

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

BUDA VIRÁG – PRINS REBECCA

**MATEMATIKA TANÁRSZAKOS HALLGATÓK
BIZONYÍTÁSI KOMPETENCIÁI**

Témavezető:

Szabó Csaba

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék

TARTALOMJEGYZÉK

ABSZTRAKT	3
1. BEVEZETÉS	4
2. KÍSÉRLET ELŐKÉSZÍTÉSE.....	7
3. A KÍSÉRLET FELÉPÍTÉSE	10
3.1 Előzmények	10
3.2 Keretrendszer	12
3.3 Hipotézisek.....	13
4. BIZONYÍTÁSOK ÉS JAVÍTÁSOK	13
5. EREDMÉNYEK ÉS KÖVETKEZTETÉSEK	20
6. TAPASZTALATOK ÉS DISZKUSSZIÓ	22
7. KUTATÁSBAN VÉGZETT SAJÁT MUNKA.....	24
HIVATKOZÁSOK.....	25
MELLÉKLETEK.....	28

ABSZTRAKT

Dolgozatunkban a matematika tanárszakos hallgatók bizonyítási kompetenciáját vizsgáljuk az *Algebra és Számelmélet 4* és *Algebra és Számelmélet 5* kurzus keretében. A bizonyítási készség alaposabb vizsgálata érdekében a bizonyítási kompetenciákat a Tall-féle három fázisra bontottuk: a bizonyítások megtanulása, a bizonyítások készítése és a bizonyítások ellenőrzése. Kísérletünk első részében a matematika tanárszakos hallgatók ($n=54$) két félév alatt leírt bizonyításainak vizsgálatát tűztük ki célul. A két félév során beadott több mint 1000 feladat átnézése, javítása és elemzése folyamatosan zajlott. A tárgy előadójával egyeztetve a rendelkezésre álló bizonyításokból kiválasztottunk 27-et, amelyek között matematikailag hibás, elvi hibás és mintamegoldás értékű bizonyítások is szerepeltek. Elkészítettünk egy általános kódrendszert, amely alapján a feladatok javítását egységesítve lehetett elvégezni. Arra is kíváncsiak voltunk, hogy felfedezhető-e különbség a matematika tanárszakos hallgatók bizonyítás alkotási és bizonyítás javítási készségei között. Ennek vizsgálatához a kísérlet második részében a kísérletben résztvevő hallgatóknak ($n=31$) a kialakított kódrendszer alapján 7-7 bizonyítást kellett kijavítaniuk. Ennek során a hallgatóknak el kellett dönteniük, hogy társaik a megoldásaikban használnak-e hibás lépéseket, hiányos indoklásokat és kimondanak-e hamis állításokat. A kísérlet első részében megállapítottuk, hogy az évfolyam körülbelül fele nem tanulta meg a bizonyításokat, és hogy az 54 diákból 42-en nem tudnak bizonyításokat készíteni, dolgozatunkban részletesen kitérünk ennek elemzésére. A kísérlet második részéből az derült ki, hogy a résztvevő 31 hallgatóból 22 le tudja ellenőrizni a bizonyítások helyességét. Összességében megállapítottuk, hogy matematika tanárszakos hallgatók hiányos analitikus és alapos felismerési bizonyítási képességekkel rendelkeznek.

Kutatásainkat az MTA-ELTE Matematika Tanuláselméleti- és Pszichológiai Kutatócsoport tagjaiként végeztük az ELTE DOKK támogatásával a „*XXI. századi kompetenciarendszer kidolgozása*” alprojekt keretében.

1. BEVEZETÉS

A bizonyítás fogalma központi szerepet tölt be a matematikában és annak oktatásában. A matematikai érvelés és ennek részeként a bizonyítás segíti a tanulókat és a tanárokat abban, hogy használják a matematika sajátos nyelvét, így saját ötleteiket is pontosan, matematikailag helyesen tudják megfogalmazni (Brodie, 2010; Carpenter és mtsai., 2003; Kilpatrick és mtsai., 2001; Stylianides, Stylianides és Shilling-Traina, 2013). A bizonyítások az egyetemi oktatásban komoly kihívások elé állítják mind az oktatókat, mind a hallgatókat, különösen a bevezető kurzusokon. (Herbert és mtsai., 2015). Az felsőoktatásba belépő tanulók számára az egyetemi matematika tananyag a középiskolai tananyagon túlmutató, az új fogalmak, definíciók és tételek sokasága miatt is nehéz. Emellett általános jelenség, hogy a tanárok egyetemi tanulmányaik megkezdésekor feltételezik a hallgatókról, hogy ismerik a bizonyítás folyamatát és képesek teljes bizonyításokat készíteni. Azonban ez sok diákra nem teljesül, így a bizonyítások műfaja továbbra is jelentős akadályt jelent számukra (Herbert és mtsai., 2015).

Régóta kutatják, hogy hogyan irányítsák és fejlesszék a tanárok a diákok gondolkodását, érvelési és bizonyítási technikáját (Fennema és mtsai., 1996; Franke és mtsai., 2009; Kazemi és Franke, 2004). Kimutatták, hogy a tanárok szakmai tudása döntő szerepet játszik a tanterv hatékony megvalósításában ezen belül a bizonyítási kompetenciák kialakításában. Ennek egyik oka, hogy a tananyag ismerete közvetlenül növeli a tanárok önbizalmát, ezáltal a tanítási képességeiket is. (Bobis és mtsai., 2012; Ball és mtsai., 2008; Ma, 1999; Rowland és mtsai., 2009; Watson és Mason, 2007). Többen megállapították, hogy a matematika tananyag széleskörű ismerete nagyban hozzájárul, hogy a tanárok segíteni tudjanak a diákoknak a bizonyítási igényük kialakításában (Stein és mtsai., 2008), és az anyagrészek közötti összefüggések felfedezésében (Rowland és mtsai., 2009).

Bár Ausztráliában a tantervekben kiemelt szerepet kap a bizonyítás műfaja, „a matematikai érvelés ritkán fordul elő sok matematikaórán” (Stacey és Vincent (2009) 271. o.). Ez a probléma nem csak Ausztráliára korlátozódik. Boero és Daputo (2007) azt találták, hogy Olaszországban „nagyon kevés tanár (és kevés tankönyv) várja el a diákoktól, hogy bizonyításokkal foglalkozzanak” (390. o.). Nem kell országhatárokat átlépni, hogy további példákat keressünk, ugyanis a 2020-ban kiadott Nemzeti Alaptantervbe visszakerült a 2012-ben elhagyott matematikai bizonyítás a középszintű érettségi követelmények közé, ezzel kiemelve a bizonyítások fontosságát. Sajnos osztálytermi keretek között a tanórai bizonyítások gyakran nem valósulnak meg. Sok általános iskolai tanár úgy gondolja, hogy az érvelés, különösen a bizonyítás meghaladja a diákok képességeit, ezért gyakran elhagyják (Stylianides és mtsai.,

2013). Stylianides és munkatársai (2013) arra is rámutattak, hogy itt egy ördögi körbe kerül az oktatás: a gyerekek csekély tapasztalata a matematikai bizonyításokkal hozzájárult azokhoz a kihívásokhoz, amellyel a tanárok találkoznak a matematikai érvelés tanítása során.

Több kutató is vizsgálta az általános iskolai tanárok matematikai érveléssel kapcsolatos ismereteit. Mind egyetértenek abban, hogy a bizonyítások megértése egy összetett és nehéz folyamat (Clarke, Clarke és Sullivan, 2012; Simon és Blume, 1996; Loong és mtsai., 2013; Stylianides, Stylianides és Philippou, 2007). Stylianides és munkatársai (2007) Cipruson 70 leendő általános iskolai tanárral végzett kísérletükben azt találták, hogy maguk a tanárok nehezen értik meg az induktív érvelést. Ausztráliában Clarke és munkatársai (2012) megfigyelték, hogy az általános iskolai tanárok ritkán használták az óráikon a bizonyítással kapcsolatos matematikai szaknyelvet és kifejezéseket (pl. következtetés, összevetés).

Maga a matematikai bizonyítás és annak tanulása-tanítása számos tanulmány középpontjában állt már (Stylianides, 2007; Brodie, 2010; Carpenter és mtsai, 2003; Franke és mtsai, 2009; Long és mtsai., 2012; Boero & Dapuerto, 2007; Simon & Blume, 1996; Stylianides, Stylianides, & Philippou, 2007; Clarke és mtsai., 2012; Stylianides, Stylianides, & Shilling-Traina, 2013). Ezek különböző keretrendszereken alapulnak. Andreas Stylianides (2007) például az általános iskolai tanárok bizonyításainak elemzésére dolgozott ki egy keretrendszert. Keretrendszerének célja az volt, hogy bemutassa, miként bizonyítanak, ha bizonyítanak, az általános iskolai osztályokban. Később Gabriel Stylianides (2010) kidolgozott egy keretrendszert, aminek segítségével az vizsgálható, hogy hogyan sajátítanak el új ismereteket a diákok a matematikaórákon. Rendszere alapját az általánosítás, a logikai érvelés és a bizonyítás fogalmak adták. Tall és munkatársai (2012) a bizonyítási struktúrákhoz egy hat fejlődési szakaszból álló keretrendszert mutattak be. Az ő keretrendszerük merőben más volt, mint a többi keretrendszer, olyan értelemben, hogy ők figyelembe vették a tanárok bizonyításokhoz való hozzáállását is. Más keretrendszerek kizárólag a tanulók bizonyításain, és az ezekről gyűjtött adatokon alapulnak (Lannin és mtsai, 2011; G. Stylianides 2010; Carpenter és mtsai, 2003; Tall és mtsai, 2012).

