SZAKDOLGOZAT

Farkas Fruzsina Petra

matematika tanára, illetve angol nyelv- és kultúra tanára

osztatlan tanári mesterszak

2024

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZAKDOLGOZAT

MENNYIT ÉRNEK A PONTOK?
JÁTÉKOSÍTÁS A MATEMATIKÁBAN

Témavezetők:

Dr. Szabó Csaba

egyetemi tanár

Szeibert Janka

adjunktus

Készítette:

Farkas Fruzsina Petra

matematika tanára

illetve angol nyelv- és kultúra tanára

osztatlan tanári mesterszak

Eredetiségi nyilatkozat

Név: Farkas Fruzsina Petra

Neptun azonosító: G7Z4C8

Szakdolgozat címe: Mennyit érnek a pontok? Játékosítás a matematikában

Kijelentem és aláírásommal megerősítem, hogy az ELTE matematika, illetve angol nyelv- és kultúra tanári mesterszakján írt jelen diplomamunkám saját szellemi termékem, melyet korábban más szakon még nem nyújtottam be szakdolgozatként, és amelybe mások munkáját (könyv, tanulmány, kézirat, internetes forrás, személyes közlés stb.) idézőjel és pontos hivatkozások nélkül nem építettem be.

Budapest, 2024. 04. 21.

Farkas Fruzsina

a hallgató aláírása

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Szabó Csaba tanár úrnak a sok segítségért, biztatásért. Szakdolgozatom nélküle nem jöhetett volna létre. Szeretném megköszönni Szeibert Janka ötleteit, melyek a játékosítás során adtak iránymutatást, illetve Szabó Gyula szakdolgozatomhoz szükséges statisztikai elemzéseit.

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS

Szakdolgozatom első részében egy matematika módszertani lehetőséget, a játékosítást fogom bemutatni, majd a hozzá kapcsolódó általam végig vitt kísérletet írom le. Motivációmat Szabó Csaba tanár úr, illetve szaktársaim, Csehné Szenderák Júlia, Szörény Sára és Dr. Pintérné Tóth Rebeka Sára kísérlete alapozta meg. Vizsgálatuk során az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika tanárszakos hallgatóinak Algebra és Számelmélet I. kurzusát játékosították. Pozitív eredményeik hatására általános iskolai környezetben próbáltam ki a módszert, melyet saját meglátásaim szerint igazítottam diákjaim igényeihez. A kutatás során olyan tesztekre és módszerekre támaszkodtam, melyeket az MTA–ELTE MATEMATIKA TANULÁSELMÉLETI KUTATÓCSOPORT [1] fejleszt és alkalmaz.

A kísérlet a játékosítás tanórai környezetben való alkalmazásának hatékonyságát hivatott mérni. Dolgozatomban egy általános iskola hatodikos évfolyamának esetét mutatom be. Arra keresem a választ, hogy a játékosított matematikaoktatás hatással van-e a tanulmányi teljesítményre, csökkenti-e a matematikai szorongást, javítja-e az elköteleződést és a hozzáállást a matematika iránt a kísérletben résztvevő diákok esetében.

A vizsgálat során személyem a kísérleti csoport matematikatanárának szerepét töltötte be. Feladataim közé tartozott az tanórák megtartása, a játékosított rendszer kereteinek felállítása, a szabályok betartatása, valamint a megfelelő feladatok és célok kitűzése.

A kutatás során Leskovics Eszter hallgatótársammal dolgoztam együtt, a hatodik évfolyamon ő tanította a kontrollcsoportot, míg én az ő szakdolgozatában kifejtett kilencedik évfolyam kontrollcsoportjának matematikatanára voltam.

A dolgozatom második felében Persi Diaconis, Susan Holmes és Richard Montgomery Dynamical Bias in the Coin Toss (2007) című kutatását elemzem matematikai szempontból. Ebben a részben arra fogok kitérni miért 0,51 annak a valószínűsége, hogy feldobás után egy érmének az az oldala lesz felfelé, ami dobás előtt is felfelé volt.

2. JÁTÉKOSÍTÁS

A következő fejezetben a játékosítás fogalmát szeretném bemutatni, emellett milyen pontokat érdemes végig gondolnunk, hogy a játékosítás sikeres legyen. Szó lesz az adaptív játékosításról, a játékos elemekről és a játékostípusokról és hogy a játékosítás módszerével hogyan tudjuk értékelni tanulóinkat.

Sokaknak lehet olyan emléke iskolai éveiből, amikor a pedagógus egy jó megoldásért vagy elkészített szorgalmiért pecsétet, matricát osztott, amit aztán be lehetett váltani ötösökre. Valakinek egyszerűen tetszettek ezek a matricák, mások a jó jegy reményében gyűjtötték szívesen, de volt, akit ez a lehetőség egyáltalán nem érdekelt. Egyes tanárok cukorkákkal próbáltak meg javítani a diákok hozzáállásán az adott tantárgy felé vagy éppen így csökkentetni a szorongás érzését, amit egy-egy dolgozat okozhat. Szinte minden pedagógus szeretné, hogy diákjai elkötelezettek legyenek a tantárgya felé és, hogy önmagukhoz képest jobban teljesítsenek. Ez az a négy dolog, amelyek közül, ha már az egyik egy kicsit is jó irányba billen, a tanár úgy érezheti jó munkát végzett.

Sajnos azonban a legtöbb helyzetre pár cukorka nem kínál megoldást, ennél összetettebb feladat előtt állnak a tanárok. Azt, hogy egy adott tananyagot milyen eszközökkel és megközelítésekkel érdemes tanítani a módszertan vizsgálja.

A módszertan a tudomány egy ága, melyről minden nap születnek új kutatások, elképzelések. Sokáig csak tapasztalat útján elemezték hogyan érdemes tanulni és tanítani. Ám később, ahogy az agykutatás is fejlődött új képet kaptunk arról, hogyan is tanulnak az emberek. Más szemlélet alakult ki annak kapcsán, hogyan érdemes tanítanunk, hogyan érjük el, hogy a tanulók sikeresek és elkötelezettek legyenek egy területen.

Az elköteleződés hosszú időbefektetést igénylő elhatározottság egy adott cél elérése érdekében, mely erőfeszítéssel, kockázattal járhat.

Csíkszentmihályi Beyond Boredom and Anxiety (1975) című könyvében arra kereste a választ mitől lesznek az emberek elkötelezettek egy adott dolog iránt. Az érdekelte mitől lesz egy olyan tevékenység, mint például a sakk vagy a sziklamászás élvezetesebb a sportolók számára, mint akármilyen más tevékenység. Arra jutott, hogy ilyenkor az alanyok egy fókuszált, autotelikus elmeállapotba kerülhetnek. Csak az adott feladatra koncentrálnak, ki tudják zárni az egyéb környezeti stimulációkat, még önmagukról is megfeledkeznek. Ezt az állapotot flow-nak nevezte. A flow-élményt kevés alkalommal éljük át, de elkötelezettnek kell lennünk az adott tevékenységgel kapcsolatban. Ilyenkor nem szorongunk és nem is unatkozunk, a tökéletes köztes állapotban vagyunk.

A játékot alapvető flow-élmény-forrásnak tartotta, ahol a játékosok által szabadon elfogadott szabályokon kívül minden más kizárható, irreleváns. Persze ez nem azt jelenti, hogy ha játszunk biztosan flow élményben lesz részünk. Ez attól függ a játék mennyire passzol a személyiségünkhöz. A játéktervezők célja is az, hogy minél könnyebben elérhető legyen a játékosok számára ez az állapot, minél több időt akarjanak a játékkal tölteni.

