EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
Matematika Doktori Iskola (vezető: Dr. Jordán Tibor)
Matematikadidaktika program (programfelelős: Dr. Vancsó Ödön)

Matematikai kompetenciák hosszú távú fejlesztése

Doktori értekezés

Készítette:
Dukán András Ferenc
ELTE TTK Matematikai Intézet
Matematikatanítási és Módszertani Központ

Témavezetők:

Szabó Csaba DSc
egyetemi tanár

Vásárhelyi Éva CSc
nyugalmazott egyetemi docens

2022.
DOI: 10.15476/ELTE.2022.064

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Kutatásom fókuszában kezdetben a középiskola és a felsőoktatás közötti átmenet sokat vizsgált problémája állt. A témában gimnáziumi tanításom, és az ELTE TTK matematika kritériumtárgyának tanítása során szereztem saját tapasztalatokat. Magyarországon alapvetően mindenkinek érettségiznie kell matematikából, azaz a középszintű matematika érettségi vizsgakövetelményei általánosan elvárt kimeneti követelmények a középiskolában. Arra voltam kíváncsi, hogy az egyetemre frissen felvett hallgatók bemeneti tudása és ezek a követelmények milyen viszonyban vannak egymással. Személyes tapasztalatom megegyezik számos egyetemi kollégám tapasztalatával: bár Magyarországon meglehetősen részletes és pontosan definiált a középiskolai matematika tananyag, arra nem minden esetben lehet építeni a felsőoktatásban. Azzal a céllal vágtam bele a doktori tanulmányaimba, hogy a magyar matematikaoktatás jelenlegi gyakorlatából kiindulva lehetséges alternatív utakat találjak a matematikai kompetenciák fejlesztéséhez, és, hogy olyan tanítási módszert dolgozzak ki, amely segíti, hogy a diákok középiskolai matematikaórái hasznosítható tudást biztosítsanak számukra.

Először a szubjektív benyomásoknál pontosabb képre volt szükség a középiskolát frissen elhagyó diákok tudásáról. Ehhez megvizsgáltam, hogy mi a gyakorlat több nagyobb magyarországi felsőoktatási intézményben. Arra jutottam, hogy az

ELTE-hez hasonló felzárkóztató/bevezető matematikai kurzus máshol is van, és ez a kurzus máshol is kiváltható az első szemeszter előtti vagy szemeszter elején megírt tesztekkel. Tehát rendelkezésre álltak azok a bemeneti mérések, amik az egyetemen elvárt tudással kapcsolatosak. Ezeket a méréseket vizsgáltam meg azzal a szemmel, hogy mik azok a feladatok, amelyek annak ellenére okoznak nehézséget az új hallgatóknak, hogy minden magyar középiskolában végzett diák tanulta ezeket. Ezt követően azt vizsgáltam meg, hogy vajon ezek a feladatok gondot okoznak-e a középiskolás diákok számára akkor, amikor frissebbek az ismeretek, tehát az elsajátításukhoz közeli időpontban.

A kiértékelés után egy olyan tanítási kísérletet dolgoztam ki, amelytől azt vártam, hogy alkalmazásával fejleszthető a matematikai gondolkodásnak az érettségi után is használható része. A munka záró szakasza ennek a tanítási kísérletnek a megvalósítása, a kísérlet során keletkezett dokumentumok kiértékelése, illetve a kísérlettel kapcsolatos tanulságok megfogalmazása volt. Legvégül pedig a hipotéziseim közül az általam alátámasztott téziseket össze gyűjtöttem, illetve jelen értekezést készítettem el.

A 2. fejezetben négy egyetem bemeneti mérésein keresztül mutatok be a középfokú- és felsőoktatás közötti átmenmenet során jelentkező, matematika tantárgyi tudással kapcsolatos problémákat. Ehhez a BGE, a BME, az ELTE és az SZTE mintegy 2100 hallgatójának eredményeit vizsgáltam meg. A hallgatók nem matematikus szakon, hanem a matematikát aktívan használó gazdaságtudományi, informatikai, műszaki, természettudományi és tanári szakokon tanultak a 2015-ös és 2016-os évfolyamokban. A vizsgálat alátámasztotta, hogy a frissen felvett hallgatók bemeneti matematikatudása elmarad az intézmények által elvárttól.

Ugyancsak ebben a fejezetben mutatom be ismert kutatók munkái alapján (Gueudet, 2008; Cherif & F. Wideen, 1992; Tall, 1992), hogy melyek a középiskola és a felsőoktatás közötti átmenet általános nehézségei. Az iskolaváltással váltással járó általános nehézségek nem indokolják teljes mértékben a megfigyelt sikertelenséget. Nem csupán az intézmények elvárásaitól marad el az elsőéves egyetemisták tudása, hanem számos olyan feladatot sem tudnak megoldani, amely a középszintű matematika érettségi követelményei alapján elvárás lenne.

A 3. fejezet az „elveszett vagy meg sem szerzett tudás” nyomába eredő kutatásnak az előkészítését, lebonyolítását és eredményeit ismerteti. Az előkészítő munka eredménye egy olyan feladatsor összeállítása, amely vizsgált időszak középszintű érettségi követelményeivel és kerettanterveivel összhangban van. A felmérés lebonyolítása a részt vevő gimnáziumok – Nagy László Gimnázium, Babits Mihály Gimnázium, Jedlik Ányos Gimnázium, és II. Rákóczi Ferenc Gimnázium – kiválasztása, az érintettek felkészítése és a teszt megíratása.

A 4. fejezet egy újabb, előzőtől független kutatás elméleti megalapozást tartalmazza. Ennek a munkának egy fontos motivációja volt, hogy az előző fejezetben leírt problémákra is lehetséges megoldást adjon. Az általam kidolgozott módszer ugyanakkor más szempontok szerint került megvizsgálásra, a felsőoktatási átmenetre gyakorolt hatására a doktori tanulmányok időkeretei nem adtak lehetőséget, hiszen a kutatásban részt vevő diákok még jelen értekezés lezárásakor is középiskolások.

A kutatás fókuszában a matematikai-logikai megértés támogatása, valamint a Game Based Learning tanulási módszer áll, melyekhez a téma külföldi és magyar kutatóinak írásaira támaszkodtam (Damiani, Pereira, & Nascimento, 2017; Goddings et al., 2014; Prensky, 2001a; Oldfield, 1991; Squire, 2005; Wasserman & Banks, 2017; Török & Fried, 2020; Barbarics, Rózsahegyiné Vásárhelyi, & Wintsche, 2019).

Az 5. fejezet a korábban ismertetett elméleti alapokon nyugvó tanítási kísérlet dokumentációja. Itt ismertetem a csoportok megalakítását, a társasjátékok kiválasztását, a mérések eredményeit, valamint mindezeket értékelem is. A dokumentáció öt fontos eleme:

- a bemeneti tudásszintmérés,

- a logikából végzett bemeneti és kimeneti mérés,
- a félévi tanulói visszajelzések kérdéssorai és a rájuk adott válaszok,
- a diákcsoportok kompetenciamérésének eredményei, illetve
- az év végi anonim tanulói visszajelzések.

A fejezetben rámutatok arra, hogy ez a tanítási kísérlet összhangban van a magyar logika- és matematikatanítás hagyományaival, különösen Kalmár László és Varga Tamás munkásságával (Dukán, Szabó, & Vásárhelyi, 2020).

A 6. fejezetben elméleti és empirikus kutatásaim összegzése szerepel, a legfontosabb adatokat is ismertetve. Megállapítható, hogy a magyarországi középiskolai matematika tantervek által előírt követelmények közül számos olyan van, amely nem képezi a diákok gyakorlatban alkalmazható tudásának szerves részét. Ennek megfelelően a felsőoktatásba frissen felvett hallgatók sem tudják teljesíteni a középiskolai matematika tanterveknek megfelelő követelményrendszert.

A 7. fejezet a további kutatási lehetőségekre, a mai magyar szabályozásokkal kapcsolatos észrevételekre és köszönetnyilvánításokra tér ki.

2. fejezet

Felsőoktatási helyzetkép

2.1. Vizsgált intézmények

A felsőoktatás feltérképezésekor nem volt cél, hogy teljes képet kapjunk a magyar felsőoktatásról. A kutatás tárgya elsősorban nem a felsőoktatási intézmények felmérése volt, hanem tájékozódás a frissen felvett hallgatók matematikai nehézségeiről. Úgy gondoltam, hogyha több különböző tudományterületen is gondot okoz az új hallgatóknak olyan matematika feladatok megoldása, melyek megfelelnek a középszintű érettségi követelményeiről szóló rendelet előírásainak (*100/1997. (VI. 13.) Korm. rendelet az érettségi vizsga vizsgaszabályzatának kiadásáról*, 2016), akkor a középiskolai oktatás nem éri el a célját.

Ezek alapján négy magyar egyetem 2015-ös, illetve 2016-os bemeneti matematika tesztjeit vizsgáltam meg, konzultálva az ottani oktatókkal, tárgyfelelősökkel. Cél volt, hogy budapesti és vidéki, alkalmazott és elméleti fókuszú képzések is legyenek a mintában.

A választott felsőoktatási intézmények: Budapesti Gazdasági Egyetem (BGE), Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME), Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE) és a Szegedi Tudományegyetem (SZTE).

A 2.1-es táblázat foglalja össze, hogy a dolgozatot megíró diákok milyen képzési területhez tartozó szakokra nyertek felvételt, valamint az általunk vizsgált dolgozatok megíróinak körülbelüli számát és a dolgozat megírásának időpontját.

Intézmény	képzési terület	dolgozat időpontja	darabszám
BGE	gazdaságtudományok	2015. 10.	700
BME	gazdaságtudományok, informatika, műszaki	2016. 09.	400
ELTE	pedagógusképzés, természettudomány	2016. 09.	400
SZTE	természettudomány	2015. 09.	600

2.1. táblázat. A vizsgált dolgozatok az intézmény, az érintett szakok képzési területei, a megírás időpontja és a vizsgált dolgozatok száma szerint (utóbbi százra kerekítve)

2.2. A bemeneti mérések és az érettségi követelmények összehasonlítása

A beszélgetések és a tesztfeladatok elemzése alapján a felsőoktatás és a közoktatás között van ugyan kapcsolat, de ez inkább személyes, anekdotikus jellegű. Intézményesített párbeszéd nem zajlik a szereplők között.

A három intézmény bemeneti tesztjében szerepeltek olyan feladatok, amelyek a vizsgált évek vonatkozó szabályai szerint nem képezték a középszintű érettségi anyagát, holott egyik egyetem se írta elő kötelezően az emelt szintű matematika érettségit a vizsgált években. Ez nem szerencsés, ugyanakkor a feladatok túlnyomó többsége a középszinten elvárt tudáson belül maradt, így érdemes megvizsgálni a sikertelenség egyéb olyan lehetséges okait is.

A felsőoktatásban alapvetően új helyzettel találkoznak a diákok, így számos nehézség adódik pusztán a környezet változásából (Gueudet, 2008). Magyarországra is igaz a világ számos országához hasonlóan (Cherif & F. Wideen, 1992; Tall, 1992), hogy a felsőoktatásban a matematikai gondolkodás és a matematika tanulása jellegét tekintve is más, mint amit a középiskolában megszoktak a diákok, vagy amit elvártak tőlük. Ez jellemzi több szempontból ezeket a bemeneti méréseket is, ezért a középszintű érettségi követelményeknek megfelelő feladatok is számos plusz nehézséget állítanak a friss hallgatók elé. A váltás okozta stressz és az esetleges szokatlan megszövegezés mellett két objektív tényező tette nehezebbé a tesztek megírását az érettséginél.

Az első, hogy az érettségin megengedett segédeszköz, a függvénytáblázat nem volt használható, és több szaknál a számológép sem. A második nehezítő körülmény, hogy az érettséginél hasonló feladatmennyiség megoldására jelentősen több idő állt rendelkezésre.

Az előzőek fényében olyan feladatokat kerestem, amelyek az adott teszten használható segédeszközökkel, pusztán a középszintű követelmények alapján megoldhatók lettek volna, ugyanakkor a tesztet megíró diákok kevesebb, mint 50%-a oldotta meg őket helyesen.

3. fejezet

Elveszett vagy meg sem szerzett tudás?

3.1. Feladatsor összeállítása gimnazistáknak

Hét feladatot válogattunk ki azok közül, amelyeket a felsőoktatásba felvételt nyert hallgatók kevesebb, mint 50%-a tudott hibátlanul megoldani. A hét feladatot a következő feltételeknek szerint választottuk ki:

- együttesen középiskolai sztenderdek szerint 45 perc alatt (egy tanórán) megoldhatóak;
- a 9-10. osztályos tananyag részét képezték az aktuálisan hatályos Nemzeti Alapterv (*110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról (2018. 09. 01-én hatályos állapot)*, 2018) és a hozzá tartozó; kerettantervek (*51/2012. (XII. 21.) EMMI rendelet a kerettantervek kiadásának és jóváhagyásának rendjéről*, 2016) alapján
- a nagy részük (az első öt) nem igényel összetett matematikai gondolkodást.

Az első feltétel leginkább praktikus okokból született. A kísérlet kivitelezhetősége szempontjából fontos volt, hogy igazodjon a középiskolák ritmusához. A második feltétel azért volt fontos, mert így összehasonlíthatóvá váltak különböző évfolyamok, mindegyiken meg lehetett íratni ugyanazt a tesztet, hiszen olyan tananyagról volt szó, amely az első két évben került elő az összes középiskolában. A harmadik feltételt kiindulási hipotézisünk miatt választottuk. A hipotézis szerint a magyar matematikaoktatás szisztémája nem eléggé spirális felépítésű, ezért a diákok már röviddel az ismeretek tanulása után végleg elfelejtik a tanultakat. Tehát azt kellett először megmérni, hogy egyáltalán az alapok megvannak-e. Ennek ellenére megmaradt az összeállított teszttel annak a lehetősége, hogy a diákok bizonyítsanak egy szövegértést igénylő, gyakorlati jellegű feladatban (6. feladat), vagy egy középszintű eszközökkel megoldható, de a feladat megfogalmazása miatt a középszintű anyagon túlmutató bizonyítási feladatban (7. feladat).

A kiválasztásnál nem volt cél, hogy a matematika különböző területeinek középiskolai vagy felsőoktatási súlyával összhangban legyenek, a kutatás nem tért ki arra, hogy van-e kimutatható különbség akár az öt középiskolai kerettantervi témakör, akár más csoportosítás szerint.

Az összeállított dolgozat és az elvárt válaszok:

1. Bontsd fel a zárójelet! $(1-3p)^2$

   Elvárt válasz: $1-6p+9p^2$

2. Alakítsd szorzattá! $-4a-16a^4$

   Elvárt válasz: $-4a(1+4a^3)$
   Bármilyen egyéb helyes szorzattá alakítás is helyes válaszként került kiértékelésre.