Az érvelés matematikai fontosságáról már gyakran beszámoltak (Borowski & Borwein, 2002 idézi Borwein, 2012; Hanna & De Villiers, 2011; Holton és mtsai, 2012; Johnson-Laird (1999; Magnani, 2001 idézi Arzarello és mtsai, 2012; Ferrando, 2006). A szakirodalom négyféle érvelést különböztet meg: indukció, dedukció, abdukció és adaptív érvelés. Az indukció során általános következtetéseket vonunk le konkrét tapasztalatainkból. (Borowski & Borwein, 2002). Például, az általános iskolás korú gyermekek korábbi tapasztalatokból vagy példák

feltételezéseket tesznek, amiből aztán (induktívan gondolkodva) következtetésre vagy következtetésekre jutnak. Ezeket a feltevéseket tesztelik, igazolják és finomítják, például társaikkal vagy tanáraikkal folytatott vitával. Ezáltal képesek meggyőződni a következtetéseik érvényességéről (Carpenter és mtsai, 2003; Schifter, 1999).

A dedukciót úgy definiálják, mint „a matematikára és a logikára jellemző érvelési folyamatot, amelyben egy következtetés szükségszerűen következik adott premisszákból, így az nem lehet hamis, ha a premisszák igazak” (Borowski & Borwein, 2002 idézi Borwein, 2012, 70. o.). Az általános iskolás gyermekek akkor használják ezt a fajta érvelési módot, amikor egy sejtést lépésről lépésre igazolnak, úgy, hogy közben korábbi ismereteikre hagyatkozva igazolják és tesztelik a sejtéseket. Ilyen például Carpenter és munkatársai (2003) leírásában, amikor egy gyermek egy diagram segítségével bizonyítja, hogy két páratlan szám mindig páros számot eredményez. Blanton és Kaput (2003) szerint a deduktív érvelés abban is megmutatkozik, hogy a gyermekek felismerik mások érveinek hibáit.

Holton és munkatársai (2012) az abdukciót úgy fogalmazták meg, mint egy adott eredmény magyarázatára szóló ötlet kifejlesztése, miközben ismerünk néhány szabályt, amelyek a problémát szabályozzák. Ez az ötlet ad egy kiindulópontot, amelyet aztán tesztelni lehet (De Waal, 2013). Pont úgy, ahogy egy gyermek folyamatosan próbálkozik és hibázik a problémák megoldása során, mielőtt szisztematikusabbá válik a megoldások keresésében (Ferrando, 2006).

A problémamegoldáshoz kapcsolódóan Kilpatrick és munkatársai (2001) egy sokkal tágabb fogalmat, az adaptív gondolkodást alkották meg az iskoláskorú tanulók matematikai gondolkodásának meghatározására. A matematikai érvelés három fő fajtáját, az indukciót, a dedukciót és az abdukciót magába foglaló adaptív érvelés „a saját gyakorlatok igazolásában és magyarázatában, valamint a gyakorlatokra való reflektálásban” (5. o.) érhető tetten. A gyerekek akkor alkalmaznak adaptív érvelést, amikor egy matematikai probléma értelmezéséhez tényeket, eljárásokat, fogalmakat és megoldási módszereket kapcsolnak össze.

Tall és munkatársai (2012) a bizonyítási kompetenciát három részre bontották: a bizonyítások készítésére, a bizonyítások javítására és a bizonyítások megtanulására/megértésére (Tall és mtsai., 2012). A matematikai gondolkodás szorosan összefügg a bizonyítási készséggel, így azt állították, hogy a matematikai gondolkodás fejlesztésével együtt fejlődik a bizonyítási készség is (Tall és mtsai., 2012). A matematikai gondolkodás fejlődésének három szintje van. Először a gyermek hasonlóságokat vesz észre, mintázatokot keres. Ezután a már ismert rendszert

próbálgatja, folyamatokat keres. Végül pedig elsajátítja a szükséges nyelvi készségeket a gondolatai és megfigyelései kifejezéséhez (Tall és mtsai., 2012). A tanulóknak az elméleti szempontok, különösen a bizonyítás megragadásában jelentkező kihívások a korábbi tanulási tapasztalatoknak tulajdoníthatóak, amelyek a képleteket a fogalmi megértéssel szemben előnyben részesíthetik. Stewart & O.J. Thomas (2019) szerint a lineáris algebrai bizonyításnak autonóm módon kell fejlődnie a kurzus keretein belül. Harel (2013, 2018) különböző ajánlásokat fogalmazott meg a diákok bizonyítási kompetenciájának fejlesztésére. Ilyen például, hogy a diákok aktívan vegyék ki részüket a bizonyítások készítéséből; engedjük, hogy hagyatkozzanak az intuícióikra; ösztönözzük őket a bizonyítások olvasására és hangsúlyozzuk a bizonyítások teljeskörű megértésének fontosságát. Ha ezekre az ajánlásokra már a középiskolai tanulmányaik során nagyobb hangsúly lett volna fektetve, a diákoknak már rendelkezniük kell a bizonyítások kompetenciáival (Cusi & Malara, 2007). A dolgozat a diákok megoldásainak kulcsfontosságú lépéseit vizsgálja, feltárva a bizonyítás megértéséről, a bizonyítás céljairól és a bizonyítások hatékony kommunikációjának módjáról alkotott nézeteiket. A matematikaoktatásban a bizonyítással kapcsolatos, egyre terjedő kutatások (pl. Hanna & Jahnke, 1996; Stylianides, 2007; Mariotti, 2006; Zaslavsky és mtsai., 2012; Stylianides, Stylianides & Moutsios-Rentzos, 2024; Basturk, 2010) ellenére a tanárszakos hallgatók körében a bizonyítással foglalkozó átfogó tanulmányok száma továbbra is elenyésző.

Ezért dolgozatunkban, egy 54 negyedéves egyetemi hallgatóból álló csoport meglátásait az általuk beadott bizonyításokról, vizsgáljuk a hallgatók bizonyítási képességeit. Kutatásunkban az *Algebra és Számelmélet* kurzusok (2020-2023) alatt felmerülő bizonyításokat és feladatmegoldásokat, az ezekben felmerülő hibákat és hiányosságokat vizsgáljuk. Célunk volt, hogy bemutassuk, hogyan gondolkoznak a diákok a matematikai bizonyítások bonyolultságáról. Továbbá kíváncsiak voltunk arra, hogy a hallgatók meg tudják-e érteni, le tudják-e írni, ki tudják-e javítani a matematikai bizonyításokat. A kutatást vezérlő átfogó kérdés a következő: Hogyan látják a diákok az algebrai bizonyítást, valamint teljes feladatmegoldást és észreveszik-e a hiányosság és a teljesség közti árnyalatokat?

2. KÍSÉRLET ELŐKÉSZÍTÉSE

A bizonyítási képesség kompetenciákra épül (Nemzeti Alaptanterv, 2020). Mi ebben a dolgozatban három különböző bizonyítási kompetenciát különböztetünk meg Tall és munkatársai (2012) keretrendszerére építve: a bizonyítás értését, a bizonyítás javítását és a

bizonyítás készítését. De hogyan lehet eldönteni mikor a helyes egy feladatmegoldás és mikor teljes egy bizonyítás? Több kutató is egyetért abban (Lannin és mtsai., 2011; G. Stylianides 2010; Carpenter és mtsai., 2003; Tall és mtsai., 2012, hogy ehhez előzetesen egy keretrendszert kell meghatározni, ami alapján tudatosan értékeljük ki a feladatokat. Ezek természetesen tantárgy és matematikai terület specifikusak, sőt még az életkort és korábbi tapasztalatot is figyelembe kell venni az összeállításkor. Így mi is elengedhetetlennek tartottuk, hogy rendelkezünk egy saját rendszerrel. Emiatt a munkánk első része a kategorizálás volt, a bizonyítások átnézésénél kiértékeljük a beadott bizonyításokat, összegyűjtöttük a legjellemzőbb, a leggyakoribb hibatípusokat. Majd a tantárgy előadójával közösen ezeket a hibatípusokat hat főkategóriába soroltuk. Ezután elkészítettünk egy általános javítási útmutatót, amelyet bizonyítás értékeléséhez, javításához bármely oktató vagy tanárszakos hallgató segítségül hívhat. Ennek alapját ez a hat kategória képezi. A főkategóriák az alábbiak: matematikai hiba, leírási hiba, nem odatartozó gondolat, hiányos végeredmény, hiányos indoklás, hibás indoklás.

Elsőnek külön kategóriába szedtük a matematikai pontatlanságokat, elszámolásokat. Ezek nem elvi hibák, akár véletlenül is bekerülhetnek a megoldásba, ezeket nevezzük matematikai hibának. Emellé még a leírási problémákat választottuk nem elvi hibának, amibe például egy olyan bizonyítás tartozik, amiben a lépések nem megfelelő logikai sorrendben követik egymást. Ez a két kategória zömmel kisebb hiányosságokat tartalmaznak, nem súlyos elvi tévedéseket.

