábbi polinomokat!

x) $x^4 + 4$;

y) $x^4 - 4$;

z) $x^4 + 1$

100. Határozzuk meg az alábbi polinomok racionális gyökeit

$x^3 - 8x + 3$,

$x^3 - 3x + 3$,

$3x^3 - 8x^2 + 1$,

$2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$

71. Mutassunk minél kisebb fokú polinomot $\mathbb{Z}_4$ fölött, amelynek $\mathbb{Z}_4$ minden eleme gyöke.

101. Határozzuk meg a $x^4 - x^3 - x + 1$ polinom gyökeit (sejtsünk meg egy racionális $\sqrt{5}$, emeljük ki, stb!)

23,3. Polinomfüggvény-e a $\sin x$? Azaz van-e olyan $f(x)$ polinom, amelyre teljesül, hogy minden valós x esetén, az $f(x) = \sin x$?

23,7. Igazoljuk, hogy az $\frac{1}{x}$ nem polinom?

4. Melléklet: Óra végi tesztelés

NÉV: _____ NEPTUN KÓD.: _____

1. Ha kifejezzük a $x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + \dots$ összeget (4 változóban $\sum x_i^2x_jx_k$) az elemi szimmetrikus polinomokkal, akkor igaz, hogy

- a) négy tag lesz az összegben
- b) szerepel σ_4
- c) az egyik együttható 3
- d) van benne σ_1
- e) két tag lesz
- f) mindegyik elemi szimmetrikus polinom szerepel az összegben

NÉV: _____ NEPTUN KÓD.: _____

1. Fejezzük a $x_1^2x_2x_3 + x_1^2x_2x_4 + \dots$ összeget (4 változóban $\sum x_i^2x_jx_k$) az elemi szimmetrikus polinomokkal.

5. Melléklet: Óra végi tesztelés

NÉV: _____ NEPTUN KÓD.: _____

1. Egy egész együtthatós $p(x)$ polinomnak gyöke az 5 és a 6. Mely értékeket veheti fel az alábbiak közül:

a) 2 b) 5 c) 6 d) 3 e) 100 e) 4,6

NÉV: _____ NEPTUN KÓD.: _____

1. Egy egész együtthatós $p(x)$ polinomnak gyöke az 5 és a 6. Igazoljuk, hogy minden egész helyen páros értéket vesz fel. Felveheti-e a 6-ot vagy a 100-at a 7 helyen, azaz lehet-e $p(7) = 6$ vagy $p(7) = 100$?

Név:

Gyakorlatvezető neve:

2. Algebra Zárthelyi

A zárthelyi dolgozatra 90 perc áll rendelkezésre. Semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Felbontható-e az $x^{10} + x^6 + x^3 + 1$ és az $x^{10} + x^6 + 1$ polinom $\mathbb{Z}_2$ fölött?
2. Bontsuk fel gyöktényezők szorzatára az $x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 3$ polinomot $\mathbb{C}$ fölött.
3. Bontsuk fel irreducibilisek szorzatára az $x^4 - 19$ polinomot $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$, és $\mathbb{Z}_5$ fölött.
4. Adjuk meg a legbővebb felbontását $\mathbb{Q}$ fölött a $3x^4 + x^3 + 18x^2 - 3x - 3$ polinomnak.
5. Számoljuk ki az alábbi kifejezések képzetes részét:
 $(2 + 2\sqrt{3}i)^{1957} + (2 - 2\sqrt{3}i)^{1957} \qquad (2 + 2\sqrt{3}i)^{1957} \cdot (2 - 2\sqrt{3}i)^{1957}$
6. Legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ az $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$ polinom gyökei.
Határozzuk meg azt a polinomot, amely gyökei $(\alpha_1\alpha_2), (\alpha_1\alpha_3), (\alpha_2\alpha_3)$.