3. Adott a következő függvény: $f(x)=-2(x-3)^2+5$

   (a) Milyen típusú függvény?

(b) Milyen transzformációs lépéseket ismersz fel és ezek hogyan változtatják meg a függvény grafikonját?

(c) Ábrázold a függvény grafikonját!

Elvárt válasz:
Az (a) kérdésben a másodfokú, négyzetfüggvény vagy bármilyen olyan válasz is elfogadott volt, ami utalt arra, hogy felismerte az „alapfüggvényt" a diák.
A (c) kérdés javításánál a helyes ábrázolást akkor fogadtam el, ha az esetleges pontatlanságokról a (b) válasz alapján kiderült, hogy a diák tudja, hogy mit kellett volna csinálni tetszőleges pontossággal.

4. Vond össze a következő algebrai törteket: $\frac{4x}{(x^2-1)} - \frac{3}{5x+5}$

Elvárt válasz: Bármilyen olyan törtet elfogadtam, amelynek az értéke megegyezett a feladatban szereplő különbségével, nem vártuk el a legegyszerűbb alakot. A feldatot helyesen megoldottnak tekintettem tehát pl. $\frac{20x^2+20x-3x^2+3}{(x^2-1)\cdot(5x+5)}$ *alak esetén is.*

5. Határozd meg a kifejezés értelmezési tartományát: $\sqrt{1-7x}$

Elvárt válasz: $x \le \frac{1}{7}$ *vagy ezzel egyenértékű megoldás (pl. intervallummal), ideértve az* $\frac{1}{7}$ *minden helyes kerekítését.*

6. (a) Mekkora vízszintes távolság tartozik 100 m szintkülönbséghez a 10%-os, illetve a 6°-os lejtő esetén? (A százalékban megadott emelkedés azt adja meg, hogy a függőleges elmozdulás hány százaléka a vízszintes elmozdulásnak.)

(b) A 10%-os vagy a 6°-os lejtő a meredekebb?

Elvárt válasz:
A 6°-os lejtő kiszámolásánál a tg 6° $= \frac{100}{x}$ *egyenlet minden helyes kerekítéssel megadott eredményét elfogadtuk, illetve bármilyen más helyes gondolatmenetet. (Kb. 951,4364 m)*
A 10%-os lejtő esetén, elfogadtam, ha megadta az 1000 m-t, akár indoklás nélkül is. Úgy gondoltam, hogy ez különösebb számolás nélkül, ránézésre is

megadható.
A meredekség megállapításánál azt néztem, hogy az általa kapott eredmények alapján ki tudta-e választani, hogy a rövidebb vízszintes elmozdulás jelent meredekebb lejtőt.

7. Igazold, hogy egy konvex négyszög oldalfelező pontjai által meghatározott paralelogramma területe fele az eredeti négyszög területének!

   Elvárt válasz:
   Bármilyen helyes gondolatmenetet elfogadhatónak tartottam.
   Egyik ilyen lehetőség bemutatni, hogy a paralelogrammán kívüli háromszögek negyedakkora területűek, mint a velük párhuzamos átló és két oldal által meghatározott háromszögek területe. (Pl. hasonlóságra hivatkozással.) Összességében tehát egy átlóhoz tartozó két háromszög a negyede a teljes területnek, vagyis négy háromszög együtt a fele.

3.2. Gimnáziumok kiválasztása

Az így kialakított teszt megírására négy gimnázium 10-12. osztályait kértük meg. Ügyeltünk arra, hogy különböző heti matematikaóraszámú, illetve fakultációs és „normál” csoportok is kerüljenek a mintába.

Célunk az volt, hogy jobban teljesítő, de azért ne speciális, átlagtól jelentősen eltérő gimnáziumokat válasszunk. A kiválasztás szempontjai következők voltak:

- a különböző magyarországi középiskolai rangsorok alapján, ne legyenek a középiskolák alsó, illetve felső 10%-ában;
- a felsőoktatási továbbtanulási arány magas legyen (itt az iskolák pályakövetési adatait hasonlítottuk össze az országos átlaggal);
- a matematikai képességek tekintetében ne térjenek el jelentősen a hazai átlagtól (a magyarországi kompetenciamérések alapján).

A kísérletben való részvételbe a következő négy – a fenti feltételeket teljesítő – gimnázium egyezett bele: Nagy László Gimnázium, Babits Mihály Gimnázium, Jedlik Ányos Gimnázium, és II. Rákóczi Ferenc Gimnázium.

A magyar középiskolai felvételi- és iskolarendszer sajátosságai miatt a magyar iskolarendszer kimondottan szelektív, azaz az egyes intézmények összetétele alapvetően homogén (OECD, 2019; Csullog et al., 2014; Keller & Mártonfi, 2006). Ez alapján az azonos (státuszú) iskolában, azonos tagozaton tanuló diákok képességei tekinthetőek évfolyamtól függetlenül állandónak, vagyis a különböző évfolyamok eredményeinek összehasonlításakor a szignifkáns eltéréseket lehet időbeli fejlődésként (vagy éppen visszafejlődésként) értelmezni, anélkül, hogy ugyanazokat a diákokat tesztelnénk évekkel később.

3.3. A minta elemzése

A tesztek megírására az első félév végén került sor a 2016/2017-es tanévben, négy gimnázium 279 diákja írta meg ezeket.

A tesztek anonimek voltak, de több statisztikai adatot is kértünk hozzájuk a kiértékeléshez. Ezek a következők voltak:

- iskola;
- évfolyam;
- heti matematika óraszám;
- utolsó év végi osztályzat;
- hány évfolyamos képzésen vesznek részt.

A teszt megírása után a statisztikai adatok hiányos kitöltése miatt 35 dolgozatot nem tudtunk kiértékelni, ezért a végleges mintában 244 teszt szerepelt.

A kiértékelhető tesztet író tanulók adatait röviden ismertetem. A 10, 11, 12. évfolyamról rendre 53, 94, illetve 95 diák írta meg a tesztet. A heti óraszám segítségével, évfolyamonként és iskolánként beazonosíthatóak voltak a fakultációs diákok. Ez alapján a tesztet 180 „alap" matematika órára járó, és 64 matematikát emelt óraszámban tanuló diák írta meg. Az utolsó év végi matematikajegyek meglehetősen változatosak voltak, 27 db kettes, 63 db hármas, 84 db négyes és 70 db ötös. Négy- és ötévfolyamos képzésen, azaz normál és nyelvi előkészítős gimnáziumi osztályba 132 diák járt, szerkezetváltó osztályba, azaz hat- vagy nyolcévfolyamos képzésre 112.

A kiértékelés öt csoportra bontva történt: 10. évfolyam, 11. évfolyam normál, 11. évfolyam fakultációs, 12. évfolyam normál és 12. évfolyam fakultációs csoport. Az adatok statisztikai vizsgálata után kiderült, hogy az egyetemek által a bemeneti mérésén hiányolt tudáselemek nagyon sok diáknál már a középiskolában is hiányoztak, vagy megvoltak, de hamar elillantak (Erdélyi, Dukán, & Szabó, 2019).

évfolyam	1	2	3a	3c	4	5
10.	0,73	0,54	0,81	0,48	0,12	0,27
11. normál	0,36	0,58	0,73	0,25	0,11	0,22
11. fakultáció	0,50	0,73	0,82	0,55	0,41	0,27
12. normál	0,60	0,79	0,77	0,29	0,25	0,23
12. fakultáció	0,71	0,93	0,93	0,50	0,50	0,79

3.1. táblázat. A feladatokat helyesen megoldók aránya a vizsgált csoportokban (a 3b külön nem szerepel, a 3c helyes megoldásának elemzését az egymásra épülésük miatt elegendőnek tartottuk vizsgálni)

Az első két feladat olyan alaptudást kért számon, amely rendszeresen előkerül a matematika minden területén. Ennek ellenére a 2. feladatot helyesen megoldók száma nem érte el a 80%-ot semelyik csoportban, a 12 évfolyamos fakultációt kivéve, az 1. feladat helyes megoldói pedig mind az öt csoportban 75% alatt maradtak.

A 3. feladat elemzéséből egyértelműen kiderült, hogy a tanulók hallottak már a négyzetfüggvény fogalmáról, de nincs konceptuális megértés a fogalom mögött, ezért még a fakultációs csoportokban sem haladta meg az 55%-ot a helyesen ábrázolók aránya.

A 4. és 5. feladat helyes megoldása a nem fakultációs osztályokban kritikusan alacsony volt, az 5. feladat esetében még a 11. osztályos fakultációsoknál is. Ezekben a csoportokban a 4. feladatra 11-25% közötti, az 5. feladatra 22-27% közötti helyes válasz született. A 4. feladat esetében 50%-ot nem haladta meg a helyes megoldók száma a 11-12. fakultációs csoportban sem.

A 6. és 7. feladatokra adott válaszok szinte kivétel nélkül rosszak lettek, néhány diák véletlenszerű eloszlásban adott rájuk jó választ.

Ezek alapján megállapítható, hogy bár a 2.2. szakaszban ismertetett problémák nehezítik az egyetemi bemeneti tesztek megírását, a probléma valódi gyökere nem az új környezetben vagy a kevés rendelkezésre álló időben van. A felsőoktatási bemenetkor számon kért, de hiányzó tudás nem elveszett, hanem alapvetően soha nem is volt meg.

4. fejezet

Új utak keresése

4.1. A logika, mint a matematika alkalmazásának kulcsa

Az előző eredmények arra sarkalltak, hogy a kezdeti terveimmel szemben a középiskola utáni matematika-tudás mélyebb elemzése helyett azt vizsgáljam, hogy miként lehetne fejleszteni a nem kimondottan matematikai érdeklődésű gimnazista diákokat, akik ugyanakkor sok esetben mégis találkoznak a matematikával felsőfokú tanulmányaik során.

A matematika magasabb szintű megértéséhez nem csak ismeretre, tárgyi tudásra van szükség, hanem a matematikai-logikai struktúrákban való gondolkodási készségre is. A logikai készségek fejlesztésében sejtettem meg tehát a probléma megoldását. Ebben megerősítettek az újabb tanuláspszichológiai és agykutatási eredmények, amelyek szerint az agynak nem csak a kéregi, hanem a kéreg alatti összekötő funkciói is felelősek a logikus gondolkodásért (Damiani et al., 2017). A kéreg alatti területek és funkcióik fejlődése serdülőkorban is tart - mindkét nem esetében (Goddings et al., 2014). Ráadásul napjaink orvosbiológiai eredményei azt mutatják, hogy a serdülőkor ideje kitolódott, 10 és 24 éves kor között zajlanak változások és az egyének közötti eltérés is nagyobb (Sawyer, Azzopardi, Wickremarathne, & Patton, 2018). A gimnázium alatt éppen ezért érdemes és fontos a logikus gondolkodás fejlesztésére nagyobb hangsúlyt fektetni, miközben teret engedünk az egyéni utaknak.

4.2. Game Based Learning

A matematikai kompetenciák nem hagyományos módon történő fejlesztésének a társasjátékok fejlesztő hatásának kiaknázásával álltam neki. Ehhez a nemzetközi matematikadidaktika szakirodalomban a GBL (Game Based Learning) témájában végzett matematikai kutatásokat használtam fel.

A játéknak a gondolkodás és a tanulás fejlődésére gyakorolt hatása egyaránt fontos téma a tanuláspszichológia, az agykutatás és a matematikadidaktika számára. A témakör bőséges irodalmából csak néhányat említek, például a digitális bennszülöttek agyműködésének változása (Prensky, 2001a, 2001b); a játék és tanulás kapcsolatával foglalkozó irodalmat áttekintő weboldal (Kirriemuir & Mcfarlane, 2004), a matematika és a játék kapcsolata (Oldfield, 1991; Török & Fried, 2020; Barbarics et al., 2019) vagy épp a téma összegző jellegű írásai (Squire, 2005).

Bár a digitális eszközökkel és alkalmazásokkal összekapcsolt gamifikáció nagy figyelmet kap a kutatásokban, mi ebben a kísérletben mégis visszatértünk a vizsgálatok klasszikus irányzatához, a valódi, táblán lejátszott játékokhoz. Egy 2016-os kutatás vizsgálta a táblás társasjátékok és konkrétan a Dominion hatását a mentális modellalkotásra (Wasserman & Banks, 2017). Ennek a kutatásnak az eredményeire építve mértem a társasjátékozás logikus gondolkodást fejlesztő hatását. Mivel a magyar matematikaoktatásban Varga Tamás 1978-as központi matematika tanterve óta jelen van a logika, ezért a nemzetközi kutatásokhoz kapcsolódva a magyar hagyományokkal összhangban terveztük meg témavezetőimmel a kísérletet a társasjátékok oktatási bevonására. A kutatás azt a célt tűzte ki, hogy a társasjátékok logikus gondolkodásra gyakorolt hatását megvizsgáljam, ebbe beleértve általában véve a matematikai készségekre, képességekre, jártasságokra való hatást is.

A játékokra épülő tanítási kísérlet épített Siegbert Warwitz és Anita Rudolf által leírt játékelemek tudatosítására. A játékelemek egyrészt az egyén ösztöneiből, másrészt a környezet igényeiből fakadnak: kíváncsiság, tudásvágy, kutatási vágy, játékosság, mozgásigény, teljesítményre való törekvés, tervezés igénye, feszültségigény, izgalom- és kalandvágy, szocializálás vágya, szereplési vágy, elismerés utáni vágy, versenyszellem, regeneráció szükséglete (Rudolf & Warwitz, 1982). Ezek a játékelemek sok szempontból átfedhetik és kiegészíthetik egymást, nem mindig lehet őket elválasztani egymástól. A kooperáció mellett sok esetben a játékosok konkurensek vagy akár konfliktusban is lehetnek egymással.

4.3. Példák a társasjátékok hazai pedagógiai célú alkalmazására

A társasjátékozás fejlesztő hatását számos kortárs pedagógus vagy pedagógiai műhely alkalmazza a mindennapokban, igaz, elsősorban általános iskolás korosztályban. A teljesség igénye nélkül három, számomra fontos magyar példát mutatok be.

A K. Nagy Emese és kollégái által megvalósított hejőkeresztúri Komplex Instrukciós Programban is fontos szerepet töltenek be a társasjátékok. A társasjátékok számos olyan aspektusa van, amely hátrányos helyzetű és a többségi társadalomhoz tartozó diákok közötti hidak képzését segítik, úgy, hogy közben mind a két csoport fejlődni tud. A társasjátékokkal fejleszthetőek az értelmi képességek, alkalmasak tehetséggondozásra, de egyben a szabadidő igényes, tartalmas eltöltésének alternatívái, erősítik a szociabilitást (K. Nagy, 2014).

Számos társasjátékklub működik, ezek sokszor támogatják az iskolákat, pedagógusokat a társasjátékozásban, illetve népszerűsítik magát a társasjátékozást. Az egyik ilyen kezdeményezés a Nebuló XXI. Alapítvány keretében valósul meg. Ők 2009 óta fogalkoznak társasjáték-pedagógiával, amely az ő értelmezésükben – és mint később látni fogjuk, sok szempontból az én kutatásomban is – a spontán játéktevékenységeknek ad teret (Aczél, 2015a).