A többi hibalehetőséget négy alpontra szedtük: nem odatartozó információ, hiányos végeredmény, hiányos indoklás és hibás indoklás. A nem odatartozó információ leírásánál például megkülönböztettük a témába vágó, de nem szükséges információkat: ilyen, mikor a diákok a primitív egységgyökök rendjének meghatározásakor a nem primitív egységgyökök rendjeit is kiszámolják; és az egyáltalán nem témába vágókat, például egy permutációs bizonyítás/feladatmegoldás során a Lagrange-tétel alkalmazása. Ehhez gyengén kapcsolódik a nem teljes, hiányos végeredmény is. Ez gyakran fordult elő lineáris kongruenciarendszerek megoldásának megadásakor. Az utolsó két kategória az indoklások minőségével foglalkozik. Elsőként a hiányos indoklást vizsgáltuk, ezeket úgy határoztuk meg, hogy ezek azok a feladatok, amiket további indoklással ki lehetne helyesen egészíteni teljes megoldással. Megkülönböztettük a kategórián belül a lépések átugrását, ezen belül is, hogy az átugrásokat követően olvasható-e még a megoldás vagy sem (értelmezhető-e vagy nem az olvasó/javító számára), és megkülönböztetjük a feltételek nem ellenőrzését, és a nem minden eset megvizsgálását. Utóbbi a nem teljes végeredménnyel is kapcsolatba hozható, de erős elvi

hibának tekintendő. Ha a megoldás nem egészíthető ki teljessé, hanem hallgató megoldásától különböző módon kell indokolni, akkor hibás indoklásról beszélünk. Ez például lehet hamis feltevés vagy rossz definícióból való kiindulás. Ennek durvább változata, amikor a hallgató konkrét példákból fogalmaz meg általánosítást és ezt tekinti teljes, helyes bizonyításnak pl. 24, 56, 264, 1392 mind olyan számok, amik 2-vel, 4-gyel és 8-cal is oszthatóak, tehát egy szám akkor osztható 8-cal, ha osztható 2-vel és 4-gyel. Ezen kívül jellemzően a hibás megfordítás fordult elő: mikor a hallgatók arra a következtetésre jutottak, hogy negyed- és magasabb fokú polinom irreducibilis, ha a racionális gyökteszt segítségével belátható, hogy nincs racionális gyöke. Végezetül pedig a bizonyítandó állítás felhasználását a megoldás során: felvételiben/érettségiben sokszor szereplő „bizonyítsuk be, hogy a szög adott nagyságú” feladatban a tanuló abból indul ki, hogy mekkora az adott szög; vagy éppen a nem bizonyított állítás használatát vettük külön. A bizonyítási hibák kategóriáit az 1. táblázatban összegeztük.

Nem elvi hiba	Leírási hiba	
	Matematikai hiba	
Elvi hiba		Hiányos indoklás, de kiegészíthető
		Gondolatmenet helyes, de a következtetés hiányos
		Példából következtet egy általános szabályra
		Nem oda tartozó gondolatok szerepelnek
		Nem bizonyított állítást használ
		Hamis állítást használ
		Hibás megfordítás

1. táblázat
A hibakategóriák és azok felbontása

3. A KÍSÉRLET FELÉPÍTÉSE

3.1 Előzmények

A kísérletünkben 31 hallgató vesz részt. Ők mind az Eötvös Loránd Tudományegyetem tanárszakosok számára meghirdetett *Algebra és számelmélet 5* (mmt5t1al7g) kurzusra járnak, melyet összesen 54 hallgató vett fel ebben a félévben (2023/2024/1). Kísérletünkben 31 hallgató vesz részt önkéntes alapon, az etikai engedély száma 2024/423. A résztvevők az egyetemi tanulmányaik kezdete óta rendszeresen bizonyítanak az algebra kurzusokon. Ezek az algebra kurzusok mind játékosítva voltak, félévenként eltérő módon.

A mintatanterv szerint az *Algebra és számelmélet 5* kurzushoz előfeltételül szolgáló *Algebra és számelmélet 1* kurzus 2020. szeptemberében indult el. Ebben a félévben a jegyszerzés pontrendszer alapú volt. A hallgatók megajánlott jegyet szerezhettek, ha teljesítettek bizonyos minimum követelményeket és mellette egy előre meghatározott pontszámot elérték. Ez számszerűen azt jelentette, hogy minden bizonyításra 6 pontot lehetett kapni, ha az teljes volt és ezekből 12 volt a félév során. A 12 teljesíthető bizonyításból legalább 6, legalább 5 pontos bizonyítást kellett írni, ami azt jelentette, hogy a hallgató csak nagyon apró hibát ejthetett, elvi hiba nem kerülhetett a bizonyításba. Ezek a hetente beadható bizonyítások az előadás során elhangzottak, így az előadáson részt vevők könnyített helyzetben voltak. Ezen kívül előre meghatározott jegyzetekre, szakirodalmakra támaszkodhattak a hallgatók.

Az *Algebra és számelmélet 2* kurzus kitűző rendszerben zajlott. Azok a tanulók kaphattak megajánlott jegyet, akik legalább 12 kitűzöt összegyűjtöttek. Kitűzöt úgy szerezhettek egy hallgató, hogy ha 3 hibátlan bizonyítást vagy feladatmegoldást beadott. A bizonyítások továbbra is elhangzottak az előadásokon, valamint a szakirodalmakat továbbra is lehetett használni. Hibátlan bizonyításnak az minősült, amiben nem volt elvi hiba, maximum kisebb elszámolás szerepelhetett benne. A hallgatói visszajelzésekből kiderült, hogy a kitűzőrendszer nem igazán közkedvelt.

A hallgatói visszajelzéseknek eleget téve, az *Algebra és számelmélet 3 és 4* kurzusok ismét pontszerre épültek. Továbbra is bizonyításokat és feladatmegoldásokat kellett megoldani heti rendszerességgel. A bizonyításokra maximum 6 pontot lehetett kapni, ahol 6 pontot ért egy teljes bizonyítás, 5 pontot egy apróbb hibákat tartalmazó. 3 vagy 4 pontot ért egy hiányos bizonyítás a hiányosság mértékétől függően és 1 vagy 2 pontot ért az, amiben csak helyes részgondolat szerepelt. A hallgatók számára segítségként továbbra is adott volt az előadás és az

előre egyezett szakirodalom. Ezen felül az Algebra és számelmélet 3 és 4 kurzusok sajátossága volt, hogy hallgatói javítócsoporthoz alakultak. A javítócsoporthoz egy adott héten az összes beadott bizonyítást és feladatot értékelték. Ez persze nem azt jelentette, hogy mindenki a legjobb barátjának megadta a teljes pontszámot, hanem elkészítettek egy előzetes javítási változatot, melyet aztán javításfelelősök véglegesítettek a gyakorlatvezetőkkel egyeztetve. Így a diákok nem csak a bizonyítási készségeiket fejleszthették, hanem a bizonyítás olvasási/értési és javítási képességeiket is. Ez jövődöbeli tanárként a szakmai fejlődéshez is jelentősen hozzájárult.

Az *Algebra és számelmélet* 5 kurzuson továbbra is a pontrendszer alapú oktatás zajlott. A heti bizonyítások helyett ebben a félévben 7 darab, négy-négy feladatos, emlékeztető dolgozat került megírásra. Ezek az előző félévek fontosabb tételeit idézik fel és az ott megszerzett tudást kéri számon. Emellett változatlanul heti rendszerességgel, de más formátumban fennmaradtak a beadható feladatok is. Ezek a feladatok ezen a szinten már inkább tekinthetők bizonyításnak, mintsem egy számolási feladatnak. Minden beadható feladatnál részletesen kell indokolni és teljes pontszámot csak az a hallgató kaphat, aki igényesen meg is indokolja a megoldását. Emiatt a 2023/2024 őszi félévben mind a beadható feladatokra, mind az emlékeztető dolgozatokra bizonyításként hivatkozunk.

	Keretrendszer	Bizonyítási feladatok	Minimum feltételek
Algebra és Számelmélet 1	Pontrendszer	12 db	Legalább 6 db szinte hibátlan bizonyítás beadása
Algebra és Számelmélet 2	Kitűzőrendszer	48 db	Legalább 36 szinte hibátlan bizonyítás beadása
Algebra és Számelmélet 3	Pontrendszer	12 db	Legalább 6 db szinte hibátlan bizonyítás beadása
Algebra és Számelmélet 4	Pontrendszer	12 db	Legalább 6 db szinte hibátlan bizonyítás beadása
Algebra és Számelmélet 5	Pontrendszer	28 db	20 db emlékeztető feladat

2. táblázat

Az Algebra és számelmélet kurzusok keretrendszerei, az egyes kurzusokon a hallgatóknak a bizonyítási feladatokhoz kapcsolódó teljesítéshez szükséges minimumfeltételek

Láthatjuk (2. táblázat), hogy a kísérletben résztvevő hallgatók már többféle tapasztalatot szereztek a bizonyítások fogalmával kapcsolatban. Az egyéb tantárgyakban is találkozniuk kellett bizonyításokkal, de azt az eltérő tapasztalatok miatt most nem elemezzük. Ezen háttérrel kezdődött meg az általunk vizsgált kurzus.