Csíkszentmihályi (1975) kutatásában arra jutott, hogy a flow-élmény nem csak szabadidős tevékenységek során érhető el, hanem munka közben és a mindennapok során is. Ez meglepő lehet, mivel a munka vagy a tanulás olyan tevékenységek, melyek a társadalom nagy része szerint nem bírnak élvezeti faktorral. A munkát és a játékot teljesen elválasztották egymástól. Viszont lehetőségünk van ezt a két dolgot összekapcsolni. Az autotelikus gondolkodású emberek képesek olyan külső tényezőket, mint a munka, játékszerű élménnyé alakítani. Csíkszentmihályi arról értekezik, hogy egy gyári dolgozónak sikerült összevonnia a munkát a játékkal. A gyárban történő monoton feladatokat szinte mindenki unalmasnak, élvezhetetlennek tartja, viszont az említett dolgozó munkához való hozzáállása más volt. Úgy tekintett feladatára, melyben megadott mennyiségű terméket kellett előállítani egy nap, mint egy versenyző a megdöntendő csúcsidőre. Minden nap azt kérdezte magától hogyan teljesíthetné gyorsabban az előírt mennyiséget, vagyis minden egyes nap meg akarta dönteni saját rekordját. Így egy játékos szemléletben végezte el a teendőit, összekapcsolta a munkát a játékkal.

E gondolatok alapozták meg, hogy egy új elmélet napvilágot lásson. Ez a teória vissza akarja hozni a való életbe, a munkába és az iskolába a játékot, így növelni az emberek elköteleződését egy adott szakma vagy tantárgy iránt. Innen indult a gamification, vagyis a játékosítás. A játékosítás fogalmát sokan próbálták meghatározni, pontosítani az elmúlt évtizedben. A fogalom egyre inkább kitisztul az évek során.

„A játékosítás játékos elemek és játék alapú gondolkodás integrációja, olyan tevékenységekben, melyek nem játékok.” (Deterding és társai, 2011)

„Játék alapú mechanizmusok és játékos gondolkodás felhasználása, mellyel növelhető a személyek elköteleződése, motivációja, illetve tanulásuk támogatására szolgál.” (Kapp, 2012)

„A játékosítás játékos metaforák, játékelemek és ötletek használata egy olyan kontextusban, ami eltér a játékoktól, annak érdekében, hogy növelje a motivációt és elkötelezettséget, valamint befolyásolja a felhasználói viselkedést.” (Marczewski, 2013).

„A játékosítás az a folyamat, amely egy tevékenységet azáltal javít, hogy játékszerű élmények lehetőségét teremti meg, hogy elősegítse a felhasználó értékalkotását” (Huotari és Hamari, 2017). Az utoljára említett definíciót veszem alapul.

Szakdolgozatomban a játékosítás oktatásban betöltött szerepéről, azon belül is bizonyos matematika órák játékosításával foglalkozom.

A játékosítás során játékszerű elemeket építhetünk be a tanórába. Ezen módszer segítségével növelhetjük a diákok elköteleződését az adott tantárgy felé, csökkenhet a szorongásuk, javulhat a hozzáállásuk, ezáltal teljesítményjavulás is lehetséges.

Persze a játékosítás is csak egy módszer, ami nem működik mindenkinél, illetve minden szituációban. Mielőtt a pedagógus megpróbálkozna egy ilyen lehetőség kipróbálásával D. Hill és S. Brunvand (2019) szerint a következő pontokat kell figyelembe vennie:

- A játékosítás passzol a pedagógus célkitűzéseivel?
- Szívesen és kényelmesen alkalmaz olyan eszközöket, melyek digitális technológián alapulnak?
- Az óra vagy tananyag témája építhető a játékosítás köré?

Ha a felsoroltakat figyelmen kívül hagyjuk a játékosítás inkább frusztrációval járhat, és több kárt hozhat, mint hasznot (D. Hill és S. Brunvand, 2019). Viszont, ha a pedagógus figyelembe veszi ezeket a tényezőket és úgy látja érdemes az adott témát játékosítással feldolgoznia, pár további szemponttal is tisztában kell lennie.

Bár véleményem szerint igaz az a mondás, hogy játszani mindenki szeret, de egyéni tulajdonságunk milyen játékokat részesítünk előnyben. A legtöbb játékosított óra arra épít, hogy a csoportösszetétel homogén és minden diák ugyanúgy fog reagálni a különböző játékos elemekre. Az eddigi játékosítási technikák során sokszor tapasztalható, hogy a pedagógusok nem veszik figyelembe diákjaik igényeit, nem szabják személyre ezt az új módszert (Rodrigues és társai, 2021). Azt vehetjük észre, hogy próbálkoznak egy-egy játékszerű elem tanórába való beillesztésével, attól függetlenül, hogy a diákok azt szeretnék-e vagy sem. Vegyük példának a manapság tanórákon híres online versenyeket, ahol a tanulók összemérhetik a tudásukat. Egy ilyen játékos teszt elkészítésére például a Kahoot.it weboldal nyújt segítséget. A Kahoot játékban kvízkérdéseket gyárthatunk és olyan elemeket használhatunk, mint a pontok vagy tabella. Lehetőséget kínál arra, hogy a pedagógus az adott órához kapcsolódó kérdéseket tegyen fel, a diákok számára különböző megválaszolási lehetőségeket biztosítva, melyek közül a helyeset kell bejelölni. A diákokat az alkalmazás automatikusan pontokkal jutalmazza a helyes válaszaik mennyisége és a gyorsaságuk függvényében. Ez egy remek lehetőség, ha jól használjuk, de érdemes átgondolnunk minden diákunknak segítünk-e egy ilyen játékkal, hiszen vannak olyan tanulók, akik nem szeretnek versenyezni. Továbbá figyelembe kell még vennünk, hogy mennyire biztosít visszahívható tudásszerzési lehetőséget a diákok számára, illetve, ha tesztelésre használjuk a helyes válaszok száma, nem feltétlenül állítható párhuzamba a diák tudásszintjével. Ezzel a pár mondattal nem azt szeretném érzékeltetni, hogy ne használjuk a Kahoot weboldalát, én is szívesen alkalmaztam néhány órámon, de mielőtt így teszünk, gondoljunk minden egyes személyiségre, akikkel az osztályteremben találkozunk. A játékosítás több annál, hogy az órából pár percet „játékszagú" feladatokkal töltünk, hiszen a játék csak akkor lehet élvezetes, akkor növelheti a tanulók elköteleződését, ha ők is szívesen játszanak vele. Arra azonban nagyon kicsi az esély, hogy olyan feladatokat tudunk biztosítani, ami mindenkinek megfelel, ezért arra kell törekednünk, hogy minden tanulónk megtalálja a kedvérevaló feladatot, illetve a számára megfelelő jegyszerzési lehetőséget.

A tanulók egyéni szükségletei szinte mindig különböznek, mást várnak el egy tanórától. (Rodrigues és társai, 2021). Mikor a pedagógus egy új technikát szeretne kipróbálni, be kell határolnia a diákok tulajdonságait, fel kell mérnie, hogy ezek az új eszközök megfelelőek lehetnek-e a tanulók számára. Nélkülözhetetlen, hogy lefektesse a szabályokat és átgondolja, milyen készségekre van szüksége a diákoknak az adott tananyag elsajátításához (Kiryakova, Angelova, Yordanova). Amellett, hogy a tevékenységeket a diákok tanulási céljaira kell szabni, lehetőséget kell adni megismételt próbálkozásra. Teljesíthető, a diákok szintjéhez illeszkedő feladatokra van szükség. Többféle opciót érdemes kínálni, amely által a diákok elérhetik a kívánt eredményt (Simões, J., R. Díaz Redondo, A. Fernández Vilas, 2013).

Fontos tényező, hogy a játékot is meg lehet unni, tehát mindig figyeljük diákjaink reakcióit az adott technikával kapcsolatban, és ha szükséges változtassunk rajta, alakítsunk a módszeren.