A Szent István Gimnázium tanára, Magyar Zsolt tanárként tudatosan alkalmazza a társasjátékot a tanításban. Számos játékot kipróbálva kimondottan vizsgálja a társasjátékokat a tanórai alkalmazhatóság szempontjából is (Magyar, 2016).

5. fejezet

Kísérleti tanítás

5.1. A kísérlet kérdései és hipotézisei

Hipotéziseink a táblajátékok közvetlen hatásaira vonatkoznak. Ezeket a hatásokat bemeneti és kimeneti tesztekkel és kérdőívekkel mértük.

- H1. A „társasjáték-csoportnak” középiskolai tananyag elsajátításában elért teljesítménye legalább olyan jó lesz, mint a kontrollcsoporté.
- H2. A „társasjáték-csoport” logikai gondolkodása jobban fejlődik, mint a „nem társasjáték-csoporté”.
- H3. A táblajáték fejleszti a kompetenciamotivációt.

Felmerültek egyéb kérdéseink is, amelyek a téma szempontjából relevánsak lettek volna, azonban a minta mérete, a kísérlet időtartama vagy éppen az általunk választott kísérleti design miatt nem tudunk megválaszolni. Ilyen kimaradt kérdés például az, hogy a fejlődés mértéke és az induló tudásszint között kimutatható-e pozitív vagy negatív korreláció.

Tanuláspszichológiai tapasztalatok szerint a játékelemek aktiválása közvetlenül hozzájárulhat a kompetenciamotiváció kialakulásához, amely számos elemből áll össze: önhatékonysági tudat, optimális kihívás, belső motiváció, felfedezés vágya, kíváncsiság, belső attribúció, önmeghatározási motiváció, önértékelés és önkép, teljesítmény-motiváció. Mindez megnyitja az utat a kompetenciák, közöttük a matematikai kompetenciák fejlődése előtt is (Herber & Vásárhelyi, 2006b) .

Ugyancsak a tanuláspszichológiából tudjuk, hogy a feszültség oldásának, a pozitív érzelmeknek kettős hatása van a tanulásra (Herber & Vásárhelyi, 2006a). A pozitív érzelmek „szélesítő és építő" hatást gyakorolnak. A pozitív érzelmek motorként működnek, mozgósítják és felgyorsítják a figyelem, a megismerés és a cselekvés folyamatait. Ezzel együtt jár a fegyelem lazulása, amit mederben tartani a tanár dolga. Ugyanakkor a pozitív játékélmények később hozzájárulhatnak az eredményességhez a gamifikált matematikai tartalom feldolgozásakor is, nem csak a matematikától függetlennek érzékelt játékok esetén.

5.2. Társasjátékok kiválasztása

Olyan táblajátékokat kerestem, amelyekhez kevés tényszerű ismeretre van szükség, egyszerűek a szabályai, 35-40 perc elég a lejátszáshoz, ugyanakkor komplex logikai műveleteket kell a játékosnak végeznie. Ez a három feltétel biztosította a könnyű tanulhatóságot, a tanórai keretekbe illeszthetőséget, illetve a matematikai-logikai készségek olyan alkalmazását, amely nem jár együtt „tantárgyi jellegű" matematikai műveletekkel.

A fenti szempontokat mérlegelve, mások társasjátékokkal kapcsolatos tapasztalatait megfontolva a kísérleti csoport számára az Avalon és a Da Vinci Kód nevű játékokra esett a választás, a kontrollcsoport számára pedig az Azulra (Aczél, 2015b). A kísérlet felépítésénél részletesebben is írok arról, hogy miért döntöttem úgy, hogy a kontrollcsoport is társasjátékozni fog, és hogyan oldottam meg, hogy ez ne befolyásolja a társasjátékozás hatékonyságának mérését.

5.2.1. Avalon

Az Avalon egy szórakoztató játék fantáziakarakterekkel.

Titkos szerepkártyákat, jó és gonosz karaktereket osztunk szét a játékosok között véletlenszerűen. A jók és gonoszak száma a résztvevők számától függ, a jók enyhe számbeli fölényben vannak.

A gonosz karakterek a jók elől rejtve maradnak, de egymást ismerik. A jók vezetője, Merlin, kiváltságos szerepben van: ő tudja, hogy kik a gonoszak, de se a jók, se a gonoszak nem tudják, hogy melyik játékos Merlin.

A játék során a jóknak ki kell találniuk, hogy kiben bízhatnak meg, és ki az, aki szabotálja őket. A jóknak kifogástalanul kell következtetni, a gonoszoknak okosan összejátszani és megtéveszteni a többieket. Merlinnek pedig úgy kell segíteni a társait, hogy a gonoszak nem ismerjenek rá.

A játékosoknak közvetett információ alapján kell kitalálni egymás képzeletbeli személyiségét. Eközben minden kommunikáció a közös térben történhet csak.

A játék során a játékosoknak küldetéseken kell részt venniük. A játékosok egymás után tehetnek javaslatot a küldetésen részt vevő személyekre. A küldetésen részt vevő személyek száma a játékosok számától és attól függ, hogy hányadik körnél járunk, ezt a szabálykönyv részletesen meghatározza. A javaslatot közösen megvitatják, végül nyílt szavazással döntenek. Ha nem kap többséget az összeállított csapat, akkor a soron következő játékos tehet egy új javaslatot, és így tovább. Ha négyszer leszavazták a javaslatot, akkor az ötödik játékos javaslatáról már nem kell dönteni, automatikusan ő jelöli ki a csapatot.

A megszavazott vagy kijelölt játékosok titkosan szavaznak a küldetés sikeréről. Ha legalább egyikük a bukásra szavaz, akkor ezt a fordulót a gonoszak nyerték. Ha mindannyian a győzelemre, akkor a jók. Sok játékos esetén a negyedik küldetés esetén legalább két bukás szavazat kell, hogy a gonoszak kapjanak pontot.

A játék addig tart, amíg az egyik csapat három pontot nem gyűjt, tehát maximum öt küldetésig. Három pont elérésével a gonoszok azonnal győznek, a jók három pontja esetén viszont csak akkor övék a győzelem, ha a gonoszok nem találják el, ki Merlin. Ehhez konszenzusosan kell kijelölniük azt a játékost, aki Merlin szerepét kapta. Itt válik jelentőségteljessé az a kitétel, hogy Merlinnek úgy kell az eseményeket befolyásolnia, hogy a gonoszok ne jöjjenek rá, hogy ő kicsoda. Természetesen így előfordulhat az is, hogy egy vagy több jó játékos Merlint az egyik gonosznak tartja a játék során.

A szabályok könnyen érthetőek és további kiegészítő szabályokkal és karakterekkel fokozatosan egyre nehezebbé tehetjük a játékot. Az Avalon szabályainak részletes ismertetője elérhető a
https://www.ultraboardgames.com/avalon/game-rules.php címen.

5.2.2. Da Vinci Kód

A másik társasjáték a Da Vinci Kód volt, amelynek szintén nagyon egyszerű szabályrendszere van, és a diákok maguk is elkészíthették a játék darabjait. A Da Vinci kód az Avalonnál explicitebb módon épít a logikus gondolkodásra: itt a logikus következtetés hangsúlyosabb, mint a heurisztika.

A játék célja az ellenfelek titkos kódjának kitalálása. A játék két különböző színű, de minden másban egyező dominó jellegű 13 db-os téglalapkészletből áll. Mind a két készlet pontosan egy számot tartalmaz 0-11-ig, illetve van egy kötőjeles darab is, ez a dzsóker.

A bevezető játékot párban játszottuk a következő szabályok szerint. Számmal lefelé összekeverjük a lapokat (tehát csak a színük látszik), ebből húz mindkét játékos négy-négy darabot. Mindkét játékos maga elé teszi őket növekvő sorrendben balról jobbra, az élükre állítva, úgy, hogy a számokat csak ő lássa, a másik játékos pedig csak a színeket. Az egyik (játék előtt fixált) szín elsőbbséget élvez két azonos szám esetén, az kerül mindig a kettő közül bal oldalra. A kötőjelet bárhova beilleszthetik.

Ezután felváltva a játékosok egyenként kiválasztanak egyet a fennmaradó számlapok halmából, és megpróbálják kitalálni az ellenfél lapkáin levő számok bármelyikét.

Ha a tipp helyes, a lapkát át kell fordítani. Maga a tipp bármilyen vak találgatás lehet, vagy közvetetten alapulhat a korábbi információkon. Ha a tipp helytelen, a tippelő játékosnak kell felfednie az általa középről húzott lapot, a megfelelő helyre elhelyezve az előtte álló lapok közé.Az utolsó játékos nyeri a játékot, akinek még mindig van rejtett lapja.

Ezeket a szabályokat ismét könnyű betartani. A játékot nagyon könnyű „házi szabályokkal" módosítani, illetve több játékosra kibővíteni. A játékhoz logikus következtetés és a számok nagyság szerinti sorrendjének megértése szükséges.

5.2.3. Azul

A második félévben a kontrollcsoport az Azul táblajátékkal játszott.

Ennek a csempézési játéknak az célja, hogy mintákat készítsen a táblán bizonyos szabályok szerint.A szabálykönyv tartalmaz egy nehezített változatot is, az első pár játék után áttértünk erre, itt sokkal több kombinációra nyílt lehetőség. Mivel az Azul a kontrollcsoport játéka volt, ezért a szabályok részletes ismertetésétől eltekintek, de a leírás megtalálható többek között a *https://fejlesztojatekvilag.hu/uploaded/hu-azul-rules-2017-12-04.pdf* címen.

A hivatalos játékszabályt két ponton módosítottam. Az egyik módosítás plusz egy ponttal jutalmazta azokat, akik olyan csempét helyeznek le, aminek van szomszédja, ez célom szerint az összetettebb, tervezettebb gondolkodásra sarkall. A másik módosítás a kör végén fel nem használt csempék eltávolítása a játéktérről. Ennek a módosításnak a célja, hogy sokkal jobban előre kelljen tervezni, illetve a játékosok közti interakció is nő: megnő a jelentősége annak, hogy megakadályozzák a másik pontszerzését, és csökken az öncélú gyűjtögetés esélye.

A játék a logikán, kombinatorikán és a geometriai ábrákon át kapcsolódik a tantervhez.

5.3. A kísérleti osztály kiválasztása

A kísérleti osztály kiválasztása természetesen nem teljesen szabad választás. Erősen behatárolja a lehetőségeket, hogy melyik iskola hajlandó erőforrást áldozni arra, hogy egy tanítási kísérletben részt vegyen. Mint a 4.1. szakaszban leírtam, a célom az volt, hogy olyan csoportot keressek, ahol a matematika nem számít elsődleges érdeklődési területnek, de várhatóan lesz egy-két diák, aki később akár természettudományos, informatikai vagy műszaki, de elsősorban közgazdasági területen alkalmazni fogja a matematikát.

A VII. Kerületi Madách Imre Gimnázium vállalta, hogy alkalmaz részállású pedagógusként, beleegyezve, hogy a tantárgyfelosztásnál biztosítják számomra, hogy egy kilencedikes osztály mindkét felét taníthatom, és a két csoport nem matematikai képesség alapján kerül szétosztásra. Bár a gimnázium az erősebb gimnáziumok között szerepelt már évekkel korábban is, nem a matematika és a természettudományok miatt volt jó híre, sokkal inkább humán és művészeti középiskola hírében áll a mai napig is. Mindez annak ellenére, hogy általános és nyelvi tagozatok vannak csak.

Végül a 9.b osztály tanítását kezdhettem meg 2018 szeptemberétől. Ez az osztály optimális volt, több szempontból is. Ahogy most is, úgy ennek az évfolyamnak a felvételekor is az a szabály volt érvényben Magyarországon, hogy mindenkinek magyar nyelv és matematika adja az írásbeli pontszámát, eltekintve azoktól az iskoláktól, ahol egyáltalán nem számolnak szerzett pontokat. A szóbeli vizsga tartásáról és annak elemeiről az iskola dönthet (*20/2012. (VIII. 31.) EMMI rendelet* *a nevelési-oktatási intézmények működéséről és a köznevelési intézmények névhasználatáról*, 2017). Ennek az osztálynak a szóbeli felvételijén nem mérték a matematikatudást és a matematikai kompetenciákat, tehát teljesült az a feltétel is, hogy nem a matematikatudásuk alapján lettek elsősorban kiválasztva. Az osztály nyelvi előkészítős évfolyamon vett részt előző évben, ahol matematikából heti két órájuk volt. Ez azt jelentette, hogy a 9. osztályos anyagot elkezdték ugyan, de még bőven nem fejezték be.

Az osztály abból a szempontból is optimális volt, hogy a két csoport nem matematikatudás alapján alakították ki, hanem egy független szempont, a választott idegen nyelv szerint. Ráadásul a szerint az idegen nyelv szerint, amit a középiskolában kezdtek el tanulni. A nyelvi és a matematikai képességek közötti összefüggés egyáltalán nem egyértelmű, az pedig sok példával alátámasztható, hogy adott nyelv választása alapvetően nem befolyásolja a matematikai gondolkodást (Szirmai, 2003; Ongstad, Hudson, Nyström, Pepin, & Singer, 2007). Abból kiindulva, hogy egy újonnan választott nyelvről van szó, egyértelműen tekinthetjük véletlenszerű csoportbeosztásnak azt, hogy az általános iskolában tanult angol mellé francia vagy német nyelvet választottak a diákok.

A véletlenszerű kiválasztás mellett is előfordulhat szignifikáns különbség a két csoport matematikai tudásában. Ezért egy bemeneti tudásszintmérésen megvizsgáltuk a két csoport matematikai tudását, majd egy másik mérésen a logikai képességeiket is, és a két csoport eredményeit összevetettük, szignifikáns eltérést keresve.

5.4. A kísérlet menete

5.4.1. A társasjátékozás előtt

A két csoport közül véletlenszerűen kiválasztottam az egyiket, a francia nyelvet tanuló diákokat: ők lettek a kísérleti csoport. A másik csoport pedig a kontrollcsoport funkcióját töltötte be. A két osztály párhuzamos, azonos módon történő haladását így teljes mértékben saját magam tudtam irányítani. A 2.2. szakaszban említett változásból fakadó nehézségek egy tanár váltásánál is jelen vannak, különösen, ha egy kísérlet kezdetét jelenti be. Ezért a bemeneti méréseket a tanév második hetében végeztem el, miután kicsit megismerkedtünk a csoportokkal.

A társasjátékozással töltött órák előtt kb. egy hónapig a kísérleti- és kontrollcsoportnak is azonos módon, megegyező tempóban tanítottam a matematikát. A tananyag az előző évi anyag ismétléséből és a 9. osztályos algebra és számelmélet tantervi anyag első fejezeteiből állt.