3.2 Keretrendszer

A kutatásunk miatt a 2023/2024 őszi félévben az előadóval egyeztetve abban állapodtunk meg, hogy minden beadott bizonyítást mi ketten, a dolgozat két szerzője javítja előadói felügyelet mellett. A vállalt szerepünk miatt szeptember óta gyűjtöttük és rendszereztük az évfolyam által beadott feladatokat. Átválogattuk a több, mint 1000 darab bizonyítást és ezeket az általunk korábban meghatározott kategóriákba soroltuk. A megoldott feladatok nagy száma miatt, tovább rendszereztük a beadott bizonyításokat. Ezeket az előző félévben beadott bizonyításokkal egészítettünk ki. Végül 27 darab megoldást választottunk ki oly' módon, hogy a megoldások tartalmazzák a legjellemzőbb típushibákat, és minden hibakategóriánkra legyen példa legalább egy bizonyításban. A feladatok kiválasztásának egy másik szempontja az volt, hogy minél több hibatípus minél több tananyagnál előkerüljön. Beválasztottunk teljes bizonyítást és olyat is, ami első ránézésre teljesnek tűnhet, de valójában teljesen hibás. Ebből a 27 feladatból egy anonim feladatbankot készítettünk, amelyet megosztottunk a kísérletben önként résztvevő 31 hallgatóval. Ez a 31 hallgató megkapta a kialakított útmutató rövidített, kódolt változatát. (1. ábra)

Javítási útmutató:

Az alapvető feladat eldönteni, hogy a megoldások jók vagy rosszak.

Arra kérünk Titeket, hogy 2-3 soronként jelöljétek az alábbi rendszer szerint mi történik.

- A) Hibátlan
- B) Nem tudom eldönteni, hogy jó vagy rossz, de szerintem...
 - 1. jó
 - 2. rossz
- C) Itt hiba van.
 - 1. Hiányos indoklás, de kiegészíthető
 - 2. Gondolatmenet helyes, de a következtetés hiányos
 - 3. Nem bizonyított állítást használ
 - 4. Hamis állítást használ
 - 5. Hibás megfordítás, következtetés
 - 6. Példából következtet egy általános szabályra
 - 7. Nem odatarozó információk szerepelnek

Kérjük, ami javítható hiba/hiány, azt javítsátok is ki.

Mindenki 7 megoldott feladatot kap, de nem kötelező mindet kijavítani.

1. ábra

Útmutató a bizonyítások javításához

Az ő feladatuk az volt, hogy minden bizonyításhoz 2-3 soronként odaírják az általuk vélt odatartozó hiba betűjelét, illetve ahol tudják, javítsák ki az észrevett hibákat. Ez a feladat pontszerzési lehetőséget kínált az évfolyamnak, de nagy örömünkre szolgált, hogy nem csak olyanok éltek a lehetőséggel, akiknek további pontokra volt szükségük a megajánlott jegy eléréséhez. Elmondásuk szerint azért választották ezt a feladatot, mert szakmai fejlődésük fontos építőkövének tekintik az ellenőrzést és értékelést, mint tanári kompetenciákat. Aki vállalta ezt a fajta pontszerzési lehetőséget, annak 7 megoldást kellett kijavítania a 27 lehetséges feladatból a megadott kódokkal.

Kiemelt figyelmet fordítottunk az anonimitásra. Ahhoz, hogy hallgatótársaink beadott bizonyításait felhasználhassuk a beleegyezésükre volt szükség. Ezt egy hozzájáruló nyilatkozat kitöltésével tudták nekünk megadni, melynek következményében 37 hallgató bocsátotta rendelkezésünkre megoldott feladatait.

3.3 Hipotézisek

Hipotéziseink az alábbiak voltak:

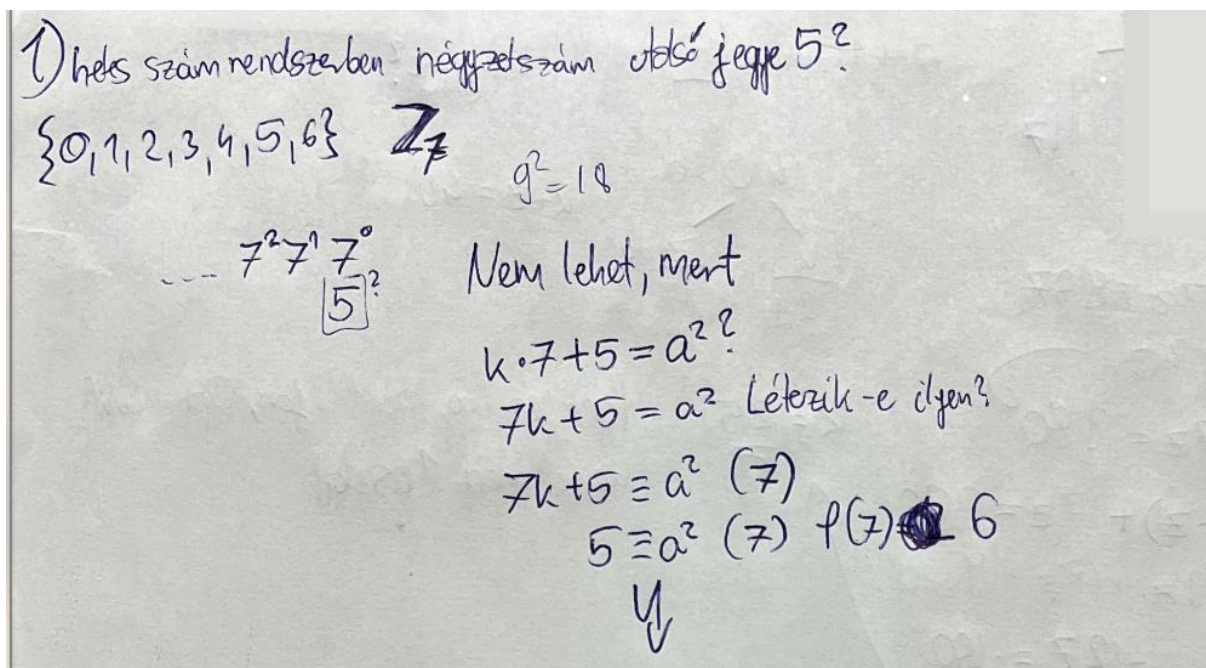
- A bizonyítási készség szorosan összefügg a bizonyítások értésével.
- Azok a tanulók, akik helyesen felismerik, hogy egy bizonyítás hiányos vagy hibás, nem feltétlenül tudják azt javítani vagy kiegészíteni.
- Amennyiben a feladat kiírás szerint hibás megoldásokat kell kijavítani, a tanulók egy része a javítandó feladatok között szereplő hibátlan bizonyításokban is hibát vél felfedezni.

4. BIZONYÍTÁSOK ÉS JAVÍTÁSOK

A következőkben bemutatunk két példát (2. és 3. ábra) a hibás bizonyításokra a feladatbankunkból és leírjuk, hogy mik ezekben a feladatokban a hibák; és mutatunk két példát a hallgatók által kijavított, hibakódolt bizonyításokra is (5. és 6. ábra). Ezeket a bizonyításokat természetesen nem csak a saját belátásaink szerint, hanem az algebra professzorral, a tárgy előadójával egyeztetve válogattuk ki. Így olyan bizonyításokat válogattunk be a feladatbankunkba, amikben gyakori hibák szerepelnek, mint például, a hiányos következtetés vagy a hibás megfordítás. Az első két bemutatott bizonyítás olyan, ami elsőre hibátlanak

tűnhet, így egy gyors vagy kevésbé alapos javító figyelmét akár el is kerülhetik a hibák. Ezek szépen, rendezetten leírt bizonyítások, látszik rajtuk, hogy alaposan végiggondolta a szerzőjük, hogy mit hova írjon, és meg van róla győződve, hogy a bizonyítása helyes. A 1. mellékletben további példák találhatók hibás bizonyításokra.

Az első példa egy számelmélet feladat az *Algebra és számelmélet 5* kurzusból, amely elsőéves tudással is megoldható:



2. ábra
Hallgató által megoldott számelmélet feladat

Ebben a bizonyításban a hallgató helyesen felfedezte, hogyha hetes számrendszerben vagyunk, akkor $\mathbb{Z}_7$ -ben kell gondolkodni. Jól felírta, hogy ha egy négyzetszám utolsó számjegye 5 lenne, akkor előállna $7k+5$ alakban. A kezdeti egyenlete tehát valóban az, amit be szeretnénk bizonyítani, viszont nem indokolta meg, hogy miért ez a kiindulási egyenlet. Innen ismét egy helyes lépés következik, modulo 7 veszi az egyenletet, azonban az indoklás innen is lemaradt. A hallgató utolsó előtti sora még mindig csak a feladat átfogalmazása, nem a megoldása. Ebből nem derül ki mivel van ellentmondásban a felírt összefüggés, vagyis miért nem lehet egy négyzetszám kongruens 5-tel, modulo 7. Emellett nem odatartozó információ is szerepel a bizonyításban, ami a témakörhöz kapcsolódik, azonban ehhez a feladathoz felesleges.

A második példa egy sokkal bonyolultabb csoportelméleti feladat az *Algebra és számelmélet 4* kurzusból:

8. A_4 : S_4 páros permutációi

$$|S_4| = 4! = 24 \Rightarrow |A_4| = \frac{24}{2} = 12$$

az identitás minden
részcsoportnak eleme

Lagrange-tétel: Legyen G véges csoport és $H \leq G$. Ekkor $|H| \mid |G|$.