2.1 Adaptív játékosítás

Adaptív játékosításról akkor beszélhetünk, ha figyelembe vesszük az egyének szükségleteit például, hogy milyen játékostípusba tartoznak (lásd lejjebb), személyre szabjuk az adott tartalmat úgy, hogy közben játékos elemeket használunk. Ha úgy látjuk, hogy a tananyagon alkalmazható a játékosítás és tanárként kényelmesen tudjuk alkalmazni, derítsük ki, hogy diákjaink nyitottak-e a lehetőségre. Ha igen, fontos, hogy minden játékostípusnak megfelelő feladattal, lehetőséggel készüljünk. Továbbá fontos, hogy a szintek vagy feladatok a tanulók képességeihez igazodjanak. Előny, ha azonnali visszajelzést biztosítunk számukra.

A játékok elengedhetetlen eleme az említetteken kívül, hogy a játékosok eldönthetik elfogadják-e a szabályokat. Tehát egy játékosított órát úgy kell felépítenünk, hogy az abban foglalt szabályokat megbeszéljük a diákokkal, úgy módosítjuk azokat, hogy mindenki szívesen játszon.

Az adaptív játékostás fontos ismérve, hogy mindig dinamikusan változtatunk, újítunk a rendszeren, a tanulók igényeihez igazodva, hiszen a játék is unalmassá, monotonná válhat egy idő után, ha mindig ugyanazt kell csinálni benne.

Ha azt szeretnénk, hogy a játékosítás jól működjön a „játékot" személyre kell szabni, ehhez tudnunk kell diákjaink milyen játékostípusba tartoznak.

2.2 Játékostípusok

Xiao és Hew (2024) tanulmányában korábbi publikációk alapján összegezte milyen játékostípusokat ismerhetünk. Ebből én Bartle (2003) munkásságát szeretném kiemelni, amelyek mellé még egy típust csatoltak a későbbiekben.

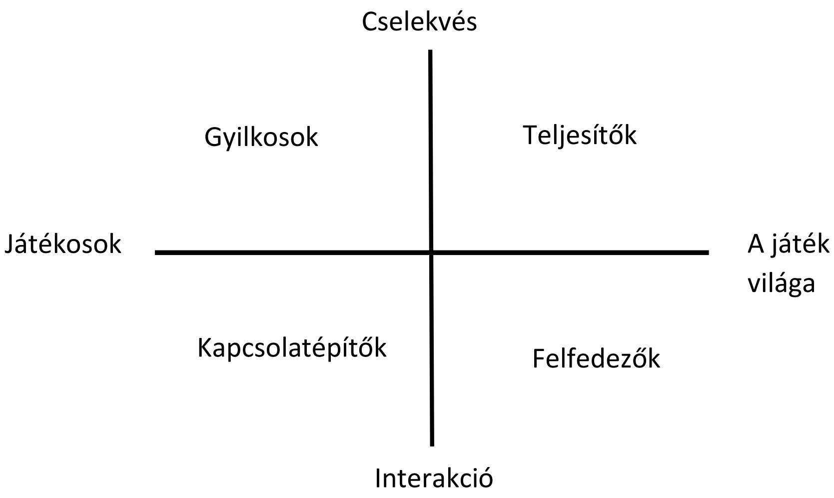
Bartle (2003) szerint a játékosokat négy csoportba sorolhatjuk aszerint, hogy egy játék milyen jellegű elemeire összpontosítanak a leginkább.

Vannak, akik azt tűzik ki célul, hogy megnyerjék / teljesítsék a játékot. Őket például a nagy nyeremények vagy a sok ponttal járó feladatok motiválják. Az ilyen játékosok a *Teljesítők (Achievers)*. Céljuk a szintlépés, fejlődés. Büszkék a játékban elért helyükre, nem foglalkoznak a részletekkel. A játékot azért fedezik fel, hogy új erőforrásokra bukkanjanak. Társaikkal való interakciójuk célja, hogy több információhoz juthassanak.

A második csoportba azok tartoznak, akik a játékot, annak egész terjedelmét és mélységét, minden részletét és szabályát meg akarják ismerni. Őket hívjuk *Felfedezőknek (Explorers).* Az ilyen játékosok a játék felépítésére kíváncsiak, minden mellékküldetést igyekeznek megtalálni, keresik a rejtélyeket, eldugott meglepetéseket. Új ötletek, lehetőségek reményében tartják a kapcsolatot társaikkal. A pontok megszerzése nem érdekli őket, inkább a nem várt fordulatokért, kincsekért játszanak. Büszkék a játékról szerzett tudásukra.

A harmadik fajta játékostípusba olyanok tartoznak, akik inkább a többi játékossal szeretnének interakcióba lépni. Ők például a szerepjátékokat részesítik előnyben. A *Kapcsolatépítők (Socializers)* számára a játék egy eszköz, ami segítségével összeköttetésbe kerülhetnek másokkal; meghallgathatják őket, beszélgethetnek velük, vicceket mondhatnak egymásnak. Számukra a pontok gyűjtésére csak azért van szükség, hogy esetleges zárt körökbe bekerülhessenek. Más játékosnak csak akkor tesz kárt, ha az barátja ellen vétett. Büszkék kapcsolataikra és befolyásukra.

Végezetül vannak olyan játékosok, akiknek az egyetlen célja, hogy felülkerekedjen a többieken, őket elnyomja. Nevük is igen árulkodó, ők a *Gyilkosok (Killers).* A gyilkosok azért lépnek kapcsolatba játékostársaikkal, hogy megismerhessék szokásaikat, felismerhessék gyengeségiket. Pontokat azzal a céllal gyűjtenek, hogy magasabb szintre jussanak, így könnyebben keresztbe tehessenek a többieknek.



Ábra 1: Bartle-féle játékostípusok

Ezekhez a játékostípusokhoz később csatlakozott „ a z-tengelyen” az *Autonómia keresők (Autonomy Seekers)* klubja. Ők talán a felfedezőkhöz állnak a legközelebb. Számukra az önálló, szabadon meghozható döntés fontossága van előtérben. Szívesen formálják a játék világát. Olyan játékokat élveznek leginkább, amiben több kimenetel lehetséges, és az ő kezükben van a döntés lehetősége. (Xiao és Hew ,2024)

Lazzaro (2004) is hasonló gondolatokat fogalmazott meg *Why we play games* című tanulmányában. Szerinte az emberek „mókából” játszanak, de ez a móka többféle lehet.

- Strapás móka: amikor a játékosok valamilyen verseny kedvéért játszanak
- Könnyed móka: a játékosok felfedezik a játék rendszerét
- Változó móka: A játék úgy változik, ahogy a játékos szeretné
- Közösségi móka: Ahol a játékosok egymás társasága miatt játszanak

Természetesen ez nem azt jelenti, hogy az emberek kizárólagosan csak egy típusba tartoznak. Egy személyiség általában ezek keverékéből áll össze és az, hogy éppen melyik domináns függ az adott játéktól és a személy élete során is folyamatosan változhat (Zichermann és Cunningham, 2011)

Szeretnék még megemlíteni még egy szereplőt, a játékmestert. Vannak olyan játékok, amelyek nem működhetnek az említett karakterek közötti kiegyensúlyozott kapcsolat nélkül.

Legtöbbször szükség van a játékmesterre, aki a háttérből irányítja a játékot, moderálja a történéseket. Esetünkben ő majd a játékosított órát tartó pedagógus lesz.

2.3 Játékos elemek

A játékos elemek rendeltetése, hogy egy játékban növeljék az élményfaktort. A tanóráim során is ilyen játékos elemeket alkalmaztam. Szörényi Sára és Csehné Szenderák Júlia 2023-as TDK dolgozatukban összegyűjtötték ezeket a játékos elemeket, melyeket saját szavaimmal határozok meg és példát hozok rájuk. A felsoroltaknál ennél sokkal többel találkozhatunk különböző játékokban. Azokat válogattam ki, melyeket alkalmaztam a játékosított tanóráim során.