5.4.2. Társasjátékozás

Ezután a kísérleti csoport a tanév első félévében heti három matematikaórájának egyharmadát társasjátékokkal töltötte: a Da Vinci Kód és az Avalon nevű táblás játékokat játszották heti egy órában. A diákok néha általam kijelölt, néha szabadon választott csapatokban játszották a játékokat. A játék során nem kaptak megfigyelési szempontot és semmilyen más közvetlen didaktikai beavatkozás sem történt. Időnként variáltuk a szabályokat, ahogy az 5.2. szakaszban említésre került a játékok leírásánál.

A másik két órában a tantervben előírt matematika tananyagot dolgoztuk fel. Az első félévben az osztály másik felével heti három órában dolgoztuk fel ugyanazt a tantervi anyagot. Tehát a kísérleti csoportnak másfélszer olyan gyorsan kellett haladnia a törzsanyag feldolgozásával, mivel arra csak heti két órájuk jutott. A tanítási módszerekben nem volt különbség; alapvetően a gyakorlásra, elmélyítésre jutott ezáltal kevesebb idő.

Az első társasjátékkal töltött tanórára október 12-én, a záró kérdőívre február 15-én került sor. A társasjátékkal töltött foglalkozásokhoz minden alkalommal tartozott egy „társasjáték-napló”. Ebben – az első alkalmat kivéve – két kérdést tettem fel, amelyek néha további részkérdésekre oszlottak. Az egyik kérdés mindig a társasjátékozáshoz, mint élményhez, közösségi vagy önismereti tapasztalathoz kapcsolódott. Példák ezekből a kérdésekből (a szögletes zárójelben szereplő részek nem voltak részei a kérdőívnek, az értekezés olvasójának a megértését hivatottak segíteni):

- Számított a játék menetében, hogy tegnap már játszottál a társasjátékkal? Ha igen, miben volt más ma? [Az egyik első alkalommal órarendi cserék miatt kivételesen úgy jött ki a lépés, hogy két egymást követő napon volt társasjátékos óra.]
- Mennyire változott meg a játék [az adott órán bevezetett] az új karakterek/szabályok miatt?
- Melyik karakterrel játszol a legszívesebben? Miért?
- Szerinted jobban megy neked az Avalon, mint első alkalommal?
- Mennyire volt könnyű másoknak megtanítani a játékot másoknak? [A Da Vinci kóddal először játszó fél csoport tanította meg a következő órán a többieket.]
- Melyik játékkal játszol szívesebben az eddigi kettő közül? Miért?
- A 2 személyes vagy a többszemélyes Da Vinci kód tetszett jobban?

A másik kérdés egy társasjátékhoz kapcsolódó, néha nyílt végű, néha véges számú helyes megoldással bíró feladat volt, hasonlatosan egy sakkfeladványhoz. Ezekből is ismertetek pár példát:

- Ha te vagy Merlin, és első körben te jelölöd ki a kétfős csapatot, kiket választasz bele? Miért?
- Ha Oberonnal vagy (gonosz, de a többi gonosz nem tud róla) és mind az 5 körben beválasztanak a csapatba, amelyik küldetésre megy végül, mit tennél

a siker/kudarc kártyák közé? (Ha függ attól, hogy melyik csapat nyerte a korábbi küldetéseket, akkor azt is írd meg, hogy hogyan.)

- Ha a Da Vinci kódban választhatnál tetszőlegesen 4 elemet az elején (véletlenszerű húzás helyett), hogyan nézne ki az előtted levő 4 elem? (Fekete és fehér színű elemek vannak, a fehér kerül balra, ha egyforma az értékük.)

- Da Vinci kódban a következő a helyzet: (félkövérrel a feketék vannak, két egyforma közül a fekete az „értékesebb")
  Ellenfélnél: _ **0** 1 **6** _ **8** (a két ismeretlen fehér)
  Középen a következőket ismered [ebben a szabályváltozatban a sikeres tippelés után középen maradt a megnézett elem]: 0 5 9 10 **11**
  Nálad felfedve: 3 7 -(fekete) **7** **10**
  Nálad elrejtve: **5** 11
  Mik az ellenfél felfedetlen számai?

A társasjáték-napló célja elsősorban nem diagnosztikai volt - ezért nem is a mérések között foglalkozom vele. Azért kaptak feladatokat, hogy kicsit tudatosabban végiggondolják a társasjátékozásnál szerzett ismereteiket. Ezzel elértem azt, hogy nem kellett külön instrukciót adni társasjátékozás közben, így szabadabb maradhatott a játék, de mégis tudtam befolyásolni a társasjátékokkal megszerzett kompetenciákat.

5.4.3. A második félév

A második félévben szerepet cserélt a két csoport: az előző félévben játszók most heti 3 órában matematikát tanultak, a másik csoport heti egy órában Azult játszott, 2 órában matematikát tanult.

A diákok tudták, hogy egy kísérlet alanyai, ezért alkottuk meg így a kísérletet. Nem akartuk megmondani nekik, hogy melyik a kontrollcsoport és melyik a kísérleti csoport, ezért annyit mondtunk nekik, hogy egyik csoport az első félévben játszik, a másik a másodikban. A logikára gyakorolt hatás mérése ugyanakkor az első félév végén megtörtént. Azt szintén elárultuk mind a két csoportban (hiszen ez már az év eleji logikai mérésből is látszott), hogy a logikai kompetenciák és a logika tananyag fontos részét képezik a kísérletnek. Ez igaz is volt, hiszen a logikát általában nem tanítják ilyen mélységében a 9. osztályban.

Társasjáték-naplót a kontroll-csoport is kapott minden játékkal töltött óra után. Ez ugyan már nem befolyásolta a logikai mérést és az első félév végi összehasonlítást, de ezáltal náluk is jobban érvényesült a társasjátékozás fejlesztő hatása. Ugyanúgy két kérdést kaptak ők is órák után, csak itt a kérdések természetesen az Azulra vonatkoztak.

5.5. A logika tanítása

5.5.1. A magyar logikatanítás rövid áttekintése

Az első kimondottan modern, matematikai logika kurzus Szalai Sándor nevéhez fűződik. Ő az 1946/47-es tanév második félévében hirdette meg új előadását az ELTE Bölcsészettudományi Karán Formális és dialektikus logika (Különös tekintettel a tudományos gondolkodás módszereire) címmel (Szabari, 2012). Ekkor még nem tekintették a kortárs matematikusok a matematika részének ezt a tudományterületet. Kalmár László volt az, aki aprólékos munkával elérte, hogy elfogadják matematikai diszciplínának a számítástudományt és a logikát (*A Bolyai Intézet története*, 2021). Kalmár László jegyzetet is készített a matematikai alapjai egyetemi oktatásához (halmazok, logika, matematika elvi kérdései), amelynek sikerét mutatja, hogy rengeteg kiadást élt meg (Kalmár, 1970b, 1970a). Kalmár és társai munkája révén pár év alatt a matematika szerves részévé vált Magyarországon a logika.

A második világháború után bevezették az egységes nyolcosztályos általános iskolát és az egységesen négyosztályos gimnáziumot. Ez természetszerűleg az új rendszerhez illeszkedő új tantervek kidolgozásával járt együtt az összes tantárgy, így a matematika esetében is. Ezt követően 1962-ben jött az első jelentős esemény a matematikatanítás hazai történelmében. Az 1962-es nemzetközi matematikatanítási konferencia Budapesten került megrendezésre, ráadásul a konferenciakötet megírásával a belga Willy Servais mellett Varga Tamás lett megbízva (Gosztonyi, 2015). Emellett Varga ugyanebben az évben megjelent kétkötetes, diákoknak szóló matematikai logika könyvének első kötete (Varga, 1962) nagy hatással volt a logika tanítására is (Gosztonyi, 2015). 1963-ban Varga Tamás vezetésével egy általános iskolában megkezdődik a komplex matematikatanítási kísérlet (Vásárhelyi, 2013). Egy másik fontos, hazai matematikaoktatást sokáig meghatározó változás, hogy az 1962/1963-as tanévben elindul az első speciális matematika osztály a Fazekas Mihály Gimnáziumban, amelyet 1963 szeptemberétől több iskola követ (Gordon Győri, 2021).

Varga Tamás komplex matematikatanítási kísérletében öt tantervi témakört jelöl meg. Ebből az egyik a halmazok és logika témaköre (Pálfalvi, 2012, 2017). Az 1978-as matematika tanterv már alapvetően Varga kísérlete alapján készül (Somfai, 2002).

Az 1980-ban bevezetett ötnapos munkahét együtt jár az óraszámok csökkenésével. Ez természetesen a matematikára is hatással van: újra átalakulnak a tantervek és a követelmények, de az 1980-as évek tantervein és az 1995-ös, a 2003-as, a 2012-es és a 2020-as Nemzeti Alapterven is érződik az 1978-as tanterv alapvető hatása, szemlélete.

A magyar alaptantervek, legyen szó a 2012-es vagy a 2020-as NAT-ról, számos olyan fejlesztési célt határoznak meg, amelyek a logikus gondolkodás fejlesztésére irányulnak vagy a logikus gondolkodáson alapulnak. Ezek a magyar oktatási rendszerben minden iskola számára kötelezőek.

A tanítási kísérlet idején hatályos 2012-es NAT bevezetője így fogalmaz: "A matematikai kompetencia kialakításához elengedhetetlen az olyan meghatározó bázisképességek fejlesztése, mint a matematikai gondolkodás, az elvonatkoztatás és a logikus következtetés. E kompetencia összetevőit alkotják azok a készségek is, amelyekre támaszkodva a mindennapi problémák megoldása során a matematikai ismereteket és módszereket alkalmazzunk." (*110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról (2018. 09. 01-én hatályos állapot)*, 2018)

A 2020-ban megjelent és azonnal hatályba lépett NAT is hasonlóan fogalmaz: „A matematika tanulásának legfontosabb célja, hogy a tanuló: [...] 5. fejlessze a logikus, pontos, kreatív, mérlegelő, stratégiai és rendszerező gondolkodását" (*110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról (2021. 09. 01.-én hatályos állapot)*, 2021).

Ebben és a hozzá tartozó gimnáziumi kerettantervben a kötelező logika tananyag jelentősen bővült: logikai szita, kizáró „vagy", szerkeszthetőség feltételeinek megfogalmazása került bele, illetve ezek már 9-10. osztályban a tananyag részét képezik (*51/2012. (XII. 21.) EMMI rendelet a kerettantervek kiadásának és jóváhagyásának rendjéről*, 2016).

Összességében elmondhatjuk, hogy a magyarországi matematikaoktatásban a logikai műveletek ismerete elvárt, ugyanakkor az óraszámokat is előíró 2012-es és 2020-as szabályozók is meglehetősen alacsony óraszámot rendelnek ehhez a területhez az előírt tananyag mennyiségéhez képest.

5.5.2. Logika tanmenet

A hagyományos 9. osztályos helyi tantervbe beékeltem egy matematikai logika tematikus blokkot. Jelen kísérlet esetében a társasjátékos blokk lezárásaként szolgált, mind a két csoportnak 15 órás időkeretre készült. Bár ezt ilyen mélységben a középiskolai tantervek rendszerint nem tartalmazzák, de a tanmenet a Nemzeti

Alaptanterv és a gimnáziumi kerettanterv figyelembevételével készült, az elmúlt évek forgalomban levő tankönyveinek feladatai alapján (Dukán, 2019).

A logika órák ideje alatt mind a két csoport azonos ütemben haladt, ekkor egyikük sem társasjátékozott.

Az általam összeállított tematikus terv szempontjai és a magyar tantervi szabályozókkal való mélyebb összehasonlítás az erről írt szakdolgozatomban megtalálható.

1. óra: Logika bevezetés, kijelentés fogalma, igazságértéke

2. óra: Játékos logikai feladatok

3. óra: Univerzális és egzisztenciális állítások, logikai műveletek: negáció

4. óra: Logikai műveletek: konjunkció, diszjunkció, logika és halmazelmélet kapcsolata

5. óra: Dolgozat, konjunkció és diszjunkció negáltja

6. óra: Logikai műveletek: implikáció (és tagadása)

7. óra: Logikai műveletek: ekvivalencia (és tagadása)

8. óra: Implikáció (és ekvivalencia) megfordítása, szükséges feltétel, elégséges feltétel

9. óra: Szükséges és elégséges feltétel

10. óra: Dolgozat

11. óra: Sejtés, kísérletezés, módszeres próbálkozás, cáfolás, direkt és indirekt bizonyítás

12. óra: Teljes indukció

13. óra: Bizonyítások

14. óra: Ismétlés, gyakorlás

15. óra: Témazáró dolgozat

5.6. Mérések a kísérlet során

5.6.1. Bemeneti tudásszintmérés - 2018. szeptember 13.

Megkérdeztem a két csoport előző évi tanárait a csoportról kialakult véleményékről, elsősorban az előző évben elsajátított matematikai készségekről. Ezek segítségével és az ELTE TTK-n szerzett tapasztalatok alapján összeállítottuk a tudásszintfelmérőt.

A felmérő feladattípusai: törtek egyszerűsítése és összevonása, oszthatósági szabályok alkalmazása, legkisebb közös többszörös, legnagyobb közös osztó megkeresése, elsőfokú egyenlet megoldása és szöveges feladatok.

A tesztek kiértékelésének elsődleges célja az volt, hogy ellenőrizzük, hogy a véletlennek tekintett kiválasztási folyamat során, nem alakult-e ki a két csoport között szignifikáns eltérés. A teszt ezért kimondottan az előző évben a diákok által tanult ismeretekre épült, semmilyen egyéb szempontot nem érvényesítettünk az összeállításánál. A mérés megerősítette, hogy egyenletesen oszlanak el a tanulók a két csoport között, ugyanis kétmintás t-teszttel arra jutottunk, hogy $p = 0{,}5166$ annak a valószínűsége, hogy a kísérleti csoport egy tagjának a felkészültsége jobb, mint a kontrollcsoporté.

Ez a teszt a hiányzókkal nem került pótlásra, mert úgy véltük, hogy a teszt esetleges megismerése vagy a teszt megváltoztatása jobban torzítja az eredményt, mint amennyire javítja azt a négy plusz adatpont a mintában.

A mérés feladatlapja:

1. Egyszerűsítsd a következő törteket!
   (a) $\frac{3x^2b}{b^3x}$
   (b) $\frac{5a^2-5x^2}{10a^2+20ax+10x^2}$
2. Vond össze a törteket!
   $\frac{1}{p-1}+\frac{2}{p+1}-\frac{3p}{p^2-2p+1}$
3. Milyen számjegy(ek)et tudsz írni a kihagyott helyekre, hogy a számok oszthatóak legyenek a megadott számmal?
   (a) 3_2, 4-gyel
   (b) 25_22, 9-cel
   (c) 3_2_, 5-tel
   (d) 7_2_, 6-tal
4. Add meg a legnagyobb közös osztóját és a legkisebb közös többszörösét a következő számoknak!
   (a) 225 és 300
   (b) 72, 15 és 25
5. Oldd meg a következő egyenleteket!
   (a) $6x+12=8x-24$
   (b) $\frac{x-3}{3}-\frac{2x-4}{5}=\frac{x+1}{10}-x$
6. Egy háromjegyű számban a 10-esek helyén álló számjegy kettővel nagyobb az egyesek helyén állónál, és eggyel kisebb a százasok helyén álló számjegynél. Ha a számhoz hozzáadjuk a fordítottját, azaz a számjegyeinek fordított sorrendjében felírt számot, eredményül 1453-at kapunk. Mi volt az eredeti háromjegyű szám?