12 pozitív osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 12 $\leftarrow A_4$ részcsoportjainak lehetséges elemszámai

Részcsoporthoz kell:

- zárt szorzásra
- nem üres
- minden elem inverze is eleme

egy elemen belül (amely
diszjunkt ciklusok szorzata)
a ciklusok egymás közötti
sorrendje nem számít

1 elemszámú részcsoport - 1 ilyen van: $(1)(2)(3)(4) \leftarrow$ identitás $\left(\begin{smallmatrix} \text{1. hely} & \text{2. hely} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{smallmatrix} \right)$

2 elemszámú részcsoport - 3 ilyen van: $(1)(2)(3)(4), (12)(34)$
 $(1)(2)(3)(4), (13)(24)$
 $(1)(2)(3)(4), (14)(23)$

$\left(\begin{smallmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{smallmatrix} \right) \leftarrow$ a 4 elemből
kiválasztom
azt a kettőt,
amelyik az
első ciklusba
kerül
 $\uparrow$
a ciklusok
egymás közötti
sorrendje nem
számít

3 elemszámú részcsoport - 4 ilyen van: $(1)(2)(3)(4), (123), (132)$
 $(243 - \text{nincs benne másodrendű})$ $(1)(2)(3)(4), (134), (143)$
 $(1)(2)(3)(4), (124), (142)$
 $(1)(2)(3)(4), (234), (243)$

$\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \leftarrow$ a 4 elemből
kiválasztok
hármát
 $\downarrow$
a másik ciklusba
ugyanaz a három
elem kerül, tehát
azok adódnak

4 elemszámú részcsoport - 1 ilyen van: $(1)(2)(3)(4), (12)(34), (13)(24), (14)(23)$

$(344 - \text{nincs benne harmadrendű})$

$\left(\begin{smallmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ed. 2} \\ \frac{2}{2} = 3 \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \end{smallmatrix} \right)$
 $\uparrow$
a 3 lehet-
séges
részcsoport-
elemből
kiválasztom
mind a
hármát

6 elemszámú részcsoporthoz: nincs ilyen
 identitásnak benne kell lennie
 a harmadrendű elemek párokban szerepelnek a részcsoporthozban
 (egymás inverzei)

$\Rightarrow$ páratlan sok elem
 $\downarrow$
 másodrendű elemnek is kell benne lennie

másodrendű elemből három van $\Rightarrow$ identitással együtt csak négy elem
 $\downarrow$
 harmadrendű elemnek is kell benne lennie

tehát biztosan van identitás, két harmad- és egy másodrendű elem, ez eddig 4 elem

szorozzuk össze az egyik harmadrendű elemet a másodrendűvel!
 ekkor egy új elemet kapunk (egyik szorzótényezőt sem kaphatom vissza, mert egyik sem az identitás, az identitást sem kaphatom meg, mert nem egymás inverzei, és a harmadrendű inverzét sem kaphatom meg, mert a harmadrendűt nem önmagával szorzom)
 ez eddig 5 elem

szorozzuk össze a másik harmadrendű elemet a másodrendűvel!
 ekkor egy új elemet kapunk: ($\leftarrow$) + nem kaphatom az 5. elemet sem, mivel a másodrendűt most egy másik harmadrendűvel szoroztam meg
 ez eddig 6 elem

a két újonnan kapott elem harmadrendű és nem egymás inverzei $\Rightarrow$ ezek inverzei még nincsenek a 6 elem között $\Rightarrow$ legalább 8 elem van
 $\rightarrow (ab)(cd)(abc) = (acd)(b)$
 $(ab)(cd)(acb) = (a)(bcd) \quad (acd) \neq (bcd) \text{ és } (acd) \neq (bcd)^{-1}$

12 elemszámú részcsoporthoz - ilyen van: maga az A_4

3. ábra

Hallgató által megoldott csoportelméleti feladat

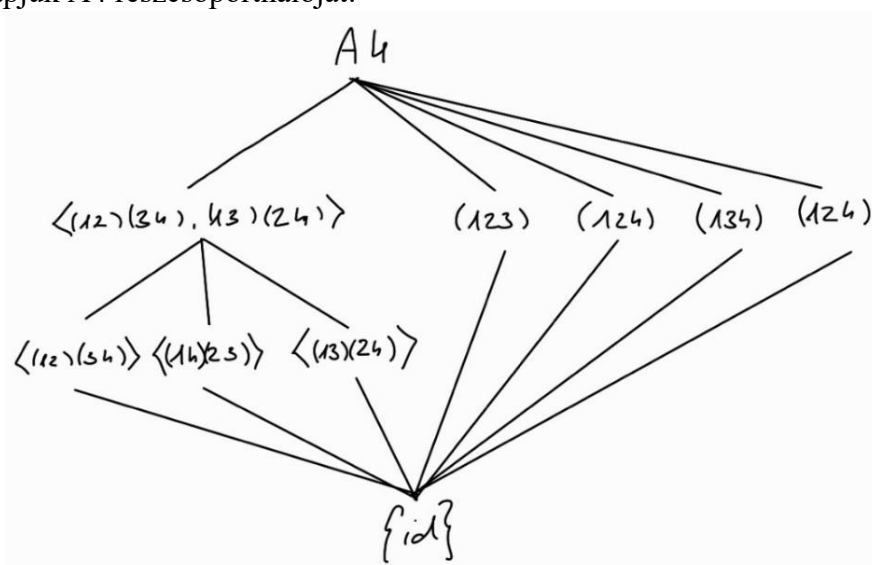
A 3. ábra bizonyításában a hallgató felsorolja a 12 osztóit, majd felsorolás szinten elkezd leírni adott elemszámú részcsoportokat. Ez a felsorolás jó irány, az viszont nem derül ki, hogy létezik-e több. Vegyük észre azt is, hogyha nem S_4 -ben, hanem S_6 -ban vizsgálnánk ugyanezt a feladatot, akkor már többféleképpen is előállhatnának az egyes elemszámú részcsoportok. A hallgató nem indokolja meg, hogy miért nem állhatnak elő másféleképpen a különböző elemszámú részcsoportok. Ez az egyik fő probléma. Ebben az esetben szerencséje volt a hallgatónak, mert az 1,2,3 elemszámú részcsoportok nem állnak elő másképpen. Nézzük meg a 4 elemszámú esetet! Itt a hallgató nem sorolja fel a négyhosszú ciklust és azt sem indokolja meg, hogy azért nem teszi mert páratlan paritású. Azt sem ellenőrzi, hogy az általa felírt ciklusok valóban részcsoportot alkotnak-e. A 6 elemszámú részcsoporthoz az indoklása mindaddig helyes, hogy „Szorozzuk össze a másik harmadrendű elemet a másodrendűvel!”.

Innentől kezdve a zárójeles rész továbbra is teljesül és az is, hogy az 5. elemet sem kaphatom meg. Az viszont nem derül ki, hogy az 5. elem inverzét miért nem. Tehát nem biztos, hogy 6 elemem van. Ha feltételezzük, hogy a másodjára kapott harmadrendű elem valóban nem egyenlő a már meglévő harmadrendű elemünkkel és nem is annak az inverze, akkor teljesülnek a hallgató által felírt szorzások. Ezáltal két újabb harmadrendű elemet és ezek inverzeit tudjuk megnevezni a részcsoporthoz belül. A betűkkel felírt szorzások megegyeznek a zárójelben leírt magyarázattal. A bizonyításból látszik, hogy a hallgató rendelkezik az alapvető ismeretekkel a témakörből és időt szánt a feladatra. Az is kiderült viszont, hogy a felsorolás nem egy hatékony bizonyítási módszer, ráadásul a hallgató ezt észre sem veszi.

A hivatalos, azaz elvárt megoldás a generátorrendszereik segítségével keresi meg a részcsoporthoz. A_4 -nek 12 eleme van, ezek 3 másodrendű, négy harmadrendű csoportot generálnak. A két elem által generált részcsoporthoz vizsgálata általában bonyolult, de A_4 esetében szimmetria megfontolások miatt elég az $\langle (12)(34), (14)(23) \rangle$, az $\langle (12)(34), (123) \rangle$, és az $\langle (123), (142) \rangle$ eseteket vizsgálni. Az első esetben egy négyelemű részcsoporthoz kapunk, a többi esetben egyszerű szorzásokkal megkapjuk, hogy a két elem magát A_4 -et generálja (4. ábra).

Például $(12)(34) \cdot (123) = (134)$ és $(134) \cdot (123) = (234)$ szorzásokból az elemek inverzeit és az egységelemet is figyelembe véve egy 7-nél nagyobb elemszámú részcsoporthoz lesz, ami már csak A_4 lehet. A harmadik eset vizsgálatát jelentősen megkönnyíti a második eset vizsgálata és fordítva.