- Karakterek/Felhasználók (Characters/Users) : egy játékban a karakterek olyan figurák melyeket a játékos mozgat, személyre szabhat. A karakter erősségei és gyengeségei adottak, melyeket ismerve előrejuthat a játékban. Most a játékosítás során a diákok maguk lesznek a karakterek. Nekünk, pedagógusoknak, vagyis játékmestereknek kell rájuk szabni a játékot.
- Pontok: Rengeteg játékban van lehetőség a pontgyűjtésre, melyeket elvégzett feladatokért kaphatunk. Így léphetünk szinteket, vagyis lehetünk erősebbek, tapasztaltabbak. Pontokkal új dolgokat vásárolhatunk játéktól függően.
- Tabella vagy ranglista (Leaderboard): A ranglista a játékosokat megszerzett pontjaik alapján sorbarendezi, egyfajta versenyhelyzetet teremt. A tabellát a játékosok bármikor megtekinthetik, láthatják adott helyzetüket a többiekhez képest. Például egy FIFA játék során is látható, melyik csapat hány pontot szerzett, hanyadik helyen áll.
- Kitüntetések (Badges): Ikonok vagy logók formájában megjelenő zsetonok, melyek egy adott tevékenységben elért eredményt tükröznek (Bunchball, 2010). A Rocket League játékban, ha megadott mennyiségű gólt lősz vagy lövést védsz ki, kitüntetést és pontokat kapsz.
- Kihívások (Challenges): Általában határidővel rendelkező, nehezebb feladatok. Például a Duolingo-ban (egy nyelvtanulásban segítő alkalmazás) találkozhatunk olyan lehetőséggel, hogy barát kihívás, ahol egy ismerősöddel közösen kell adott mennyiségű pontot összegyűjteni, vagy hibátlan leckét csinálni adott időintervallumon belül.
- Húsvéti tojások (Easter eggs): A fejlesztők által szándékosan elrejtett, váratlan meglepetés, üzenet a játékban. Van, hogy szórakoztató céllal kerülnek a játékba van,

hogy a játékos fel tudja használni. A Felfedező típusba tartozó játékosok előszeretettel keresik a húsvéti tojásokat. A Grand Theft Auto V nevű játékban találkozhatunk „Nagylábbal”. A játék története szempontjából teljesen lényegtelen, de mégis kíváncsivá teheti a játékost, szívesen megkeresheti.

- Pontszorzók (Boosters): A felhasználó adott időintervallumban a szerzett pontokat megsokszorozhatja. Ezeket jutalomként lehet megkapni, illetve egy-egy feladathoz kapcsolódóan elnyerni. Ilyen lehetőség a már említett Duolingo-ban az, amikor egy-egy szint elvégzése után pontszámduplázót kap a felhasználó, mely a következő tizenöt percben megduplázza a megszerezett pontokat ezzel segítve a jobb helyezés elérését.
- Közös küldetés (Group challenge): A játékosoknak össze kell dolgozniuk a nyeremény megszerzéséért, mindenkinek részt kell venni a játékban a küldetés sikerességért. Erre is a Duolingo barátkihívása szintén jó szemléltetés.
- A nagy csata (Boss fight): A játék végén történő nehéz, jó képességeket igénylő feladat. Például a Super Mario játékok során sok szinten csak teknősök páncéljára szükséges ugrani annak legyőzéséhez, de a hercegnő kiszabadításához a játék legvégén a sárkánnyal való küzdelem egy összetettebb, nehezebb, sok tapasztalatot, a karakter fejlődését és több életet igénylő feladat, ez az úgy nevezett „boss fight”.
- Ritka nyeremény-kincs (Treasure): Egyes játékokban olyan ritka kincsekre bukkanhatunk, mely nagyon kevés játékos kaphat meg. Ilyen elemre példát mutat a Grand Turismo autós videójátékban, a kihívás teljesítése után a napi sorsolásra szánt négy autó között előfordulhat olyan ritka autó, amit nagyon kevés nyerhet meg.

A későbbiekben láthatjuk, hogy ezeket a játékos elemek integrálhatóak a tanórákba kisebb változtatásokkal. Ezek használata egyfajta játékélményt nyújthat a tanulók számára.

Fontos leszögezni, hogy a játékosításnak nem kell kötelezően a digitális térben történnie, attól függetlenül, hogy sok elem a videójátékokból lett kiragadva. A diákok szívesen használnak órán digitális eszközöket. Khairani, Marmanto és Supriyadi (2020) vizsgálata során arra jutott, hogy a digitális elemekkel tűzdelt játékosítással történő tanulás pozitív hatással volt a tanulók külső és belső motivációjára. Viszont legtöbbször nem állnak rendelkezésünkre a megfelelő eszközök ahhoz, hogy digitális módon játékosítsunk, de erre nem is feltétlenül van szükség. A kísérletem során én is használtam digitális eszközöket, de nem arra építettem az egész vizsgálatot.

2.4 Az értékelés módja

Ha a játékosítás során pontrendszert vezetünk be, tanulóink teljesítményének értékelésére egy komplexebb rendszert alkalmazhatunk, melyben az értékelés különböző fajtáinak erősségeit fogja össze.

Az értékelés három formáját különböztetjük meg; a szummatív, formatív és diagnosztikus, más néven helyzetfeltáró értékelést. (Scriven, 1967)

Szummatív értékelést általában a tanulási, tanítási szakasz végén adunk. A tanuló átfogó teljesítményét osztályozzuk egy adott témakörben vagy félévben, tanévben. Ezt általában egy egész szám testesíti meg egy és öt között. Ezzel az egyszerűsített modellel próbálnak a pedagógusok valamiféle képet adni például az egyetemek vagy a szülők felé egy tanuló teljesítményéről.

A formatív értékelés során részletesebb visszajelzést kap a tanuló, melyben meg vannak említve erősségei, gyengeségei. Az ilyen fajta értékelés hatására a tanuló képes fejleszteni magát a visszajelzésben szereplő szempontok alapján.

A diagnosztikus értékelés mindazon folyamatok, eljárások és intézkedések összessége, melyek a pedagógiai folyamat adott szakaszának eredményeit, problémáit tárják fel. A diagnosztikus értékelés fő funkciója olyan módosító stratégiák megalapozása, melyek feladata a döntés-előkészítés. Ilyenkor a feltételeknek, illetve az egyének és csoportok jellemzőinek megváltoztatásához, fejlesztéséhez kívánunk információkat gyűjteni. A diagnosztikus értékelést a szummatív és a formatív értékeléstől eltérően főként azokban az esetekben használják, amikor a tanulási folyamatban felmerülő valamely probléma a szokásos értékelésnél részletesebb és eltérő jellegű vizsgálatokat kíván meg (Scriven, 1996)

A játékosítás segítségével ezeket az értékelési típusokat össze tudjuk fűzni, melyekkel még hatékonyabban támogathatjuk a tanulást.

Egy játékosított tananyag esetében formatív értékelésnek tekinthető, hogy a diák mindig tudja milyen feladatért, elvégzett munkáért, jó válaszért kapja a pontját. Tudja, hogy a felállított keretrendszerben milyen lehetőségekkel szerzett több, illetve kevesebb pontot. Mindemellett a szerezhető kitüntetések is kiemelik a tanulók erősségeit.

A szerzett pontok könnyen jeggyé alakíthatók egy meghatározott ponthatár segítségével, így szummatív értékelésre is könnyedén használható a pontrendszer.

Diagnosztikus értékelést is alkalmaztunk a vizsgálat során. A kísérlet megkezdése előtt diákjaink előteszteket írtak, melyek eredményei bemutatták azt a helyzetet, amire a módszert építeni akartuk. A folyamat közben a megszerzett pontok mennyiségével és dolgozatokkal mérlegelni tudtuk hogyan működik a folyamat, érdemes-e változtatni. Az utótesztek segítségével pedig egy átfogó képet kaphattunk arról működött-e módszer.