7. András és Béla együtt 36 évesek. Amikor András annyi idős lesz, mint Béla most, akkor Béla éveinek száma 16-tal lesz több, mint András éveinek mostani száma. Hány évesek most?

Az elérhető maximális pontszámokat feladatonként és az egyes diákok által megszerzett pontokat a 5.1-es táblázatban közlöm.

5.6.2. Bemeneti mérés logikából - 2018. október 3.

A logikai készségek vizsgálatára irányuló bemeneti mérésre október 3-án került sor. A hiányzók később, még az első társasjátékkal töltött óra előtt pótolták azt. A feladatsor három feladatból állt, minden feladatnak több részfeladata volt. Ezek egyik fele matematikai helyzetbe ágyazva, a másik fele mindennapi helyzetben tartalmazta a logikai feladatot. A feladatok megfogalmazásakor figyelembe vettük, hogy a logikai műveletek és a kapcsolódó terminológia ismerete ne legyen szükséges a megoldásukhoz.

A feladatsort változatlanul megismételtük a kísérlet végén, hogy összehasonlítsuk a kísérlet előtti és utáni logikai felkészültséget. A kétmintás t-teszt itt se mutatott ki szignifikáns eltérést a két csoport logikai felkészültsége között: $p = 0{,}6962$ annak a valószínűsége, hogy a kísérleti csoport felkészültsége jobb, mint a kontrollcsoporté. A kis minta miatt természetesen óvatosabban bánunk a statisztikai következtetésekkel, de a tudásszinmérő és a logikai felkészültséget mérő bemeneti teszt eredményei alátámasztják azt a feltevésünket, hogy a két csoport matematikai és logikai felkészültsége lényegében egyforma.

A feladatsort és a diákok válaszait feladatonként közlöm.

	össz.	1.a	1.b	2.	3.a	3.b	3.c	3.d	4.a	4.b	5.a	5.b	6.	7.
csoport	57	2	6	7	2	1	2	4	4	6	4	6	7	6
francia	45	2	0	7	2	1	2	4	3	5	3	4	7	5
francia	31	0	0	0	2	1	2	4	4	4	4	4	5	1
francia	31	2	0	2	2	1	1	0	4	5	4	6	4	0
francia	30	2	0	0	2	0	1	1	4	5	4	2	4	5
francia	30	2	0	0	2	1	2	2	4	4	3	1	5	4
francia	30	0	3	0	2	1	2	2	4	4	4	0	4	4
francia	29	2	6	0	2	1	2	0	4	4	3	3	2	0
francia	28	2	0	0	2	1	2	2	4	4	3	3	5	0
francia	27	2	5	3	0	0	1	3	4	3	3	0	1	2
francia	26	0	1	1	1	1	2	2	4	4	4	3	0	3
francia	26	2	0	0	1	0	2	0	3	4	4	4	1	5
francia	23	2	0	0	0	1	0	0	4	4	4	3	3	2
francia	22	2	2	0	2	1	1	1	2	0	3	4	3	1
német	43	2	6	6	2	1	2	4	4	0	4	3	7	2
német	38	2	5	4	2	1	2	1	4	0	4	0	7	6
német	37	2	3	0	2	1	2	2	4	6	3	4	5	3
német	36	2	6	6	2	1	1	0	4	3	4	0	7	0
német	36	2	6	3	2	1	1	1	4	4	3	4	4	1
német	35	2	4	5	2	1	2	0	3	0	4	5	5	2
német	35	2	0	6	2	0	2	3	4	4	3	5	4	0
német	35	2	4	4	0	1	2	0	4	5	4	5	4	0
német	31	2	0	7	2	1	2	1	4	3	4	5	0	0
német	29	2	0	0	2	1	2	3	4	4	4	2	2	3
német	28	2	1	1	2	1	2	2	4	3	3	2	5	0
német	24	0	1	3	2	1	2	2	4	5	2	0	0	2
német	23	2	0	0	0	0	0	0	2	3	3	3	5	5
német	18	2	1	2	2	1	2	0	4	0	3	0	0	1
német	15	0	0	0	2	1	1	1	4	4	2	0	0	0

5.1. táblázat. Az év eleji tudásszintmérés pontszámai diákonként. A fejlécben a feladatok sorszáma, alatta az elérhető maximális pontszám. Az 1. oszlopban a diák csoportja, a 2. oszlopban az összpontszáma.

1. Karikázd be azoknak az állításoknak a betűjelét, amelyek pontosan ugyanazt jelentik (függetlenül, hogy az eredeti állítás igaz vagy hamis), mint a felettük található aláhúzott állítás. (Nem biztos, hogy pontosan egy jó válasz van.)

Minden tigris ragadozó.

A: Vannak ragadozó tigrisek.

B: Nincs olyan tigris, amelyik nem ragadozó.

C: Ha Bagira tigris, akkor Bagira ragadozó.

D: A ragadozók egy része tigris.

E: Tigrisek léteznek és mind ragadozók.

Szeretem a gulyáslevest és nem szeretem a pacalpörköltet.

A: Nem szeretem a lecsót, de a gulyáslevest igen.

B: Ha anyukám olyat főz nekem, amit szeretek, akkor biztos, hogy gulyáslevest főz.

C: Két kedvenc ételem van: a gulyásleves és a tejbegríz.

D: Hazugság, hogy nem szeretem a gulyáslevest és a pacalpörköltet.

E: A gulyásleves és a pacalpörkölt közül pontosan az egyiket szeretem.

Minden négyzet téglalap.

A: Vannak olyan négyzetek, amelyek téglalapok.

B: Nincs olyan négyzet, amelyik nem téglalap.

C: Ha egy síkidom négyzet, akkor biztosan téglalap is.

D: A téglalapok egy része négyzet.

E: Négyzetek léteznek és mind téglalapok.

A 2 racionális szám, a π nem racionális.

A: A 3 nem racionális szám, de a 2 igen.

B: Ha egy szám racionális, akkor az a 2.

C: Két racionális szám van: 2 és 4.

D: Nem igaz, hogy nem racionális a 2 és a π.

E: A 2 és a π közül pontosan az egyik racionális.

	Minden tigris...					Szeretem a...					Minden négyzet...					A 2 ...				
diák	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
N1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
N2	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
N3	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
N4	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
N5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
N6	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
N7	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
N8	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
N9	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
N10	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
N11	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
N12	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
N13	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
N14	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
N15	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
N16	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
F1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
F2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
F3	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1
F4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
F5	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
F6	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
F7	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
F8	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1
F9	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
F10	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
F11	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
F12	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
F13	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
F14	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
F15	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
F16	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1

5.2. táblázat. Logika bemeneti mérés 1. feladatra adott válaszok (Diákok esetén az N a német, az F a francia csoportra utal, a sorszám véletlenszerűen lett a csoporton belül sorsolva. A 0 azt jelenti, hogy nem jelölte meg az adott választ, az 1 azt jelenti, hogy megjelölte.)

2. Fogalmazz meg egy olyan állítást, ami bármilyen szituációban mindig ellentétes igazságértékű. (Ha az egyik igaz, akkor a másik hamis; és fordítva.)

a) A ház piros.

b) Ma kedd van vagy csütörtök.

c) Nem szeretem a zellert.

d) Ez a szám kétjegyű.

e) Ez a négyszög nem deltoid.

f) Ennek az egyenletnek egy vagy kettő gyöke van.

diák	A ház piros.	Ma kedd van vagy csütörtök.	Nem szeretem a zellert.	Ez a szám kétjegyű.	Ez a négyszög nem deltoid.	Ennek az egyenletnek egy vagy kettő gyöke van.
N1	A ház teljesen fehér.	Tegnap kedd vagy csütörtök volt.	A kedvenc ételem a zeller.	Ezt a számot tízzel osztva 1-nél kisebb számot kapunk.	Ez a négyszög egy rombusz.	Ennek az egyenletnek kettőnél biztosan több gyöke van.

5.3. táblázat. Egy tanuló logika bemeneti mérés 2. feladatra adott válaszai. Az összes tanuló válasza az A. függelékben megtalálható. (Diákok esetén az N a német, az F a francia csoportra utal, a sorszám véletlenszerűen lett a csoporton belül sorsolva.)

3. Karikázd be azoknak az állításoknak a betűjelét, amelyek következnek a felettük található aláhúzott állítás - függetlenül, hogy az eredeti állítás igaz vagy hamis. (Nem biztos, hogy pontosan egy jó válasz van.)

<u>A pénztárcámban van két bankjegy, aminek az összértéke 1500 Ft.</u>

A: Van 500 Ft-osom.

B: Van 500 Ft-osom és 1000 Ft-osom.

C: Van 500 Ft-osom vagy 1000 Ft-osom.

D: Van két 1000 Ft-osom.

E: 1500 Ft-om van.

<u>Ez a szám osztható 6-tal.</u>

A: Ez a szám osztható 2-vel.

B: Ez a szám osztható 2-vel és 3-mal.

C: Ez a szám osztható 2-vel vagy 3-mal.

D: Ez a szám osztható 12-vel.

E: Ez a szám a 6.

<u>Ennek a síkidomnak van 2 átlója vagy egy párhuzamos oldalpárja.</u>

A: Ennek a síkidomnak legalább négy oldala van.

B: Ennek a síkidomnak pontosan négy oldala van.

C: Ennek a síkidomnak nincs tompaszöge.

D: Ennek a síkidomnak nincs 2 párhuzamos oldalpárja.

E: Ennek a síkidomnak van 2 átlója és egy párhuzamos oldalpárja.

<u>Matyi mindig felszáll buszra vagy villamosra, hogy az iskolába jusson.</u>

A: Matyi legalább kétféleképpen juthat el az iskolába.

B: Matyi pontosan kétféleképpen juthat el az iskolába.

C: Matyi nem száll HÉV-re, hogy eljusson az iskolába.

D: Matyi nem tud kétféle villamossal bejutni az iskolába.

E: Matyi busszal és villamossal jut el az iskolába.

	A pénztárcámban...					Ez a szám...					Ennek a síkidomnak...					Matyi mindig...				
diák	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
N1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
N2	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0
N3	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
N4	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
N5	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
N6	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
N7	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
N8	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
N9	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1
N10	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
N11	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
N12	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
N13	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
N14	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
N15	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
N16	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
F1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
F2	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
F3	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
F4	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
F5	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
F6	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
F7	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
F8	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
F9	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
F10	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1
F11	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
F12	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
F13	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
F14	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
F15	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
F16	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0

5.4. táblázat. Logika bemeneti mérés 3. feladatra adott válaszok (Diákok esetén az N a német, az F a francia csoportra utal, a sorszám véletlenszerűen lett a csoporton belül sorsolva.)

5.6.3. Félév végi visszajelzés - 2019. február 14-15.

A félév végéig a kísérleti csoportban maradt 15 tanuló közül (egy diák elhagyta az iskolát) 13 értékelhető módon töltötte ki a félév végi névtelen visszajelzési űrlapot.

E diákok közül három azt írta, hogy a társasjátékokkal kapcsolatos nézeteik nem változtak a társasjátékok során, 10 azt írta, hogy a véleményük megváltozott, amikor jobban megismerték diáktársaikat. Nagyrészt pozitív változás volt, de volt, aki megemlítette, hogy a diáktársak játék közben „idegesítőek" voltak, vagy a diáktársak rosszabbul játszottak, mint amire számítottak. Tehát a diáktársakkal kapcsolatos vélemény megváltozása nem egyirányú.

A diákok döntő többsége megerősítette feltételezésünket: azt is érezték, hogy javultak az interperszonális kapcsolataik, fejlesztették szociális kompetenciáikat, ezáltal a kompetenciamotivációjuk is javult. 13 résztvevő közül 6 résztvevő életének legjobb matematikaóráinak tekintette a társasjátékkal töltött órákat. A tízes skálán, ahol 10 élete legjobb, 1 pedig élete legrosszabb matematikaóráját jelenti, egy 7-es és egy 8-as értékelést leszámítva minden értékelés 9-es vagy 10-es volt. A társasjátékkal töltött órák pozitív megítélése és a motivációs hatása nyilvánvalóvá válik a szabadszavas válaszokból is. A kompetenciamotiváció egyik fő összetevője, hogy egy tevékenység során érzik, hogy fejlődnek. Ez szintén egyértelműen látszik a matematikai és nem matematikai készségekre adott válaszok nagy részéből.

A 5.6-os táblázatban a kérdőív kérdései és az azokra adott válaszok szerepelnek. A diákok beazonosítása nélkül nem értelmezhetőek, ezért a következő kérdéseket nem tartalmazza a táblázat:

- Ki játszik a legjobban? (Több embert is megjelölhetsz.) a) Avalonban b) Da Vinci-kódban?
- Kivel játszol a legszívesebben? (Több embert is megjelölhetsz?) a) Avalonban b) Da Vinci-kódban

- Van-e olyan csoporttársad, akiről bármilyen irányban változott a véleményed, bármilyen téren a társasos órák folyamán? (Milyen téren, milyen irányban, nevet nem muszáj írnod hozzá.)

Értékeld 10-es skálán az idei matematika-órákat az elmúlt évekhez képest!	Értékeld 10-es skálán a matematikaórákat általában!	Mennyre tartottad érthetőnek a) az Avalon alapjátékot	b) Avalon kiegészítő-szabályokkal	c) Da Vinci-kód	Menniyre tetszett a) Avalon alapjáték	b) Avala-on kiegészítő-szabályokkal	c) Da Vinci-kód
10	10	4	6	2	5	7	6
9-10	9	2	3	2	7	8	2

Melyik kiegészítőszabályokat játszod szívesen az Avalonban? Melyiket nem? Miért?	Menniyre fejlődtél a játékokban az első alkalomhoz képest? a) Avalon	b) Da Vinci-kód	Milyen matematikai készségeid fejlődtek saját érzésed szerint? (Ha semmilyen, akkor azt írd ide.)	Milyen nem matematikai készségeid fejlődtek saját érzésed szerint? (Ha semmilyen, akkor azt írd ide.)
mindegyikkel, mert izgalmasabbá teszik	5	3	logika	társaim megismerése, hazugság megismerése
Minél több különleges karakterrel, izgalmasabb	7	4	logik, kombinatorika, valószínűségszámítás	társalgási, megtévesztés, félrebeszélés

5.6. táblázat. A félév végi, társasjátékkal töltött órákról szóló visszajelzés kérdései és két diák válaszai. A diákok válaszait teljeskörűen a B. függelék tartalmaza

5.6.4. Kimeneti mérés logikából - 2019. március 28-29.

A kimeneti logika mérés megegyezett a bemeneti logika méréssel, és a logika tanítása blokk után közvetlenül írták meg a tanulók. Ezt megelőzte egy témazáró dolgozat, illetve annak megbeszélése, tehát a kimeneti mérés nem képezte osztályozás tárgyát. A bemeneti mérés után a diákok semmilyen visszajelzést nem kaptak, és nem tudták azt, hogy a kimeneti mérés meg fog egyezni a bemeneti méréssel.