Ezzel megkapjuk A_4 részcsoporthálóját:

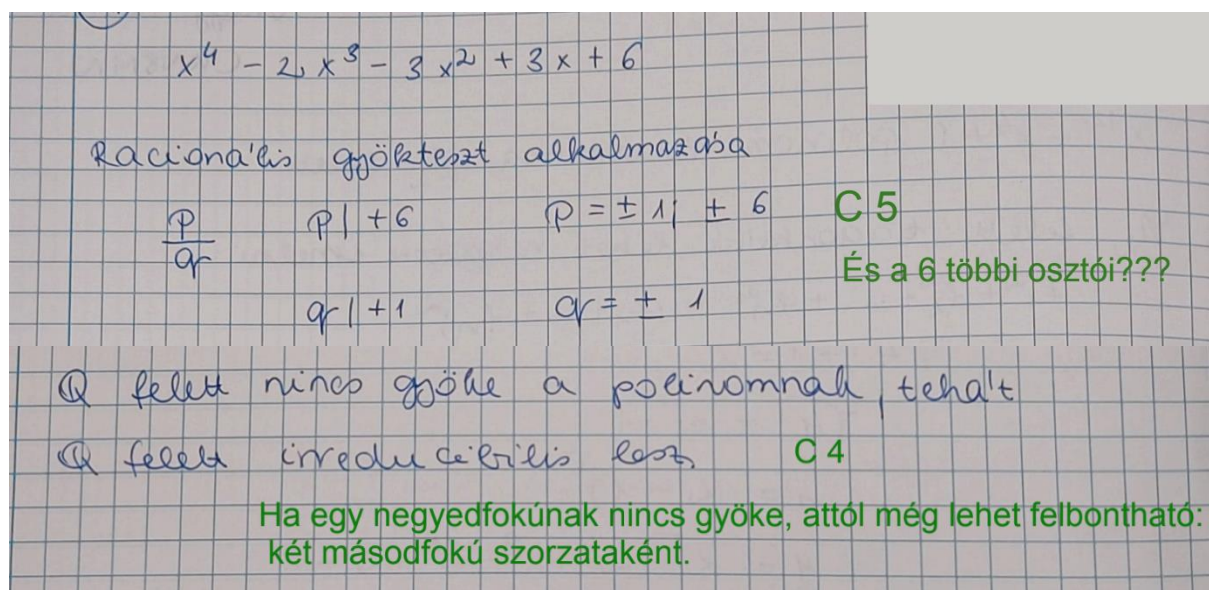


4. ábra

Csoportelméleti feladat rövid megoldása látható

A továbbiakban két példát mutatunk hallgatók által javított bizonyításokra (5. ábra és 6. ábra). Itt egy kicsit részletesebben mutatjuk be a bizonyításokat, hogy a javító hallgató munkáját kielemezhesük.

Az első feladat egy típusfeladat egy tipikus hibával a leírásában. Az 1000 beadott bizonyításnál több, mint 500 darabnál, azaz több, mint a bizonyítások felénél probléma volt a tételek és állítások hibás megfordítása. Erre látunk egy példát a 4. ábrán.



5. ábra

Hallgató által javított polinomokhoz kapcsolódó feladat

A bizonyítást író hallgató helyesen elkezdte a feladatot, a megoldás során várt racionális gyöktesztet alkalmazza. Elkövet egy nem elvi hibát az elején, amikor nem sorolja fel a 6 összes osztóját. Feltételezzük, hogy a bizonyítást készítő hallgató ezt tudja, csupán figyelmetlenség miatt hagyta ki. A javítást végző hallgató ezt helyesen jelölte is, habár nem a hibakódokat használta. A nagyobb probléma a feladat második felében jelentkezik. A bizonyítást író hallgató ugyanis belátta, hogy a polinomnak nincs racionális gyöke ez azonban még nem elégséges feltétel arra, hogy a polinom irreducibilis. Ehhez azt is be kéne látni, ahogy a javító is írta, hogy a polinom nem bomlik fel két másodfokú irreducibilis polinom szorzatára. A bizonyítás javítás során a javító hallgató helyesen odairja a C4, „Hamis állítást használ” és C5, „Hibás megfordítás, következtetés” kódokat. A javításban ezeket a kódokat vártuk volna, de jelen hallgató a C5-s kódot a racionális gyökteszt alkalmazásakor tünteti fel, nem a hibás megfordítás mellett.

A negyedik példánk egy testbővítés fokát kell meghatározni:

1.) $\left| \mathbb{Q}(\sqrt[17]{19}, \sqrt[19]{17}) : \mathbb{Q} \right|$

testbővítés

$\mathbb{Q}(\sqrt[17]{19}, \sqrt[19]{17})$ foka $\mathbb{Q}$ fölött $\sqrt[17]{19}$ és $\sqrt[19]{17}$ "együttes" minimálpolinomjának fokszáma $\mathbb{Q}$ fölött **A)**

minimálpolinomhoz kell:

eggyőgyűthetős

irreducibilis

gyöke a $\sqrt[17]{19}$ és $\sqrt[19]{17}$

$\sqrt[17]{19} = x$

$m_{\sqrt[17]{19}}(x) = x^{17} - 19$

$\sqrt[19]{17} = x$

$m_{\sqrt[19]{17}}(x) = x^{19} - 17$

C)1
Legkisebb ilyen fokú

fokszámok szorzástétel

$(17, 19) = 1 \Rightarrow (x^{17} - 19)(x^{19} - 17)$
a minimálpolinom, ennek foka 36

C)2

B)1

36 a foka a testbővítésnek

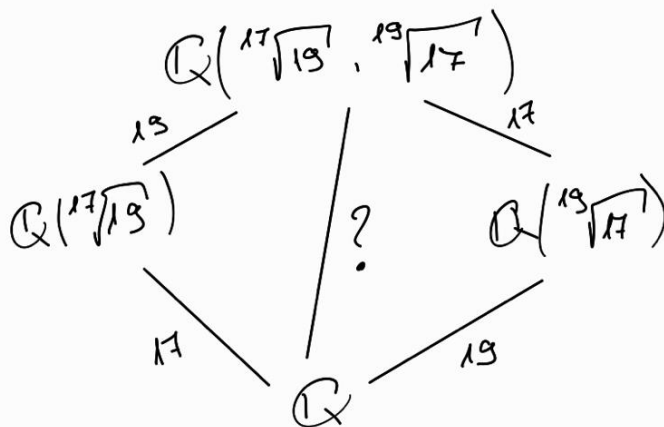
C)1
Mi felett irreducibilis
hiányzik még hogy tényleg ez a legkisebb fokú

eggyőgyűthetős ✓
gyöke a $\sqrt[17]{19}$ és $\sqrt[19]{17}$ ✓
irreducibilis ✓
(Schönemann-Eisenstein)

2.) $z = -2 + 2i$

6. ábra

Hallgató által javított testbővítési feladat



Többszörös szorzástétel:

$17 \cdot 19 = 323$

$? = 323$

7. ábra

Testbővítési feladat rövid megoldása

A 6. ábrán látható feladat első lépését a bizonyítást író hallgató jól írja le. Az „együttes minimálpolinom” kifejezés, mint matematikai fogalom, nem létezik, tehát tekinthetjük úgy, hogy a hallgató hamis állítást használ. A javítást végző hallgatót már az első gondolatával csőbe húzza. Következő lépésként a bizonyító hallgató helyesen felsorolja a minimálpolinom kritériumait, a minimálpolinomokat az egy-egy elemmel bővített testek esetében jól meghatározza, azonban a kritériumokat már nem ellenőrzi. Ezek után a bizonyító hallgató a feladatmegoldás során elvárt tételt alkalmazza, sajnos hibásan. Ehhez a gondolathoz a javító hallgató a C2, vagyis a „Gondolatmenet helyes, de a következtetés hiányos”, hibakódot írta, ami nem a megfelelő hibakód. Az „együttes minimálpolinom”, bár nem létezik ilyen, de a hallgató értelmezésében véve valójában nem a megoldás során leírt minimálpolinom. Ennek a polinomnak valóban 36 lenne a fokszáma, de ez nem a keresett minimálpolinom. A feladatban eredetileg keresett minimálpolinom foka ugyanis a két minimálpolinom fokának szorzata, azaz 323 lenne. (7. ábra) A bizonyító által megadott minimálpolinom fokszámát a javítást végző hallgató megkérdőjelezi, a B1-s, „Nem tudom eldönteni, de szerintem jó” kóddal jelöli, mégis hisz a bizonyítást író hallgatónak. Ez betudható a bizonyító részletes feladatmegoldásának és a kritériumok pontos felsorolásának, és a végeredmény ellenőrzésének.

5. EREDMÉNYEK ÉS KÖVETKEZTETÉSEK

A 3. táblázatban összeszedtük, hogy a bizonyítások során melyik feladatokban milyen típusú hibákat követtek el a hallgatók. A 27 bizonyításban összesen 49 hibát találtunk. A 27 bizonyítást a 31 jelentkező által beadott bizonyításokból válogattuk és több, mint 20 különböző ember bizonyítása került be a kijavítandó feladatok közé. A kijavítandó feladatok között 1 hibátlan volt, a hibák eloszlását a 3. táblázatban láthatjuk.

A feladatok jellegéből adódik, hogy egy feladatban csak néhány hibatípust lehet elkövetni. A táblázatból látható, hogy a 27 feladatból 16-ban van hiány, akár indoklásban, akár következtetésben. Jellemző még a hibás megfordítás, ez 8 bizonyításban szerepel. A hiányos indoklásnál nehéz eldönteni, hogy a hallgató nem vette észre, hogy kell még valamit bizonyítani, vagy csak nem írta oda, mert azt gondolta, hogy ez beleértendő. Az első eset komoly hiba, a másodikat lehetne leírási hibának tekinteni, azonban ezt a leírt bizonyításokból nem tudjuk eldönteni. A következő leggyakoribb hiba a hibás megfordítás. A 8 feladatból 4 a polinomok témaköréből volt és tévesen következtetett a gyök nem létezéséből a felbonthatatlanságra.

A bizonyítási típusokból az évfolyam hibázott mind az induktív, mind a deduktív, mind az abduktív bizonyítási típusban. Ebből látszik, hogy nem egy bizonyítási típusra korlátozódik a hallgatók hiányossága, ezért a bizonyítási kompetenciák általános fejlesztésre szorulnak. Ez megerősíti Stylianides és munkatársai (2007) eredményét, akik ugyanezt állapították meg tanárszakos hallgatók körében az induktív bizonyításokkal kapcsolatban.