Sajnos a játékosítás sem egy varázsige, amit ha jól begyakorlunk és elmormolunk, minden diákunk szeretni fogja a tantárgyunkat és óráink zökkenőmentesen fognak zajlani. Ez is csak egy módszer, amit érdemes kipróbálni, saját- és tanulóink szájízére formálni, majd eldönteni, hogy nekünk működik-e vagy sem. Én is ezt tettem, a módszeremet és az eredményeimet egy későbbi fejezetben tárgyalom.

3. AZ ISKOLA BEMUTATÁSA

A kísérletet a Budapesti Montessori Általános Iskola és Gimnázium falai között végeztem, az ott tanuló diákokkal dolgoztam együtt.

Az iskola alapítványi fenntartású, sajátos nevelési- oktatási alternatívát kínál, Maria Montessori reformpedagógiájára alapozva. Az intézmény honlapján úgy fogalmaznak, hogy a tanulóik leképezik a társadalmat, hiszen hiába a tandíjfizetési kötelezettség, náluk a jómódú családból érkező diákok mellett ugyanúgy megtalálhatók a szerényebb körülmények közül érkezők is. Integráló iskoláról beszélünk, vannak autizmussal vagy ADHD-val, együttélő, továbbá beilleszkedési, tanulási, magatartási nehézséggel küzdő (BTMN) gyermek és sajátos nevelési igényű (SNI) tanulók is.

Kis létszámú csoportokban folyik az oktatás, mely tökéletes lehetőség volt a játékosítás módszerének kipróbálására, könnyebbé tette annak kivitelezését. A csoportokat általában, és a kísérlet szempontjából releváns osztályban is tudás szerint osztják ketté.

A Montessori-módszert a mai napig szívesen alkalmazza számos pedagógus, sok Montessori eszközzel találkozhatunk főleg alsó tagozatos matematika órák alkalmával. Maria Montessori szemlélete bizonyos szempontokban eltér attól, amit mi kipróbáltunk ebben az iskolában, de sok alappillérben találhatunk hasonlóságot. Fontos különbség, hogy Montessori-módszer szerint (Montessori, 1912) a tanulás a diák állása, munkája, tehát semmiképpen sem tekinthető játéknak. Az önállóság azonban mindkét megközelítésben megjelenik. A játékosítás és a Montessori-módszer is arra épít, hogy a tanulók nagyobb hajlandóságot mutatnak a tanulásra, ha önállóan dönthetnek bizonyos feltételekről, különböző lehetőségek közül választhatnak. Ám a Montessori-módszer ezt az önállóságot szeretné kiterjeszteni a tanulás és az élet minden aspektusára. További párhuzam található abban, hogy a diákoknak a saját tempójukban kell haladniuk a tanulási folyamataikkal, személyre kell szabni a tanulási élményt. A játékosítás fő célja a motiváció növelése, míg a Montessori módszeré a személyiségfejlesztés.

Láthatjuk, hogy a két módszer más célokat helyez előtérbe, mégis sok helyen kapcsolódnak egymással. Úgy vélem egy ilyen nézeteket valló intézményben mindenképpen érdemes kipróbálni a játékosítás lehetőségét.

4. CSOPORTBEMUTATÁS

A kísérletet az intézmény hatodikos évfolyamán végeztem, ahol csoportbontásban működnek az órák. Általában szintfelmérő tesztekkel, néha pedig egy évfolyamszintű közös óra alatt, illetve a tanulókat korábban tanítók meglátásai alapján döntik el a pedagógusok, ki milyen csoportba kerüljön. A tanulóknak lehetőséget biztosítanak a csoportok közötti átjárásra, ha a tanárral közös megegyezés alapján úgy látják, érdemes lenne más szinten folytatnia tanulmányait. A kísérlet tanévében kezdtem el tanítani ezt a csoportot, az azt megelőző egy hónapban ismertem meg az ott tanuló diákokat. A vizsgálat során én voltam a „játékmester” a pedagógus, aki összeállította a megfelelő feladatokat, vezette a ranglistát, felállította a szabályrendszert, illetve felmérte a tanulók kezdeti és utólagos matematikai szorongását, hozzáállását, és tudását. A hatodik évfolyamon az gyengébben teljesítő, lassabban haladó csoport volt a kísérleti csoport, mely játékosítással tanult, míg a jobban teljesítők alkották a kontrollcsoportot.

A következőkben diákjaimat, a kísérleti csoport tagjait fiktív nevekkel ruházom fel, hogy könnyebb legyen rájuk hivatkozni, őket bemutatni. A lejjebb felsorolt tulajdonságok a kísérlet előtti és kezdeti időszakára értendők, a saját megfigyeléseimen alapszanak.

- Viktória: Matematika órán különösen szorong. Szorgalma kimagasló. Matematikai teljesítménye átlag alatti, de szorgalmával kompenzálja. A játékosítási kísérlethez pozitívan állt hozzá, könnyen alkalmazkodott. Inkább Teljesítő játékostípus, minimális Felfedező tulajdonságokkal.

- Petra: Matematika órán szorong. Szorgalma átlagos. Tanulmányi teljesítménye átlagos. A vizsgálatra semlegesen reagált, de könnyen alkalmazkodott. Leginkább Felfedező és Teljesítő típusú játékos.

- Márton: Szorgalma hanyag, soha nem készít házi feladatot. Tanulmányi teljesítménye átlagos. Órán ritkán végzi el a kitűzött feladatokat. A vizsgálatra semlegesen reagált, a kísérlet elején nehezen alkalmazkodott. Miután megszokta az új rendszert egyértelműen kiderült, hogy leginkább a Teljesítő típus tulajdonságai dominálnak nála.

- Gábor: Szorgalma hanyag, soha nem készít házi feladatot. Tanulmányi teljesítménye jó. Órán ritkán végzi el a kitűzött feladatokat. A vizsgálatra semlegesen reagált, a kísérlet elején nehezen alkalmazkodott. Ő az adott órától függően mindig másféle típusként szerepelt. Leginkább Felfedező. Ő a rendszer legkisebb részletére is rákérdezett, kereste a lehetőségeket. Emellett Gyilkos típus is.

- Gergő: Autizmus spektrumon lévő fiú, akit a kísérlet alatt felmentettek matematikából. Tanulmányi teljesítménye átlag alatti. Szorgalma hanyag. A vizsgálatra pozitívan reagált, ám a kísérlethez nem sikerült alkalmazkodnia. Őt Asperger-szindrómája miatt számomra nehéz volt behatárolni, de a Felfedezők jegyeit figyeltem meg rajta. Az autizmus spektrumon lévő diákok számára a játékosítás egy jó keretrendszert adhat, mely stabilitást, biztonságot jelenthet számukra. Az ő esetükben jobb, ha nem változtatunk útközben a szabályokon, hanem az először elfogadott keretekhez tarjuk magunkat.

5. A KÍSÉRLET, VAGYIS A JÁTÉKOSÍTOTT KURZUS

A 2023/24-es tanév decemberétől három hónapon keresztül játékosítottam a Budapesti Montessori Általános és Gimnázium hatodikos osztályának 5 fős csapatát. A kontroll csoportot ennek az osztálynak a másik fele alkotta, mely szintén 5 főből állt. A diákok a kísérlet elején és végén elő-, illetve utóteszteket írtak. Vizsgáltuk a matematikához való hozzáállásukat, matematikai szorongásukat, a tanuláshoz való elkötelezettségüket és matematikatudásukat a geometria és a logika témaköréből. A felméréshez használt tesztek nemzetközileg elismertek, melyek úgy lettek összeállítva, hogy mind a gyengébben, mind az erősebben teljesítők között minél inkább szórjanak az eredmények, hogy a változást minél pontosabban lehessen mérni. Két témakörön keresztül végeztem a vizsgálatot, mely során a törtek, tizedestörtek illetve a geometria területével foglalkoztunk.

5.1 Témakörök és dolgozatok

A kísérlet során két témakört érintettünk a hatodikos évfolyamon. A tananyag első fő része a törtek témaköre volt. A diákok a közönséges törtek és tizedes tört alakjáról tanultak, műveleteket hajtottak végre a racionális számok halmazán, emellett szöveges feladatokat oldottak meg. A második fő témakör geometriai vonatkozású volt, Ez idő alatt a síkbeli alakzatokról, egybevágóságról, ponthalmazokról, tengelyes tükrözésről és tengelyesen szimmetrikus alakzatokról volt szó.