A kimeneti mérés eredményeinél azt vizsgáltuk, hogy a csoport, amelyik társasjátékozott a félév során, jobban fejlődött-e a logika terén, mint a másik csoport.

A kérdések megegyeztek a bemenetei méréssel, ezért csak a válaszokat közlöm az alábbi táblázatokban, ezúttal is feladatonként. Az F17 jelzésű diák nem írta meg a bemeneti tesztet, mert év közben jött, az F15 jelzésű diák pedig elhagyta az iskolát ezen kimeneti mérés előtt.

Az egyes tanulók válaszait a C. függelék tartalmazza.

Az adatokat elemezve ebben az esetben arra jutottam, hogy nem lehet szignifikánsan jobb logikai fejlődést kimuatatni a kísérleti csapatnál. Ennek az oka többféle lehet.

Egyrészt kevés időt töltött a csoport társasjátékozással ahhoz, hogy méréssel kimutatható legyen a különbség. Másrészt nyitott kérdés és további vizsgálatokat igényel, hogy a különböző logikai, gondolkodási struktúrák mennyire könnyen konvertálhatóak. Ebben az esetben felmerül az is, hogy ugyan fejlődik a matematika szabályainak megfelelő logikus gondolkodása a diákoknak, de annak nincs hatása a formális logika ilyen jellegű alkalmazására.

A később ismertetett visszajelzésekből ugyanakkor kiderült: több diák úgy érezte, hogy fejlődött a logikája a társasjátékozástól. Ezt is hasonlóan fontosnak gondolom, mint a formális logikára mért hatás kimutatását.

5.6.5. Országos Kompetenciamérés - 2019. május 29.

Bár a kontrollcsoport kevésbé szigorúan tervezett módon játszott, és az ő fejlődésük nincs részletesen dokumentálva, az év végén megírt Országos Kompetenciamérés adatait elemzésre érdemesnek találom. Itt osztályszintű adatok állnak rendelkezésre.

A magyarországi kompetenciamérés összhangban van az EU kulcskompetenciáival és a 2012-es PISA-mérés kompetenciáival. A magyar kormány alapján kiadott hivatalos jelentés az adott iskola gyermekeinek értékeléséről egy komplex modellt használ a gyermekek és az iskolák teljesítményének értékelésére. A mért eredmények mellett ez az értékelés egy, a hallgatók családi hátterére vonatkozó kérdőíves felmérésen alapul (*OKM 2019 FIT-jelentés, Útmutató a Telephelyi jelentés ábráinak értelmezéséhez*, 2020).

Ez a modell a specifikus nyelvi képzés miatt nem illeszkedik ugyan teljesen a vizsgált osztályra és az iskolára, de így is nagyon informatív az eredmény. Arra voltam kíváncsi, hogy miképpen viszonyul az osztály teljesítménye az iskola másik teljesen azonos osztályához. (Nyelvi előkészítő, 9. osztály, azonos matematika tanterv, leszámítva a kísérletet.)

Az adatokból megállapítható, hogy a diákok matematikai kompetenciája annak ellenére is megfelelően fejlődött, hogy a heti három óra helyett egy-egy szemeszterben csak két matematika órájuk volt, a harmadikban játszottak. Az adatokat az 5.7-es táblázat foglalja össze (*FIT-jelentés, Telephelyi jelentés, 10. évfolyam :: 4 évfolyamos gimnázium, VII. Kerületi Madách Imre Gimnázium (OM azonosító: 035233, Telephely kódja: 001)*, 2020).

Nem is várható el egy ilyen „csekély” behatástól, hogy a várt fejlődésnél szignifikánsan jobb eredményt érjünk el. Mindezt a logikai képességek fejlődésénél is láthattuk.

Teljesítmény az OKM modellje alapján várthoz képest	„Társasjátékos osztály”	Párhuzamos osztály
jobb, mint várható	15	10
szignifikánsan jobb, mint várható	0	1
ugyanolyan vagy rosszabb, mint várható	13	20
szignifikánsan rosszabb, mint várható	4	11

5.7. táblázat. A kísérletben résztvevő osztály (mind a két csoport) és a párhuzamos osztály Országos Kompetenciamérés (OKM) matematika eredményeinek összehasonlítása az OKM hivatalos kiértékelése alapján

5.6.6. Év végi anonim visszajelzés - 2019. június 7-11.

Év végén az egész osztályt megkérdeztük a társasjátékozással kapcsolatos élményeikről. Az itt kapott eredményeket az 5.8-as táblázatban foglaltuk össze.

	félév végi válaszok Avalon - nem anonim	év végi válaszok Avalon - anonim	év végi válaszok Azul - anonim
10	7*	10	2
9	4	1	3
8	1	1	5
7	1	0	2
6 or less	0	0	0

5.8. táblázat. Válaszok eloszlása a következő kérdésre: Értékeld az idei társasjátékos matematikaórákat. (1=életem legrosszabb matematikaórái, 10=életem legjobb matematikaórái.) Az Avalon és az Azul jelöli, hogy melyik csoport válaszairól beszélünk, a kiértékelésnek ebből a szempontjából egyik sem tekinthető kontrollcsoportnak, ezért használjuk ezt a jelölést.
*: egy diák „9-10” választ adott, ő a 10-nél került beszámításra

Az eredmények magukért beszélnek: ezek alapján elmondható, hogy a diákok nagyon élvezték ezeket a matematikaórákat. Annak az okát, hogy az Azullal játszó csoport egy kicsit rosszabbul értékelte az év végén a játékot, szabadszavas válaszaik és szóbeli beszélgetéseink alapján abban látom, hogy hiányzott nekik a változatosság. Fontos lett volna, hogy náluk is legalább két játékot váltogassunk.

6. fejezet

Diszkusszió

6.1. Az eredmények összegzése

Négy nagy egyetem csaknem 2100 diákjának bemeneti matematika tesztjeit elemeztem. Olyan szakokat választottunk, ahol ténylegesen szükség van a matematikára, van matematika bemeneti teszt. Ezek alapján megállapítható volt, hogy számos olyan feladat van, amit az adott dolgozatot megíró diákoknak a fele se tudott hibátlanul megoldani, holott a középszintű matematika érettségi vizsgakövetelményei között szerepel. Ebből kiderül, hogy Magyarországon a középiskolai matematikaoktatás során még olyan diákoknál is hiányzik számos alapvető tudáselem, akik a matematikát felsőoktatási tanulmányaikban használni fogják.

Ezt követően négy magyarországi gimnázium 10-12. évfolyamos diákjával, 279 fővel megíratásra került egy, a sikertelen feladatokból összeállított, 45 perces, hét feladatból álló teszt. Az volt a hipotézisünk, hogy a diákok többsége valójában sose tudta ezeket, esetleg az adott ismeret „tanulása" után nagyon rövid ideig. A minta összeállításánál ezért az volt a cél, hogy az átlagosnál jobb, de ne elit diákokat kerüljenek kiválasztásra, ezért a kerületükben, régiójukban „erősebb" iskola hírében álló budapesti gimnázimuokat kerestünk, több esetben hat- és nyolcévfolyamos osztályokkal. Arra alapoztam, hogy ha ezen a mintán is sikerül belátni, hogy nem sikeresek már a középiskolások sem ezeknek a feladatoknak a megoldásában, akkor kijelenthető, hogy a diákok többsége országosan se képes erre. Ez különösen igaz a szelektív magyar középiskolai rendszer miatt (OECD, 2019; Csullog et al., 2014; Keller & Mártonfi, 2006).

A teszt első öt feladata kimondottan a legalapvetőbb ismereket kérte számon, mint az algebrai törtek közös nevezőre hozása, gyökös kifejezés értelmezési tartományának vizsgálata, $(a-b)^2$ azonosság használata, kiemelés kéttagú, másodfokú polinomból, valamint a másodfokú függvény ábrázolása.

A felmérésen 244 diák töltötte ki megfelelően a statisztikai adatokat, ezeket értékeltük ki. A vizsgált minta többsége, 180 fő, „normál" matematikacsoportba járt, de a 11-12. évfolyamosak közül 64-en fakultációs óraszámban tanulták a matematikát. A minta a diákok előző év végi matematikajegyei szerint is változatosak voltak: 27 db kettes, 63 db hármas, 84 db négyes és 70 db ötös. 132 diák kezdte a középiskolát nyolcadik osztály után, szerkezetváltó, azaz hat- vagy nyolcévfolyamos képzésben 112-en vettek részt. A feladatmegoldások vizsgálatát öt csoportra bontva végeztük: 10. évfolyam, 11. évfolyam normál, 11. évfolyam fakultáció, 12. évfolyam normál és 12. évfolyam fakultáció. Az egyes csoportokra külön-külön vizsgáltuk, hogy az oda tartozó diákok mekkora része tudta helyesen megoldani az egyes feladatokat.

A zárójelfelbontást és a szorzattá alakításos feladatokat is kevesebb, mint 80% oldotta meg mind az öt csoportban. A $f(x)=-2(x-3)^2+5$ kifejezés helyes ábrázolására képes tanulók aránya még a 11. és 12. évfolyam fakultációs csoportokban sem lépte át az 55%-ot. A $\sqrt{1-7x}$ értelmezési tartományát a 12. évfolyamos fakultációs csoporton kívüli másik négy csoportban 23-27% tudta meghatározni. A $\frac{4x}{(x^2-1)}-\frac{3}{5x+5}$ kifejezést a három nem fakultációs csoportban kevesebb, mint 25% tudta összevonni, holott a legegyszerűbb alak sem volt elvárás. A 11-12. évfolyamos fakultációs csoportokban se lépte át az 50%-ot a helyes megoldók aránya. A két szöveges feladatra elenyésző a kapott helyes válaszok száma, ezért azt ennél mélyebben nem is elemeztük: a jó megoldások alacsony száma nem tett lehetővé statisztikai összehasonlításokat.

Az eredmények elemzése alapján kijelenthetjük, hogy a felsőoktatási bemenetkor sikertelenül számon kért tudás, nem elveszett, hanem alapvetően soha nem is volt meg. Ezért az is megállapítható, hogy a felsőoktatási hallgatók sikertelenségének okát nem lehet pusztán a hosszú távú felejtéssel vagy a szokatlan számonkérési móddal, az új környezettel igazolni, még ha utóbbi biztosan befolyásolta is a felsőoktatási eredményeket (Gueudet, 2008; Cherif & F. Wideen, 1992; Tall, 1992).

A kapott eredmények arra motiváltak, hogy új utakat keressek ahhoz, hogy a matematikát, azon belül különösen a logikát közelebb hozzam a diákokhoz, és valódi matematikai és logikai kompetenciákat fejlesszek, amelyeket hétköznapi helyzetekben is alkalmazni tudnak a diákok. Ehhez összeállítottam egy kísérleti tantervet 9. osztályosok számára. Ennek keretében a társasjátékozás és a matematikai logika direkt fejlesztése 9. osztályban a matematikaórák szerves részévé vált. A kísérlet kis létszámú volt ugyan, de az eredemények ígéretesek, és több kezdeti hipotézisünk is alátámasztásra került. A kísérlet során rengeteg adat keletkezett, amelyek alkalmasak későbbi kutatásokra, ezeket közöltem jelentem értekezésben.

Az országos kompetenciamérés eredményei alapján kijelenthetjük, hogy a kísérletben részt vevő osztály nem szenvedett hátrányt a matematikai kompetenciák általános fejlődése terén. Ezt a párhuzamos, azonos tanrend szerint tanuló osztállyal történő összehasonlítás alapján állítjuk, amely az 5.7-es táblázatban kerül bemutatásra. A kísérlet legfontosabb eredménye, hogy a játékkal töltött, szokásostól eltérő matematikaórák nem vesztek kárba a matematikatanulás szempontjából (Dukán, Fried, & Szabó, 2021).

Az absztrakt matematikai logika fejlesztésére a társasjátékozás direkt hatását nem tudtam kimutatni. Ennek nem feltétlenül az az oka, hogy nincs kapcsolat a két tevékenység között; lehet, hogy a kísérlet túl rövid volt ahhoz, hogy számottevő hatást érjen el ezen a téren. A kompetenciamotivációt ugyanakkor egyértelműen sikerült fejleszteni a társasjátékokkal, különösen a logika terén, ezt az 5.6-os táblázat adataiból kiolvashatjuk. Az értékelhető választ adó diákok több, mint fele érzékelte úgy, hogy matematikai és nem matematikai készségei is fejlődtek. Egyetlen olyan diák sem volt, aki úgy érezte volna, hogy sem a matematikai, sem az az egyéb készségei ne fejlődtek volna a társasjátékozástól. Egy 7-es és egy 8-as értékelést leszámítva mindenki 9-10-esre értékelte a társasjátékozással töltött matematikaórákat a korábbi évek matematikaóráihoz képest. Hasonló eredmények születettek az egész osztályt érintő év végi felmérésen is, amelyet az 5.8-es táblázatban ismertettem. Hetesnél rosszabb értékelés semelyik csoportban nem született az anonim visszajelzésben sem.

A korlátozott idejű kísérlet keretei között is levonható két lényeges következtetés. Az első, hogy a társasjátékozás alatt a tanulócsoport elérte, illetve meghaladta a hagyományos matematikatanításban részesülő kontrollcsoport szintjét, méghozzá két dologban: a matematika tantárgyi követelmények teljesítésében és matematikai kompetenciafejlődésben. A második, hogy ezen túl fejlődött a kompetenciamotivációjuk és a közösségi kompetenciájuk is. Ezek alapján kijelenthetjük, hogy a társasjátékokra fordított idő megtérül – nem csak az óvodában vagy az általános iskolában, hanem a középiskolában is.

6.2. Tézisek

1. A magyarországi középiskolai matematika tantervek által előírt követelmények jelentős részét nem tudják teljesíteni a felsőoktatásba frissen bekerülő diákok.

2. A magyarországi középiskolai matematika tantervek által előírt tudáselemek közül több olyan van, ami nem képezi a diákok tudásának szerves részét, már a tantervi hely szerinti évben sem.

3. A társasjátékozás fejleszti a közösségi kompetenciákat a középiskolában is.

4. A társasjátékozással töltött idő nem vész el; a matematika tantárgyi köve-

telményeinek elsajátításában és a matematikai kompetenciák fejlesztésében nem szenvednek hátrányt azok a diákok, akik a matematikaóráik egy részét, alaposan átgondolt, tudatosítást segítő tanári munkával támogatott játékkal töltötték.