Hibakategóriák	Feladatok száma	Előfordulás gyakorisága	Százalék (%)
Hiányos indoklás, de kiegészíthető	2., 5., 7., 10., 15., 17., 20., 21., 26.	9/27	33,33
Gondolatmenet helyes, de a következtetés hiányos	2., 5., 6., 12., 14., 15., 18., 20., 23., 24., 27.	11/27	40,77
Nem bizonyított állítást használ	13., 19.	2/27	7,4
Hamis állítást használ	4., 8., 10., 16., 17., 23.	6/27	22,22
Hibás megfordítás	1., 8., 14., 16., 17., 22., 24., 27.	8/27	29,63
Példából következtet egy általános szabályra	12., 15., 22., 26., 27.	5/27	18,52
Nem odatartozó gondolat	12., 18., 19., 27.	4/27	14,81
Hibátlan vagy nem elvi hiba	3., 9., 11., 25.,	4/27	14,81

3. táblázat
Egyes hibakategóriák előfordulása és annak eloszlása

Nem készítettünk táblázatot a javításokról, mert a résztvevő hallgatók jelentős többsége, 31 hallgatóból 22, le tudta ellenőrizni a bizonyítások helyességét, mindenhol a megfelelő kódot írta be. A 22 hallgatóból 13-an helyesen ki is egészítették a hibás bizonyításokat a többiek nem fektetettek bele energiát. Mindössze kétszer fordult elő, hogy a javító hibásan egészítette ki a bizonyítást. A javítási kompetencia fontos tanári készség, így elmondhatjuk, hogy ezt a kompetenciát már magas szinten elsajátították a hallgatók. Ezzel kicsit ellentmondunk a

bizonyítás készítéseknél tapasztalt hiányoknak, hiszen Blanton és Kaput (2003) értelmezésében a hibák észrevétele és javítása magával vonja a deduktív következtetés képességét.

Vizsgálatunkban Tall és munkatársai (2012) keretrendszerét használtuk, ami 3 fázisra bontja a bizonyítási kompetenciát, bizonyítások megértésére, bizonyítások készítésére és bizonyítások javítására. Ezek közül mi kettőt biztosan vizsgáltunk. A bizonyítások készítését azzal, hogy bizonyításokat és feladatmegoldásokat kellett beadniuk, a bizonyítások javítását azzal, hogy a beadott bizonyításokat ki kellett javítaniuk. Felmerül a kérdés, hogy a bizonyítások megértését vizsgáltuk-e. Ha a bizonyítások megértése alatt azt értjük, hogy a hallgatók észreveszik a leírt bizonyításokban a hibákat, akkor elmondható az évfolyamról, hogy értik a bizonyításokat. Ha azonban, a bizonyítások megértése alatt azt értjük, hogy a hallgatók le tudják írni helyesen a bizonyításokat, akkor a megértési készségük nem felel meg az elvárt követelményeknek. A beadott munkák alapján a hallgatók a Tall-féle megértés mindhárom szintjét elérték (Tall és mtsai., 2012), mégsem sajátították el mindhárom bizonyítási kompetenciát.

6. TAPASZTALATOK ÉS DISZKUSSZIÓ

Dolgozatunkban a tanárszakos hallgatók bizonyítási kompetenciáit vizsgáltuk a Tall-féle keretrendszer alapján. Ehhez a 2020-ban induló matematika tanárszakos évfolyam 31 hallgatójának több, mint 1000 beadott bizonyítását és feladatmegoldását vizsgáltuk. Ezeket a bizonyításokat az *Algebra és számelmélet 3*, *Algebra és számelmélet 4* és *Algebra és számelmélet 5* kurzusok keretében adták be. Ezt a beadott több, mint 1000 bizonyítást három féléven keresztül a dolgozat két szerzője javította. Ezekből a bizonyításokból kiválasztottunk 27-et, amiből 31 hallgató 7-7-et kijavított. Megállapítottuk, hogy az évfolyam bizonyítás javítási kompetenciája nagyon jó, bizonyítás készítési kompetenciája hiányos.

A 27 feladatot közösen a tárgy előadójával választottuk ki, úgy, hogy a leggyakrabban előforduló hibák lehetőleg reprezentatív módon forduljanak elő. A kiválasztásnak sok szempontja volt. A feltételek ellenőrzését nem tettük be a hibacsoportok közé, mert láttuk, hogy az évfolyamnak már nem okoz gondot. Az ötödik félév végére a 31 hallgatónál kétszer fordult elő ez a hiba. Esetszétválasztásos feladatmegoldásoknál még gyakori, hogy nem minden esetet vizsgálnak meg a kutatásban résztvevő hallgatók. Észrevettük, hogy negyedévben, az *Algebra és számelmélet 5* kurzus alatt beadott bizonyításokban még mindig az esetek több, mint felében, azaz ezerből több mint 500 darabban, előfordul az állítások hibás megfordítása. Megfigyeltük,

hogy azok a hallgatók, akik nem járnak előadásra gyakran esnek bele a nem bizonyított állítás használata kategóriába, mert a szakirodalmakra támaszkodnak. Ugyanis, azok a hallgatók, akik nem járnak előadásra a feladatmegoldásoknál általában címszavak alapján keresnek az ajánlott irodalomban. Így, gyakran előkerülnek az adott bizonyításhoz nem kapcsolódó tételek, állítások, lemmák. Ezekből a lemmákból próbálnak adaptív módon bizonyításokat készíteni. Tehát esetükben nem mutatható ki sem a bizonyítás készítési, sem a bizonyítás megértési kompetencia megléte. Annak ellenére, hogy az évfolyam sok éve bizonyít (lásd 2. táblázat), még mindig vannak hiányos bizonyítások, pontatlanságok. A beszélgetések alapján sok esetben a hallgatók, ha úgy érzik, hogy ha egy bizonyításuk nem teljes, akkor inkább nem adják be, pedig részpontoszámot kaphatnának érte. Ez a be nem adás nem tekinthető érdektelenségnek vagy lustaságnak, mert utána előadáson és gyakorlaton rákérdeznek, hogy egy-egy bizonyítást hogyan kellett volna helyesen megoldani. Tehát a magyar matematikatanárszakos hallgatókra is érvényesek Herbert és mtsai. (2015) megállapításai, hogy bizonyítási kompetenciák nélkül érkeznek a hallgatók a középiskolából az egyetemre, ahol négy év alatt sem sikerült elsajátítaniuk a bizonyítás készítésének képességét. Az *Algebra és számelmélet 4 és 5* kurzusok során egyértelműen látszott, hogy a baráti társaságokon belül a hallgatók összedolgoznak. Ez esetenként azzal járt, hogy ugyanazt a hibát követték el a beadott bizonyításokban. A leírások alapján nem egymásról másoltak, így ezek a hibák tekinthetők kollektív hibáknak, amiket még együtt, közösen sem vesznek észre. Érdekes, hogy amikor javítottak, a többieknél az ugyanilyen típusú hibákat észrevették. Ez az észrevétel még jobban szétválasztja a bizonyítás készítési és ellenőrzési kompetenciákat.

Összességében láthatjuk, hogy a diákok bizonyítás javítási készsége jobb, mint bizonyítás alkotási készségük. A Tall és mtsai. (2012) féle keretrendszernek ez a két szintje élesen elválík a kijavított bizonyítások alapján. A további vizsgálatokban érdemes lenne finomítani a bizonyítások megértésének kompetenciáját. Addig, amíg egy hallgató hibásan bizonyít és hibátlanul javít, nem beszélhetünk egy egységes megértés fogalomról. Ez a látszólagos ellentmondást véleményünk szerint új keretrendszert és további kutatásokat igényel.

7. KUTATÁSBAN VÉGZETT SAJÁT MUNKA

Az Algebra és számelmélet kurzusokon az órák tartásának kivételével a teljes kutatást mi, a két szerző végeztük. Két féléven át kijavítottuk az évfolyam összes beadandó házi feladatát. A hibákat csoportosítottuk, majd a szakirodalom alapján kategóriákba osztottuk. A több, mint 1000 beadott munkából, az előadóval közösen, kiválasztottuk azt a 27-t, amely a kutatás tárgya volt. Elkészítettünk egy javítási-kódolási útmutatót. Az évfolyamtársaink által beadott javításokat felülvizsgáltuk, a kódrendszer szerint kategorizáltuk és kielemeztük.

Kutatásainkat az MTA-ELTE Matematika Tanuláselméleti- és Pszichológiai Kutatócsoport tagjaiként végeztük az ELTE DOKK támogatásával a „*XXI. századi kompetenciarendszer kidolgozása*” alprojekt keretében.