A törtek tananyag során két dolgozatot írtak. Az elsőt a közönséges törtek témakörében, ahol azokkal különböző műveleteket kellett elvégezni, illetve két szöveges feladatot is kaptak. A feladatok Paróczay Eszter, Tamás Beáta, dr. Wintsche Gergely által írt Matematika 6. tankönyvéből származnak. Itt láthatók a dolgozat kérdései:

<u>Első dolgozat</u>

1. Végezd el a következő számításokat! Ahol tudsz, egyszerűsíts! (14 pont)

$a,\qquad \frac{23}{31} \cdot 12 =$

$b,\qquad 5\frac{2}{7} \cdot 3 =$

$c,\qquad \frac{14}{12} \cdot \frac{6}{5} =$

$d,\qquad \frac{6}{13} : \frac{2}{7} =$

$e,\qquad \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{6} =$

$f,\qquad \frac{2}{9} - \frac{2}{3} =$

$g,\qquad \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) =$

2. Írd át közönséges törtalakba a vegyesszámalakban megadott számokat! (3 pont)

$a, 3\frac{1}{4} =$

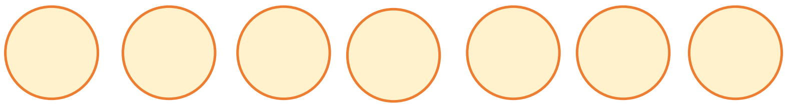
$b, -5\frac{1}{10} =$

3. A szegedi szakácsmesterek elkészítették a világ legnagyobb adag gulyáslevesét. A hatalmas bográcsban 1700 liter gulyás készült. (4 pont)

a) Hány gyerek lakhatna jól ennyi levesből, ha fejenként $\frac{2}{5}$ liter gulyást kapnának?

b) Ödön is kapott egy adag gulyáslevest (ami $\frac{2}{5}$ liter), de csak a $\frac{3}{4}$-ét tudta megenni. Hány liter levest evett?

4. Egy túracsoport vacsorára hat pizzát rendelt. Minden résztvevőnek egy pizza $\frac{3}{7}$ része jutott. Hányan voltak a kirándulások? Ha segít, használd az ábrát. (4 pont)



A témakör második felében a tizedestörtekről tanultak a tanulók, a hozzá kapcsolódó dolgozat a következő:

Második dolgozat

1. Végezd el a műveleteket! (4 pont)

a) $1{,}944 + 5{,}4 =$

b) $1{,}944 : 5{,}4 =$

c) $1{,}944 - 5{,}4 =$

d) $1{,}944 \cdot 5{,}4 =$

2. Számold ki a két műveletsor eredményét! Döntsd el, melyik a nagyobb! (8 pont)

$\left(\frac{4}{9}+0{,}6\right)\cdot\frac{5}{8}=$ $\qquad\qquad$ $\frac{4}{9}+0{,}6\cdot\frac{5}{8}=$

3. Váltsd át a mennyiségeket! (8 pont)

a) $23{,}6\ dkg =$ ________kg
b) $56{,}7\ m =$ __________cm
c) $56{,}7\ cm =$ __________m
d) $10{,}00\ dl =$ __________l

4. 2,5 kg hasábburgonya egynyolcad része elfogyott. Hány kg hasábburgonya maradt? (5 pont)

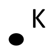
A tananyag második fő témaköre a geometria volt. Ehhez a témakörhöz is két dolgozat készült. Itt a diákoknak szerkesztéssel kapcsolatos feladatokat is meg kellett oldaniuk.

Első dolgozat

1. Mekkora a háromszög harmadik szögének nagysága, ha másik két szöge (4 pont)
   a) $\beta = 63°,\ \gamma = 54°$
   b) $\alpha = 27°58',\ \gamma = 114°15'$?

2. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak. Válaszodat indokold! (6 pont)
   a) Minden négyzet téglalap.
   b) Minden téglalap négyzet.
   c) Van olyan trapéz, amelynek két párhuzamos oldalpárja van.
   d) Van olyan paralelogramma, amelynek minden szöge derékszög.
   e) A kör átmérője a kör középpontját és a körvonal egy pontját összekötő szakasz.
   f) A rombusz szabályos sokszög.

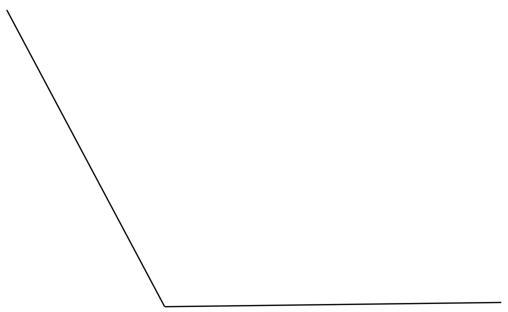
3. Színezd kékkel azokat a pontokat, melyek a K ponttól 3,5 cm-nél nagyobb, de 60 mm-nél nem nagyobb távolságra vannak! (4 pont)

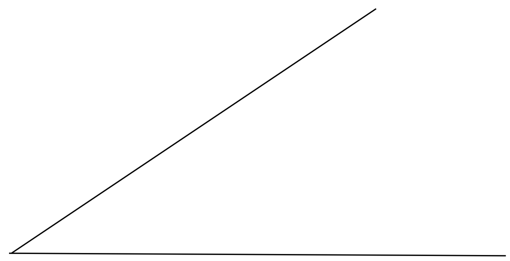


4. Szerkessz háromszöget, ha ismerjük három oldalának hosszát! (4 pont)

$a = 5{,}6\ cm,\ \ b = 43\ mm,\ \ c = 3\ cm$

5. Szerkeszd meg az első szög negyedét és a második szög kétszeresét! (4 pont)





Második dolgozat

1. Szerkeszd meg a következő szögeket! (4 pont)

a) 22,5°
b) 150°
c) 210°
d) 300°

2. Szerkessz háromszöget a következő adatokkal! (5 pont)

$a = 5\ cm$

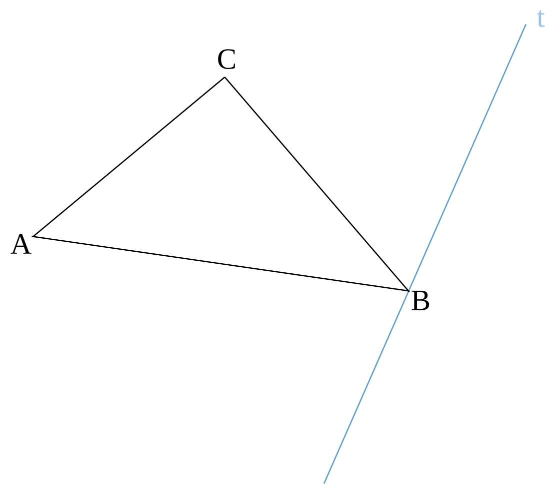
$b = 4{,}5\ cm$

$\gamma = 135°$

3. Döntsd el az állításokról, hogy igazak vagy hamisak! (4 pont)

a) A háromszöget egyértelműen meghatározza három oldala.
b) A háromszöget egyértelműen meghatározza három szöge.
c) A háromszöget egyértelműen meghatározza két oldala és egy közbezárt szöge.
d) A háromszöget egyértelműen meghatározza egy oldala és rajtafekvő két szöge.