5. A társasjátékozás középiskolában is fejleszti a kompetencia-motivációt.

7. fejezet

Záró gondolatok

7.1. Egyéb megjegyzések

A későbbiekben érdemes lenne megvizsgálni, hogy az igazi játékoknak milyen pozitív hatása van a gamifikált matematikai tananyag befogadására. Az általam végzett kísérletben ennek mérésére nem volt lehetőség, hiszen a kísérletünk során mindkét csoport ténylegesen játszott, nem beszélhetünk gamifikációról. Fontos lenne reprezentatív mintákat bevonni a kísérletbe egyes paramétereire (időtartam, emberek száma, életkor).

Jelen értekezés alapvetően a magyarországi Nemzeti Alaptantervvel összehangban végzett kísérletekről számol be. Azt ugyanakkor fontos leszögezni, hogy ez az összeegyeztetés egy kevésbé előíró jellegű Nemzeti Alaptanterv és különösen kötelező kerettantervek nélkül sokkal hatékonyabban valósulhatott volna meg. Jelen értekezés is megerősíti azt a számos szakember által képviselt álláspontot, miszerint a szigorúbb, részletesebb tananyag-előírás nem jár együtt azzal, hogy egységesebb lesz a diákok kimeneti tudása. Ezért a kötelező kerettantervek és a túlzóan részletező nemzeti alaptanterv helyett ideálisabb lenne egy egy kompetenciákra összpontosító magtanterv. Ezzel, valamint a hozzá tartozó kimeneti (középiskola esetén érettségi) követelmények bevezetésével lehetségessé válna az innovatívabb tanítási módszerek alkalmazása, a csoporthoz igazodó fejlesztés.

A középiskola és a felsőoktatás kapcsolata megváltozott az elmúlt években. Jelen értekezésből is kiderül, hogy erre már a magyar felsőoktatás is reagált a bevezető matematika kurzusokkal. Ennek megfelelően felmerül a kérdés, hogy a jelenlegi felvételi szabályozás mennyire megfelelő. Az értekezés arra a magyar felvételi rendszerben rejlő ellentmondásra is rámutat, hogy a tandíjat fizető hallgatóknak alacsonyabb teljesítmény esetén is lehetséges az egyetemre való felvétel. Ez a gyakorlat feleslegesen szűkíti a felsőoktatási hozzáférést. A magyarországi középfokú oktatás szelektivitása miatt, illetve az általános társadalmi szolidaritás elvén véleményem szerint a kettős ponthatárokat érdemes eltörölni.

7.2. Köszönetnyilvánítás

Köszönöm a segítséget az összes kísérletben részt vevő iskola matematikatanárainak, vezetőségének és a kísérletben részt vevő diákoknak. Külön köszönöm a VII. Kerületi Madách Imre Gimnázium igazgatóságának és a tantestületnek (különösen a matematikatanároknak), hogy helyet biztosítottak a kísérleti tanításhoz.

Köszönöm a hozzájárulást a kísérletben való részvételhez a 2018/2019-es tanév 9.B osztályának és szüleiknek. Köszönöm a társasjátékokkal kapcsolatos gyakorlati tanácsokat és a játékok rendelkezésre bocsátását Magyar Zsoltnak, a Szent István Gimnázium matematikatanárának.

Köszönöm a segítséget Máté Andrásnak, aki A logika tanítása című szakdolgozatom témavezetőjeként számos olyan értékes tanácsot, javaslatot és szakirodalmat adott, amit a doktori kutatásomhoz is fel tudtam használni.

Köszönöm a segítséget Fried Katalinnak, aki társszerzőként segített a kutatás jelentős részét feldolgozó cikk megírásában, különösen a kutatási eredmények nemzetközi sztenderdeknek megfelelő formába öntésében. Hasonlóképpen köszönöm a hasznos tanácsokat és a nyelvi lektorálást Kuti Péternek és Kovács Andrásnak.

Köszönöm a családomnak, barátaimnak, barátnőmnek, hogy támogattak a doktori tanulmányok elvégzésében.

Leginkább pedig köszönöm két témavezetőmnek, Szabó Csabának és Vásárhelyi Évának a rám fordított idejüket, a doktori tanulmányaim elvégzéséhez rám szánt számos munkaórájukat. Évának külön köszönöm a doktori képzés előttre visszanyúló sok éven át tartó biztatást, támogatást, közös munkát.

Irodalomjegyzék

100/1997. (VI. 13.) Korm. rendelet az érettségi vizsga vizsgaszabályzatának kiadásáról. (2016). Retrieved from https://njt.hu/jogszabaly/1997-100-20-22.44

110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról (2018. 09. 01-én hatályos állapot). (2018). Retrieved from https://njt.hu/jogszabaly/2012-110-20-22.4

110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról (2021. 09. 01.-én hatályos állapot). (2021). Retrieved from https://njt.hu/jogszabaly/2012-110-20-22

20/2012. (VIII. 31.) EMMI rendelet a nevelési-oktatási intézmények működéséről és a köznevelési intézmények névhasználatáról. (2017). Retrieved from https://njt.hu/jogszabaly/2012-20-20-5H.20

51/2012. (XII. 21.) EMMI rendelet a kerettantervek kiadásának és jóváhagyásának rendjéről. (2016). Retrieved from https://njt.hu/jogszabaly/2012-51-20-5H.7

Aczél, Z. (2015a). *A társasjáték-pedagógia filozófiája.* Retrieved from http://www.tani-tani.info/a_tarsasjatek_pedagogia_filozofiaja

Aczél, Z. (2015b). *A társasjáték-pedagógia filozófiája.* Retrieved from http://www.tani-tani.info/azul_a_szabadsag_logikaja

Barbarics, M., Rózsahegyiné Vásárhelyi, É., & Wintsche, G. (2019). *A játékok fejlesztő hatása.* Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE).

A Bolyai Intézet története. (2021). Retrieved from http://www.math.u

-szeged.hu/mathweb/index.php/hu/erdekessegek/a-bolyai-intezet-toertenete

Cherif, A., & F. Wideen, M. (1992). The problems of the transition from high school to university science. *B.C. Catalyst*, *36*, 10–18.

Csullog, K., D Molnár, É., Herczeg, B., Lannert, J., Nahalka, I., & Zempléni, A. (2014). *Hatások és különbségek. másodelemzések a hazai és nemzetközi tanulói képességmérések eredményei alapján.* Oktatási Hivatal.

Damiani, D., Pereira, L., & Nascimento, A. (2017, 07). Intelligence neurocircuitry: Cortical and subcortical structures. *Journal of Morphological Sciences*, *34*, 123-129. doi: 10.4322/jms.100417

Dukán, A. F., Fried, K., & Szabó, C. (2021). The time spent on board games pays off : links between board game playing and competency motivation. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *19*(1), 119–131. doi: 10.5485/tmcs.2021.0523

Dukán, A. F., Szabó, C., & Vásárhelyi, É. (2020). Logic in secondary school: From Tamás Varga's proposed curriculum to board games. In G. Ambrus, J. Sjuts, É. Vásárhelyi, & O. Vancsó (Eds.), *Komplexer mathematikunterricht: Die Ideen von Tamás Varga in aktueller Sicht* (p. 143-156.). WTM-Verlag Münster. doi: 10.37626/ga9783959871648.0

Erdélyi, É., Dukán, A. F., & Szabó, C. (2019, 07). The transition problem in hungary: curricular approach. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *17*, 1-16. doi: 10.5485/TMCS.2019.0454

FIT-jelentés, Telephelyi jelentés, 10. évfolyam :: 4 évfolyamos gimnázium, VII. Kerületi Madách Imre Gimnázium (OM azonosító: 035233, Telephely kódja: 001). (2020). Oktatási Hivatal. Retrieved from https://www.kir.hu/okmfit/JelentesLetoltese.aspx?parent=150232&proc=12&type=3

Goddings, A.-L., Mills, K. L., Clasen, L. S., Giedd, J. N., Viner, R. M., & Blakemore, S.-J. (2014). The influence of puberty on subcortical brain development. *NeuroImage*, *88*, 242-251. Retrieved from https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1053811913010094 doi: 10.1016/j.neuroimage.2013.09.073

Gordon Győri, J. (2021). *Tehetségek együtt - A Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium első speciális matematika tagozatos gimnáziumi osztálya tehetségpedagógiai szempontokból.* Magyar Tehetségsegítő Szervezetek Szövetsége.

Gosztonyi, K. (2015). Hagyomány és reform az 1960-as és '70-es évek matematikaoktatásában: Magyarország és Franciaország reformjainak összehasonlító elemzése. Retrieved from `http://doktori.bibl.u-szeged.hu/id/eprint/2989/2/Gosztonyi_disszertacio.pdf` doi: 10.14232/phd.2989

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 237–254. doi: 10.1007/s.10649-007-9100-6

Herber, H.-J., & Vásárhelyi, É. (2006a). Competence motivation and competence acquisition: functional didactic options by inner differentiation and individualization. (Kompetenzstreben und Kompetenzerwerb: Funktionale didaktische Fördermöglichkeiten durch Differenzierung und Individualisierung.). *TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE*, *4*(1), 1-52.

Herber, H.-J., & Vásárhelyi, É. (2006b). A demonstration of contemporary empirical social science research. Eine exemplarische Darstellung zeitgemäßer sozialwissenschaftlicher empirischer Forschung. *SALZBURGER BEITRÄGE ZUR ERZIEHUNGSWISSENSCHAFT*, *10*(1), 5-22.

Kalmár, L. (1970a). *Matematika alapjai II. kötet: Matematika logika, a matematika elvi kérdései 1-2. füzet.* Tankönyvkiadó.

Kalmár, L. (1970b). *Matematika alapjai I. kötet: Halmazelmélet 1-2. füzet.* Tankönyvkiadó.

Keller, G., & Mártonfi, J. (2006). Oktatási egyenlőtlenségek és speciális igények. In G. Halász & J. Lannert (Eds.), *Jelentés a magyar közoktatásról* (pp. 377–412).

Kirriemuir, J., & Mcfarlane, A. (2004). *Literature Review in Games and Learning.* Retrieved from `https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190453` (A NESTA Futurelab Research report - report 8)

K. Nagy, E. (2014). *Gondolkodásfejlesztés táblajátékkal.* Magyar Tehetségsegítő Szervezetek Szövetsége.

Magyar, Z. (2016). Játékok a tanórán, szakkörön. *ÉRINTŐ: ELEKTRONIKUS MATEMATIKAI LAPOK*, *szeptember*. Retrieved from https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2016-09/346-jatekok-a-tanoran-szakkoron

OECD. (2019). *Balancing School Choice and Equity*. Retrieved from https://www.oecd-ilibrary.org/content/publication/2592c974-en doi: 10.1787/2592c974-en

OKM 2019 FIT-jelentés, Útmutató a Telephelyi jelentés ábráinak értelmezéséhez. (2020). Oktatási Hivatal. Retrieved from https://www.kir.hu/okmfit/files/OKM2019_Utmutato_a_Telephelyi_jelentes_abrainak_ertelmezesehez.pdf

Oldfield, B. J. (1991). Games in the learning of mathematics: 1: A classification. *Mathematics in School*, *20*(1), 41–43.

Ongstad, S., Hudson, B., Nyström, P., Pepin, B., & Singer, M. (2007). Language in Mathematics? A comparative study of four national curricula. Director of School, Out of School and Higher Education of the Council of Europe.

Pálfalvi, J. (2012). *Matematika didaktikusan*. Budapest, Magyarország: Typotex.

Pálfalvi, J. (2017). Varga tamás élete és munkássága.. Retrieved from http://www.ematlap.hu/images/2018-marc/Hirek/Varga-Tamas-Hmvh2017.pdf

Prensky, M. (2001a). Digital natives, digital immigrants. *On the horizon*.

Prensky, M. (2001b). Digital natives, digital immigrants part 2: Do they really think differently? *On the horizon*.

Rudolf, A., & Warwitz, S. A. (1982). *Spielen-neu entdeckt: Grundlagen-Anregungen-Hilfe*. Herder.

Sawyer, S. M., Azzopardi, P. S., Wickremarathne, D., & Patton, G. C. (2018). The age of adolescence. *The Lancet Child & Adolescent Health*, *2*(3), 223-228. Retrieved from https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352464218300221 doi: 10.1016/S2352-4642(18)30022-1

Somfai, Z. (2002, december). A matematika tantárgy helyzete a felső tagozaton és a középiskolában. *Új Pedagógiai Szemle*. Retrieved from https://epa.oszk.hu/00000/00035/00066/2002-12-hk-Somfai-Matematika.html

Squire, K. (2005). *Game-based learning : present and future state of the field.*

University of Wisconsin-Madison Academic ADL Co-Lab.

Szabari, V. (2012). Szalai sándor (1912–1983). *Szocológiai Szemle*(2012/3). Retrieved from `https://szociologia.hu/dynamic/he12_0640_01_beliv_v2_szabari_vera.pdf`

Szirmai, H. (2003). A matematikai és a nyelvi képesség közötti összefüggés vizsgálata. *Új Pedagógiai Szemle*(2003/5). Retrieved from `https://epa.oszk.hu/00000/00035/00071/2003-05-ta-Szirmai-Matematikai.html`

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495–511). New York: Macmillan.

Török, J., & Fried, K. (2020). A játékkal töltött idő nem elvesztegetett idő. *Érintő*(17. szám). Retrieved from `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2020-12/1016-torok-judit-jatekok`

Varga, T. (1962). *Matematikai logika kezdőknek I.* Budapest, Magyarország: Tankönyvkiadó.

Vásárhelyi, É. (Ed.). (2013). *Matematika módszertani példatár.* Retrieved from `http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/160.pdf`

Wasserman, J. A., & Banks, J. (2017). Details and dynamics: Mental models of complex systems in game-based learning. *Simulation & Gaming*, *48*(5), 603-624. doi: 10.1177/1046878117715056

Egyéb, az értekezés témájában készült saját előadások, írások

Jelen felsorolás tartalmazza azokat az előadásokat, dokumentumokat, amelyek az értekezés témájáról szólnak, de nem elérhetőek kereshető adatbázisokban.

- Dukán András Ferenc; Szabó Csaba: Mit hoz a gólya szeptemberben? - Az egyetemre frissen felvételt nyert diákok matematikai teljesítménye. (Konfe-

rencia előadás) Matematika és Informatika Didaktika Kutatások Konferencia. ELTE TTK, Budapest. 2017.

- Dukán András Ferenc: A logika tanítása. (Szakdolgozat) ELTE BTK. 2019.
- Dukán András Ferenc: Tanítási kísérlet: A logikus gondolkodás fejlesztése matematika órán. (Konferencia előadás) Matematika és Informatika Didaktika Kutatások Konferencia. EKE Comenius Campus, Sárospatak. 2020.