HIVATKOZÁSOK

- Arzarello, F. Bussi, M., Leung, A., Mariotti, M., & Stevenson, I. (2012). Experimental approaches to theoretical thinking: artefacts and proofs. In Gila Hanna & Michael de Villiers (Eds). *Proof and proving in mathematics education* (pp. 97-143): Springer.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Basturk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions of mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298.
- Blanton, Maria L., & Kaput, James J. (2003). Developing Elementary Teachers' Algebra Eyes and Ears". *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-76.
- Bobis, J., Higgins, J., Cavanagh, M., & Roche, A. (2012). Professional knowledge of practising teachers of mathematics. In B. Perry, T. Lowrie, T. Logan, A. MacDonald & J. Greenlees (Eds.), *Research in mathematics education in Australasia 2008–2011* (pp. 313–341). Rotterdam: Sense Publishers.
- Boero, P., & Dapueto, C. (2007). Problem solving in mathematics education in Italy: Dreams and reality. *ZDM*, 39(5-6), 383-393.
- Borowski, E., & Borwein, J. (2002). *Collins dictionary of mathematics*: Collins.
- Borwein, J. (2012). Exploratory experimentation: Digitally-assisted discovery and proof. In Gila Hanna & Michael de Villiers (Eds). *Proof and proving in mathematics education* (pp. 69-96): Springer.
- Brodie, K. (Ed.) (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. New York Dordrecht Heidelberg.
- Carpenter, T. P., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, UK: Heineman.
- Clarke, D. M., Clarke, D. J., & Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian Curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 17(3), 28–32.
- Cusi, A., & Malara, N. (2007). Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions. In Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 591-600).
- Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 403-434.
- Ferrando, E. (2006). *The abductive system*. Paper presented at the Proceedings 30 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prague, Czech Republic.
- Franke, M. L., Webb, N. M., Chan, A. G., Ing, M., Freund, D., & Battey, D. (2009). Teacher Questioning to Elicit Students' Mathematical Thinking in Elementary School Classrooms. *Journal of Teacher Education*, 60(4), 380-392. doi: 10.1177/0022487109339906
- Hanna, G. & De Villiers, M. (2011). *Proof and proving in mathematics education*: Springer.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. *International Handbook of Mathematics Education: Part 1*, 877-908.

- Harel, G. (2013). Intellectual need. In K. Leatham (Ed.), *Vital direction for mathematics education research* (pp. 119–151). New York: Springer.
- Harel, G. (2018). Types of epistemological justifications, with particular reference to complex numbers. In J. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: an international perspective* (pp. 35–49). Dordrecht: Springer.
- Harel, G., & Weber, K. (2020). Deductive reasoning in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 183-190.
- Herbert, S., Vale, C., Bragg, L. A., Loong, E., & Widjaja, W. (2015). A framework for primary teachers' perceptions of mathematical reasoning. *International Journal of Educational Research*, 74, 26-37.
- Holton, D., Stacey, K., & FitzSimons, G. (2012). Reasoning: A Dog's Tale. *Australian Mathematics Teacher*, 68(3), 22–26.
- Johnson-Laird, P. N. (1999). Deductive reasoning, *Annual Review of Psychology*, 50(1), 109–135.
- Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In T. Romberg, & E. Fennema (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Kazemi, E., & Franke, M. L. (2004). Teacher learning in mathematics: Using student work to promote collective inquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(3), 203-235.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning*. NCTM.
- Long, C. T., DeTemple, D., & Millman, R. (2012). *Mathematical reasoning for elementary teachers* (6th ed. ed.). Boston, MA.: Pearson Addison Wesley.
- Loong, E., Vale, C., Bragg, L., & Herbert, S. (2013). Primary school teachers' perceptions of mathematical reasoning. In *Mathematics education: Yesterday, today and tomorrow. Proceedings of the Thirty-Sixth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 466–472). Melbourne: MERGA.
- Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Magnani, L. (2001). *Abduction, reason, and science. Processes of Discovery and Explanation*. Dordrecht: Kluwer Academic/Plenum.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Brill.
- Nemzeti Alaptanterv. (2012). A Kormány 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelethe a Nemzeti Alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról. Magyar Közlöny, 2012/66. szám, 10635–10877.
https://www.oktatas.hu/koznevels/kerettantervek/nemzeti_alaptanterv_2012

- Nemzeti Alaptanterv. (2020). A Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti Alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról. Magyar Közlöny, 2020/17. szám, 292-441.
https://www.oktatas.hu/koznevels/kerettantervek/nemzeti_alaptanterv_2020
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the knowledge quartet*. London: Sage Publications.
- Schifter, D. (1999). Reasoning about operations: Early algebraic thinking in Grades K–6. In L. Stiff & F. Curcio (Eds.), *Developing mathematics reasoning in grades K–12: 1999 NCTM 1999 Yearbook* (pp. 62–81). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(1), 3–31.
- Stacey, K., & Vincent, J. (2009). Modes of reasoning in explanations in Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 72(3), 271–288.
- Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Thinking and Learning*, 10(4), 313–340.
- Stewart, S., & Thomas, M. O. (2019). Student perspectives on proof in linear algebra. *ZDM*, 51, 1069-1082.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 289–321.
- Stylianides, G. J. (2010). Engaging secondary students in reasoning and proving. *Mathematics Teaching* 219, 39-44.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: a systematic review. *ZDM–Mathematics Education*, 56(1), 47-59.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers’ knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145–166.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Shilling-Traina, L.N. (2013). Prospective teachers’ challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education* 11, 1463-1490.
- Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*, 13-49.
- Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4), 205–215.
- Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study*, 215-229.

MELLÉKLETEK

1. melléklet

4.) $\left| \mathbb{Q}(\sqrt[17]{19}, \sqrt[19]{17}) : \mathbb{Q} \right|$

testbővítés

$\mathbb{Q}(\sqrt[17]{19}, \sqrt[19]{17})$ fele $\mathbb{Q}$ fölött $\sqrt[17]{19}$ és $\sqrt[19]{17}$ Y minimálpolinomjainak
fokszáma $\mathbb{Q}$ fölött

minimálpolinomhoz kell:

eggyőgyűthetős

irreducibilis

gyöke a $\sqrt[17]{19}$ és $\sqrt[19]{17}$

$\sqrt[17]{19} = x$

$m_{\sqrt[17]{19}}(x) = x^{17} - 19$

$\sqrt[19]{17} = x$

$m_{\sqrt[19]{17}}(x) = x^{19} - 17$

„együttes”

fokszámok szorzástétele

$(17, 19) = 1 \Rightarrow (x^{17} - 19)(x^{19} - 17)$
a minimálpolinom,
ennek fokszáma 36

eggyőgyűthetős ✓
gyöke a $\sqrt[17]{19}$ és $\sqrt[19]{17}$ ✓
irreducibilis ✓

36 a fokszáma a testbővítés
nem

(Schönemann-Eisenstein)

2.) $Z = -2 + 2i$

2. melléklet

4.) $\mathbb{D}_{50}$

$H = \langle tf^5, tf^{25}, tf^{37} \rangle$

$tf^5 \cdot tf^{25} = f^{-5} \underbrace{t t}_{id} f^{25} = f^{20}$

$tf^5 \cdot tf^{37} = f^{-5} \underbrace{t t}_{id} f^{37} = f^{32}$

$tf^{25} \cdot tf^{37} = f^{-25} \underbrace{t t}_{id} f^{37} = f^{12}$

$(12, 20, 32, 50) = 2$

$\Rightarrow f^2$ előáll

Pl.: $f^{12} f^{12} f^{12} f^{12} = f^{48} = f^{-2} \Rightarrow f^{-2}$ előáll

Ha f^2 előáll, akkor $f^4, f^6, f^8 \dots f^{páros}$ is előáll.

$tf^5 f^2 = tf^7$

$tf f^2 = tf^3$

$\Rightarrow$ minden páros előáll, ezért $tf^3, tf^5, tf^7 \dots tf^{páratlan}$ is előáll,
melyekből külön-külön 25 db van. Teljesen összesen 50 elem van.

③ $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{R}$ felett

7. 2H

a) $x^3 + 2x^2 - 2x - 3$

rac. gyökeket: $\frac{k}{c}$ gyök lehet, ha $k|3$ és $c|1$

$$\frac{k}{c} \in \{\pm 1, \pm 3\}$$

$$1: -2 \neq 0$$

$$-1: \text{teljesen } 0 = 0 \checkmark$$

$$3: 36 \neq 0$$

$$-3: -6 \neq 0$$

$$2x^2 - 3 = 2x^2 + 3$$

$$-2x^2 + 3 = -3$$

~~Mivel racionális~~-1 gyöke $\Rightarrow (x+1)$ kiemelhető $\Rightarrow$ nem felbontatható $\mathbb{Z}$ és $\mathbb{R}$

b) $x^4 - 3x^3 - 2x + 1$

rac. gyökeket: $\frac{k}{c}$ gyök, ha $k|1$, $c|1$

$$\frac{k}{c} \in \{-1, 1\}$$

$$1: 1 - 3 - 2 + 1 = -3 \neq 0$$

$$-1: 1 - 3(-1) - 2(-1) + 1 = 1 + 3 + 2 + 1 = 7 \neq 0$$

Másodfokú irreducibilis polinomok $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ felett: x^2+1 és x^2+x+1
(gyökmentesek)

$$(x^2+1)(x^2+1) = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$(x^2+1)(x^2+x+1) = x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$(x^2+x+1)(x^2+x+1) = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x =$$
$$= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

Mivel egy negyedfokú polinom vagy egy első- és egy harmadfokú vagy két másodfokú szorzatra bomlhat fel, ezért rac. gyöktesztből meg kellett volna kapnom az elsőfokú tagot, tehát max. 2 másodfokú szorzatra lehetne bontani. Ezért viszont akkor irreducibilis lehetne, mert ha nem az, akkor elsőfokúra bomlana, amiről már beláttam, hogy nincs. A másodfokú irreducibilis polinomot viszont ismertem, ezért bármilyen szorzatra nem azt kapom, ami nekem kell, vagyis

$$x^4 - 3x^3 - 2x + 1 \text{ irreducibilis.}$$