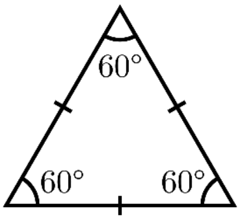
4. Tükrözd a háromszöget a megadott egyenesre! (4 pont)



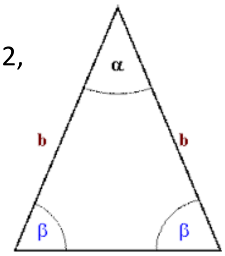
5. Írd le a tengelyes tükrözés tulajdonságait! (4 pont)

6. Rajzold be a következő alakzatok összes szimmetriatengelyét! (7 pont)

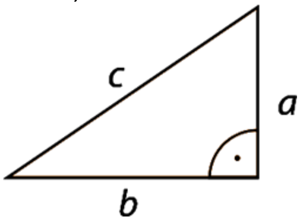
1,



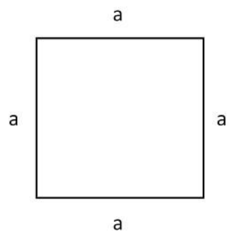
2,



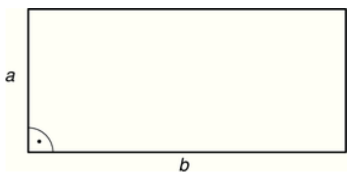
3,



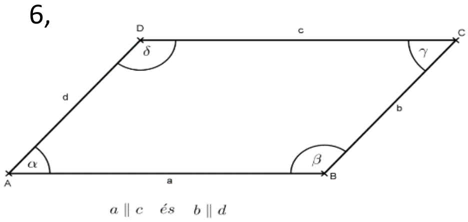
4,



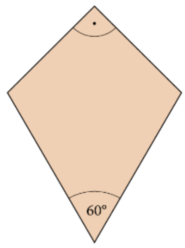
5,



6,



7,



5.2 Játékos elemek a tanórák során

A kísérlet során adaptív módon játékosítottam az óráimat. Igyekeztem diákjaim személyiségeihez, igényeihez alkalmazkodni. Olyan játékos elemeket választottam, melyek közül minden játékostípus talál neki megfelelőt. Mikor végeztünk az egyik témával a visszajelzéseik alapján változtattunk a feltételeken. A módszer kipróbálása során a következő játékos elemeket alkalmaztam:

- Pontok
- Tabella vagy ranglista
- Kitüntetések
- Kihívások
- Húsvéti tojások
- Pontszorzók
- Közös küldetés

- Online segédeszközök
- Egyéb játék
- Ritka nyeremény-kincs

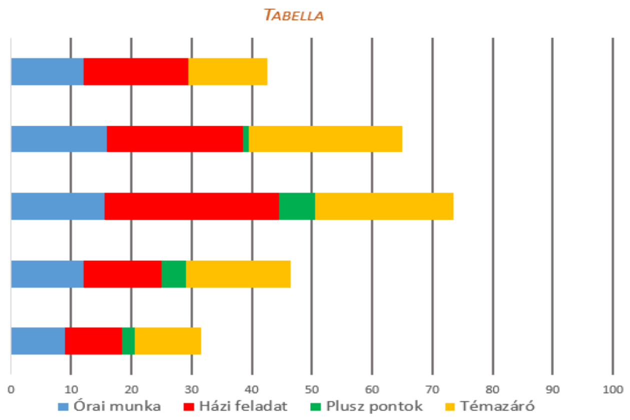
Pontok

A tanulók pontokat gyűjthettek. Egy témakör húsz tanórát ölelt fel, mely alatt húsz pontot kaphattak órai munkára, harmincat házi feladatra (egy pont, ha kész volt a házi feladata, és még fél pont, ha jó volt a megoldása). A két dolgozatra összesen ötven pontot lehetett szerezni egy témakör alatt. További extra pontokat szerezhettek például a kihívások és a Kahoot által, vagy ha sikeresen kiszabadultak az online szabaduló szobából, ha teljesítették a közös küldetéseket. A pontok alakulását mindig követhették a diákok a tabellán. A pontokból százalékot számolva, az iskola által meghúzott határ szerint ebből kaptak egy jegyet, ami a KRÉTA rendszerébe került beírásra. A Teljesítő játékostípusba tartozó diákjaim célja az volt, hogy minél több pontot gyűjtsenek.

Tabella vagy ranglista

A diákok pontjait egy Excel táblázatban, vagyis egy tabellán vezettem, melyet ők is, minden óra végén láthattak kivetítve, így nyomon tudták követni az előrehaladásukat, illetve versenyezhettek is egymással ki áll a ranglista elején. Szintén a Teljesítő játékostípusú tanulók számára kedvező játékos elem a ranglista. Mások teljesítményét látva, a ranglista ösztönzően hathat egy Teljesítő munkájára, így több pontot gyűjtésére motiválhatja. A Gyilkos típusnak is jó vizualizációs eszköz a tabella, nyomon tudja követni mely játékosokkal van versenyben, kiket kell maga mögé utasítania.

A tabella számomra azt is megmutatta, melyik diák milyen pontszerzési módot részesít előnyben. Voltak, akik inkább a házi feladatokkal és az órai munkáért járó pontokkal, míg mások a témazáróra kapható pontokkal javították a helyezésükön. Ezáltal tudtam azt, hogy az adott tanulónak milyen pontszerzési lehetőséget érdemes biztosítani, hogy biztosan megtalálja a számára megfelelőt.



Ábra 2-Illusztráció a ranglistáról

Kitüntetés

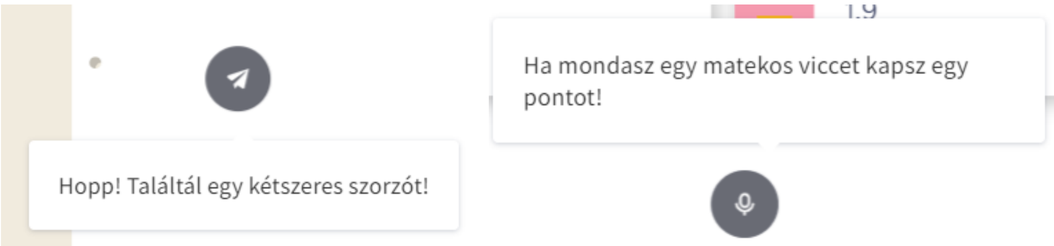
A diákok külön kitüntetéseket szerezhettek, melyeket ötösökre lehetett beváltani a témakör legvégén. Szorgalmas kitüntetés járt annak, aki a legtöbb házit és extra kihívást megcsinálta. Agytröszt jelvény annak járt, aki a dolgozatokat, amúgy is jól írta meg. Így a diákok többféle módon szerezhettek érdemjegyet. Így például az, aki a házi feladatokat nem írta meg rendszeresen, és/vagy az órai munka során nem szívesen gyűjtött pontokat, is kaphatott jó jegyet. A kitüntetés mint játékos elem nemcsak a Teljesítő játékosok számára megfelelő játékos elem, hanem az Autonómia keresők számára is, hiszen eldöntheti erősségei alapján milyen jelvényt tud megszerezni, hogy szerezhet könnyen jó jegyet.

Kihívások

A szorgalmas diákoknak lehetőségük volt extra pontért plusz feladatokat csinálni, melyeket kihívásoknak hívtunk. Ez általában egy, a témához illeszkedő nehezebb feladat volt a könyvből, melyet határidőre kellett teljesíteni. Erre kitüntetést, vagyis jó jegyet illetve meghatározott mennyiségű pontot lehetett kapni. A kihívások a Teljesítőkhöz és Autonómia keresőkhöz passzoló játékos elemek. Nem kötelezőek, de ha szimpatikus a kihívás elvégezheti a diák és ugyanúgy segít az előrejutásban.

Húsvéti tojások

A lejjebb említett online szabadulószobában elrejtettem olyan random ikonokat, melyeket megtalálva és rákattintva a gyerekek kétszeres, háromszoros szorzókat kaphattak. Volt, akinek szerencséje volt és csak ajándékba kapta, de volt, akinek viccet kellett mesélnie, hogy megkapja a húsvéti tojás által ígért nyereményt. Olyan vicceket mondtak, minthogy -5 a legjobb gyógyszer, mert egyből hat, és hogy derék szög az a fiatal szög, amelyik átadja az idősnek a helyét a buszon. A Felfedező tanulók a játék minden apró szegletét átnézték, hogy megtalálják ezeket az elrejtett kincseket.