A. függelék

Logika bemeneti mérés 2. feladat válaszai

diák	A ház piros.	Ma kedd van vagy csütörtök.	Nem szeretem a zellert.	Ez a szám kétjegyű.	Ez a négyszög nem deltoid.	Ennek az egyenletnek egy vagy kettő gyöke van.
N1	A ház teljesen fehér.	Tegnap kedd vagy csütörtök volt.	A kedvenc ételem a zeller.	Ezt a számot tízzel osztva 1-nél kisebb számot kapunk.	Ez a négyszög egy rombusz.	Ennek az egyenletnek kettőnél biztosan több gyöke van.

N2	Hazugság, hogy a ház nem kék.	Biztos, hogy ma szerda van, mert nincs nyitva a könyvtár és hétköznap mindig nyitva van.	Amikor a piacra megyek azonnal zellert veszek, hogy finom levest főzhessek belőle.	A szám nagyobb és nem egyenlő 99-cel.	A deltoid biztos, hogy négyszög.	Az egyenletnek maximum 1 megoldása lehet.
N3	A ház kék.	Ma a hétvége utolsó napja van.	Szeretek mindenfajta zöldséget.	Ennek a számnak a számjegyei-nek összege nagyobb, mint 18.	Ennek a négyszögnek az egyik átlója a másikat a harmadánál metszi, és merőleges rá, a másik átló pedig őt felezte el.	Ennek az egyenletnek minden racionális szám a megoldása.
N4	A ház kék.	Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám háromjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nincs gyöke.
N5	A ház nem piros.	Ma hétfő vagy szerda vagy péntek vagy szombat vagy vasárnap van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy vagy két gyöke van.

N6	A ház nem piros.	Ma vagy hétfő vagy szerda vagy péntek vagy szombat vagy vasárnap van.	Csak a zellert szeretem a zöldségek közül.	Ez a szám vagy egyjegyű vagy kettőnél több jegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek vagy nincs gyöke vagy kettőnél kettőnél több gyöke van.
N7	A ház sárga.	Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám egyjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nincs gyöke.
N8	A ház nem piros, hanem kék.	Ma hétfő, szerda, péntek, szombat és vasárnap is lehet, de semmi más.	A zöldésgek közül csak a zellert szeretem.	Ez a szám nem lehet kétjegyű, csak kevesebb vagy több.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek egy se vagy csak kettőnél több gyöke van.
N9	Ennek a háznak kék színe van.	Tegnap szombat volt.	Szeretem ha anyukám zellert tesz az ételbe.	Ez a szám nagyobb, mint 100.	Ennek a négyzögnek az átlói merőlegesek egymásra.	Ennek az egyenletnek nincs megoldása.
N10	A ház sárga.	Ma péntek van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám háromjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nincs gyöke.
N11	A ház nem piros.	Ma péntek van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek 2-nél több gyöke van.

N12	A ház kék.	Ma hétfő van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám egyjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nincs gyöke.
N13	A ház nem piros.	Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám négyjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek pontosan egy gyöke van.
N14	A fészer sárga.	Holnap vagy hétfő vagy péntek lessz.	A pörkölt nagyon finom.	A számok 3 jegyből állnak.	Az a paralelogramma nem síkidom.	Ennek a példának három vagy négy osztója van.
N15	A ház nem piros.	Ma nem kedd van vagy csütörtök. Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű. Ez a szám háromjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek több gyöke van, mint kettő.
N16	A ház kék.	Ma nem keddd van de nem is csütörtök.	Imádom a zellert.	Ez a szám háromjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek egy gyöke sincs.
F1	A ház nem piros.	Ma sem kedd, sem csütörtök nincs.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög egy deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy vagy kettő gyöke van.

F2	A ház nem piros, hanem sárga.	Ma nem hétfő, szerda, péntek, szombat vagy vasárnap van.	Szeretem a zellert.	Ezh a szám a 356.	Ez a négyszög a rombusz.	Ennek az egyenletnek nincs gyöke.
F3	A ház zöld.	Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám egyjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek három gyöke van.
F4	A ház nem piros.	MA nincs kedd, sem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek három gyöke van.
F5	A ház kék.	Ma hétfő van vagy péntek.	Szeretem a zellert.	Ez a szám egyjegyű.	Ez a deltoid négyszögű.	Ennek az egyenletnek pontosan négy gyöke van
F6	Zöld színű a ház.	Holnap szombat lesz.	A zeller finom.	Ez a szám három darab százasból és 4 tízesből áll.	Ez a négyszög egy deltoid.	3 gyöke van az egyenletnek.
F7	Nem léteznek piros házak.	Ma már hétvége van.	Minden zöldséget szeretek.	Ez a szám több mint 100.	Minden négyzet deltoid.	Ez az egyenlet harmadfokú.
F8	A ház nem piros.	Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám egyjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek három gyöke van.

F9	A ház fehér.	Ma kedd van és csütörtök.	A zellert szeretem és nem a répát.	Ez a szám nem lehet kétjegyű.	Ez nem négyszög, mert 5 szöge van.	Ennek az egyenletnek biztos, hogy 3 gyöke van.
F10	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
F11	A ház nem piros.	Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám egyjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nincs gyöke.
F12	A ház zöld.	Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez egy háromjegyű szám.	Ez egy deltoid.	Ennek az egyenletnek nincs gyöke.
F13	A ház kék.	Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám egyjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nincs gyöke.
F14	A ház nem piros.	MA nincs kedd sem csütörtök	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoida.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
F15	Ha ez egy ház, akkor ez nem sárga.	Ha nem kedd van, akkor ma nincs csütörtök.	Ha zeller, akkor nem szeretem.	Ha ez a szám, akkor kétjegyű.	Ez egy négyszög, de nem deltoid.	Ha ez egy egyenlet, akkor nincs kettővel több gyök.

F16	A ház zöld.	Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez egy egyjegyű szám.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nincs gyöke.

A.1. táblázat. Logika bemeneti mérés 2. feladatra adott válaszok (Diákok esetén az N a német, az F a francia csoportra utal, a sorszám véletlenszerűen lett a csoporton belül sorsolva.)

B. függelék

Félév végi visszajelzés

Értékeld 10-es skálán az idei matematikaórákat az elmúlt évekhez képest!	Értékeld 10-es skálán a matematikaórákat általában!	Mennyre tartottad érthetőnek a) az Avalon alapjátékot	b) Avalon kiegészítőszabályokkal	c) Da Vinci-kód	Menniyre tetszett a) Avalon alapjáték	b) Avalaon kiegészítőszabályokkal	c) Da Vinci-kód
10	10	4	6	2	5	7	6
9-10	9	2	3	2	7	8	2
7	6	6	7	3	7	8	5
8	7	7	6	9	10	9	10
9	9	1	3	-	5	7	-
10	10	3	4	2	8	10	7
9	9	2	3	1	8	8	6
9	8	5	6	4	10	10	9
10	9	4	6	2	7	9	6
10	9	3	5	2	7	8	7
9	10	8	7	8	8	9	7
10	9	4	4	3	8	9	6
10	10	9	8	9	8	9	7

Melyik kiegészítőszabályokat játszod szívesen az Avalonban? Melyiket nem? Miért?	Menniyre fejlődtél a játékokban az első alkalomhoz képest? a) Avalon	b) Da Vinci-kód	Milyen matematikai készségeid fejlődtek saját érzésed szerint? (Ha semmilyen, akkor azt írd ide.)	Milyen nem matematikai készségeid fejlődtek saját érzésed szerint? (Ha semmilyen, akkor azt írd ide.)
mindegyikkel, mert izgalmasabbá teszik	5	3	logika	társaim megismerése, hazugság megismerése
Minél több különleges karakterrel, izgalmasabb	7	4	logik, kombinatorika, valószínűségszámítás	társalgási, megtévesztés, félrebeszélés
Tó hölgye, tetszőleges sorrend	7	5	logika	semmilyen
Tó hölgye - lehetőség van megnézni valakit, akire kíváncsi vagy	4	5	semmilyen	logika
Tó hölgye, Morgana, Parsifal, Mordred	4	-	nem tudom	nem tudom
Parsifal az egyik kedvencem, változatossá teszi a jók oldalást is, kevesebb a szerep nélküli; Oberon elhanyagolható, inkább Mordred/Morganateszi izgalmasabbá	10	5	Könnyebben, gyorsabban átlátom a logikai összefüggéseket, mint korábban	osztálytársak gondolkodásmódjának megértése

Oberon balszerencsés, Parsifaltól izgalmas a játék, Tó hölgye praktikus és szórakoztató, tetszőleges sorrend jó stratégiai szempontból	4	8	-	leginkább logikai felmérések és összekapcsolódó dolgok felfedezésében fejlődtem
Morgana és Parsifal, Tó Hölgye és Mordred jó, Oberon nem jó.	3	8	Következtető készség	más nem fejlődött
Morgana, Parsifal, Tó Hölgye, tetszőleges sorrend	3	9	logika, valószínűségszámítás	előre gondolkozás, nagyobb kép általában, meggyőzés
Ha Morganat vagy Parsifalt húzom, akkor szeretek velük játszani, izgalmasabb lesz nekem a játék. Tó Hölgye is jó, mert többet megtudhatunk. Oberonnal nem szeretek játszani, mert csak Merlin tudja, hogy gonosz.	8	8	logikai, számsor kitalálása (Da Vinci kód)	érvelés, vita
Szívesen: tetszőleges sorrendű küldetés, Mordred, Morgana, Parsifal. Oberont nem szeretem, mert nem segített egyik félnek se.	9	9	Szerintem megtanultam logikusabban gondolkodni, mivel a logikám a gyengém.	Nem tudok olyanról

Szherintem mindegyik változtatás hozzáad valamit a játékohoz és változatosabbá teszi.	8	7	logika	meggyőzés, érvelés
Parszifal és Morgana, Tó hölgye: szívesen, mert izgalmasabb és fordulatosabb a játék, Oberonnal és Mordreddel nem játszom szívesen, mert szerintem zavaróak	5	5	logika	problémamegoldás, véleménykifejtés, talán hazugság

B.2. táblázat. A félév végi, társasjátékkal töltött órákról szóló visszajelzés kérdései és a kapott válaszok

C. függelék

Logika kimeneti mérés válaszai

A diákok nevét kóddal helyettesítettem. A kódokban az első betű a tanult nyelvre utal, amely alapján a matematikacsoportok is beosztásra kerültek. Az N a német, az F a francia csoportra utal. A csoporton belüli sorszám véletlenszerűen lett sorsolva. Azonos diák azonos kóddal szerepel minden táblázatban.

Az első és a harmadik feladat esetén a táblázatban egyessel jelöltem a megjelölt válaszokat, nullával a meg nem jelölt válaszokat.

	Minden tigris...					Szeretem a...					Minden négyzet...					A 2 ...				
diák	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
N1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
N2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1
N3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
N4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
N5	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
N6	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
N7	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
N8	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
N9	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
N10	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
N11	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
N12	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
N13	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
N14	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
N15	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
N16	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
F1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
F2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
F3	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
F5	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1
F6	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
F7	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
F8	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
F9	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1
F10	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1
F11	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
F12	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
F13	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
F14	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
F16	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
F17	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0

C.1. táblázat. Logika kimeneti mérés 1. feladat válaszok.

diák	A ház piros.	Ma kedd van vagy csütörtök.	Nem szeretem a zellert.	Ez a szám kétjegyű.	Ez a négyszög nem deltoid.	Ennek az egyenletnek egy vagy kettő gyöke van.
N1	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
N2	A ház nem piros.	Ma se nem kedd és se nem csüt. van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek se nem egy és se nem kettő gyöke van.
N3	A ház nem piros.	Ma nincs kedd és csütörtök sincs.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem is kettő gyöke van.
N4	A ház nem piros.	Ma nincs kedd és nincs csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem két gyöke van.

N5	Van olyan ház amelyik nem piros	Ma nincs kedd és csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
N6	A ház nem piros.	Ma hétfő vagy szerda vagy péntek vagy szombat vagy vasárnap van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek vagy nincs gyöke vagy kettőnél több gyöke van.
N7	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
N8	A ház nem piros.	Ma se kedd nincs, se csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek se egy, se kettő gyöke sincs.
N9	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem is csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kettő számjegyből áll.	Ez a négyszög egy deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.

N10	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem is csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem is kettő gyöke van.
N11	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zel-lert./Nem igaz, hogy nem szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög delto-id./Nem igaz, hogy ez a négyszög nem deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem is kettő gyöke van.
N12	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem is csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Többnek van egy vagy kettő gyöke.
N13	A ház nem piros.	Ma se kedd, se csütörtök nincs.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek 3 gyöke van.
N14	A ház nem piros.	Ma nincs kedd és nincs csütörtök sem.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nincs se egy se kettő gyöke
N15	A ház nem piros.	Ma nincs kedd és nincs csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.

N16	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem 1 és nem 2 gyöke van.
F1	A ház nem piros.	Ma nem kedd és nem csütörtök van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem 2 gyöke van.
F2	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem is csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
F3	A ház nem piros.	Ma nincs kedd és csütörtök sincs.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek sem egy sem kettő gyöke nincs.
F5	A ház nem piros.	Ma nem kedd és nem csütörtök van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
F6	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.

F7	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
F8	A ház nem piros.	Ma nincs kedd és nincs csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nincs egy és nincs két gyöke.
F9	A ház nem piros.	Ma se nem kedd van, se nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy vagy nem kettő gyöke van.
F10	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög nem deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy se nem kettő gyöke van.
F11	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.

F12	A ház nem piros.	Ma nincs kedd és nincs csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
F13	A ház nem piros.	Ma szerda van.	Szeretem a zellert.	Ez a szám háromjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek három gyöke van.
F14	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
F16	A ház nem piros.	Ma nem kedd van és nem csütörtök.	Szeretem a zellert.	Ez nem egy kétjegyű szám.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.
F17	Nem igaz, hogy a ház piros.	Ma nincs kedd és nincs csütörtök.	Nem igaz, hogy nem szeretem a zellert.	Ez a szám nem kétjegyű.	Ez a négyszög deltoid.	Ennek az egyenletnek nem egy és nem kettő gyöke van.

C.2. táblázat. Logika kimeneti mérés 2. feladat válaszok.

	A pénztárcámban...					Ez a szám...					Ennek a síkidomnak...					Matyi mindig...				
diák	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E	A	B	C	D	E
N1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
N2	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
N3	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
N4	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
N5	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1
N6	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
N7	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1
N8	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
N9	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
N10	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
N11	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
N12	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
N13	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
N14	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
N15	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
N16	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
F1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
F2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
F3	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
F5	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
F6	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
F7	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
F8	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
F9	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
F10	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
F11	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
F12	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
F13	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
F14	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
F16	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
F17	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0

C.3. táblázat. Logika kimeneti mérés 3. feladat válaszok.