Ábra 3-Húsvéti tojások

Pontszorzók

A későbbiekben az eredményeknél tárgyalni fogom, hogy volt olyan diákom, aki elveszett a pontszerzésben, azt láttam rajta, hogy teljesen fel akarja adni az egészet. Azért, visszacsaljam a játékost a játékba, a Duolingo technikáját, a pontszorzót alkalmaztam. Az emberek ott is szívesebben indítják el a leckét akkor, ha több pont jár érte. Így a következő óra alkalmával ajándék egyszer használatos háromszoros szorzót adtam a diákoknak, melyet órai munkára és házi feladatra lehetett felhasználni. Tehát például egy órán az órai munkáért járó egy pont helyett három pontot szerezhettek a szorzó segítségével. Akkor válthatták be, amikor csak akarták, és mint már említettem később is lehetett még szerezni. A pontszorzók szintén a Teljesítő játékosoknak kedveznek, illetve az Autonómia keresőknek, hiszen saját maguk választhatják meg a taktikájukat melyik órán szeretnék felhasználni. Emellett, a Felfedezők figyelmét is felkeltette, próbáltak minél több dolgot megtudni a szorzók használatáról, és arról hogyan lehetne minél több pontot szerezni a felhasználásával, kevés energiabefektetéssel.

Közös küldetés

A geometria témakör alatt egyszer az udvaron dolgoztunk. A ponthalmazokat vettük át, a diákoknak pedig megfelelő alakzatokba kellett beállniuk (például: Álljatok a tanártól 2 m távolságra. Milyen alakzatot formáltok?). Illetve az aszfaltra rajzolni kréta, krétás körző és vonalzó segítségével. Ha összedolgozva beálltak a megfelelő alakzatba, illetve megrajzolták a megfelelő ábrákat, pontokat kaphattak.

Ábra 4: Példa - a kijelölt ponttól 50 cm-nél kisebb távolságra lévő pontok halmaza

Egy másik közös küldetés egy páros verseny volt, szintén a szerkesztéssel kapcsolatban. A páros egyik fele volt az „agy” a másik fele a „kéz”. A kéz csak az tehette, amit az agy mond. Így kellett különböző szögeket megszerkesztenie a pároknak. A nyertesek extra pontokhoz juthattak. A közös küldetés a Kapcsolatépítő játékosok számára megfelelő, itt kommunikálni kell a diáktársakkal, össze kell velük dolgozni a cél elérése érdekében. Úgy tapasztaltam az én csoportomban nem volt ilyen típusú játékos, ez talán abból is látszott, hogy a tanulóim ezt a két játékot értékelték a legrosszabbra, vagyis senkinek sem volt vele gondja, de nem is kedvelték meg.

Ritka nyeremény-kincs

Tudtam, hogy van olyan diákom, akinek még valami pluszra lesz szüksége, hogy összedolgozzon a többiekkel vagy saját maga miatt pontgyűjtésbe kezdjen. Így hát azt mondtam, hogyha közösen, az összesen elérhető 500 pontból (extra pontok nélkül) elérnek 300-at, akkor az egyik matekórán elmegyünk egy cukrászdába. Ehhez a csapatnak össze is kell dolgoznia, és mindenkinek motiválnia a társait a pontszerzésre. A Kincs a Teljesítők és a Kapcsolatépítők számára kedvező játékos elem. A Felfedezők kedvében lehet járni, ha nem mondjuk el egyből mi a kincs, hanem rávezetjük őket valamilyen feladvánnyal. A Gyilkos számára ez nem egy kedvező elem, ha akarja a kincset, hiszen akkor nem tehet keresztbe társainak. Ennek hátránya, hogy a diákok nem ugyanolyan mértékben gyűjtik a pontokat, illetve lehet, hogy valakit nyomás alá helyez, ha csapatban kell együttműködni és másokra is hatással van a teljesítménye. Viszont sok hasonló módon működő elemet találhatunk a játékokban, így fel szerettem volna mérni diákjaim reakcióját egy ilyen feladatra.

Online segédeszközök

Kahoot

A tanulók az online térben történő játékos tesztelést is kipróbálhatták Kahoot játékok formájában. Készítettem a törtek témaköréhez tartozó kérdéssort számukra. Például: https://kahoot.it/challenge/?quiz-id=60873db5-bea8-40a7-9868-f681671cc3af&single-player=true

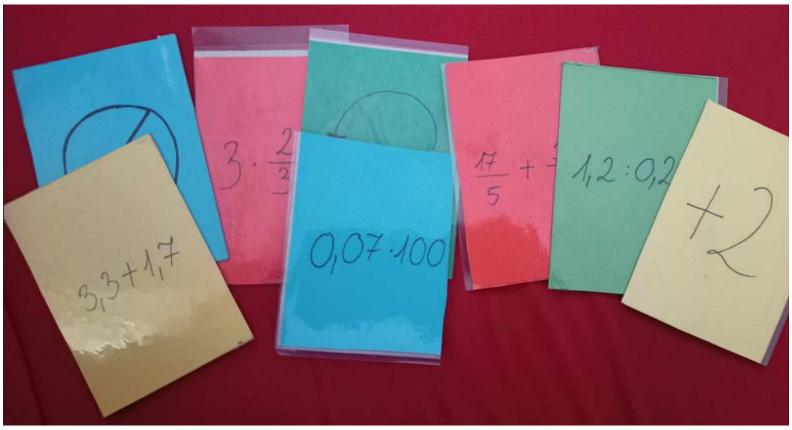
Szabadulószoba

Egy másik online játékokhoz hasonló koncepció a genial.ly oldalon elkészített szabadulószoba volt, ahol a fentebb említett húsvéti tojások is megtalálhatóak. A tanulóknak itt is kérdésekre kellett válaszolniuk. Itt megjelenik a feloldható tartalom is. Csak akkor mehettek a következő kérdésre, ha az előzőt helyesen megválaszolták. https://view.genial.ly/6423596ffa893b0013fd5acd/interactive-content-tortek-szabaduloszoba

Egyéb játék

UNO

A törtek témaköréhez UNO paklit készítettem, mely annyiban különbözik a hagyományos paklitól, hogy a lapokon egyszerűbb műveleteket láthatunk törtekkel és tizedestörtekkel, melyen eredménye nullától kilencig egy egész szám. Így bár a játékosoknak számolniuk kell mégis ellensúlyozhatja a munkát a kártyajáték élménye.



Ábra 5:Pár példa a tört / tizedestört UNO kártyákról

Ezek a játékok leginkább a versengésre építenek, tehát a Teljesítők és a Gyilkosok számára ideális, hiszen ők akarnak felülkerekedni a többieken. Mivel ezek is külön, új játékok a felfedezőknek újabb lehetőségük nyílik egy új játék kiismerésére.

TAPASZTALATOK

A játékosítás két témakörön keresztül tartott. A következőkben diákjaim egyéni tulajdonságait mutatom be, és a velük történő beszélgetés és saját megfigyeléseim alapján írok a játékosítás rájuk gyakorolt hatásáról.

	Matematikai szorongás	Változás fogadása	Legjobb élmény a játékosítás alatt	Legrosszabb élmény a játékosítás alatt	Folytatná-e a játékosítást, mit lehetne másképp	Játékostípus
Viktória	magas	örült neki, könnyen alkalmazkodott	szabaduló-szoba	mivel van, aki nem csinált házit nehezebb megnyerni a sütizést	igen, kevesebb pontot kelljen szerezni a közös jutalomhoz	teljesítő, felfedező
Petra	magas	semlegesen reagált, könnyen alkalmazkodott	szinte minden	a közös „agy-kéz" szerkesztés	igen, több Kahoot, UNO	felfedező, teljesítő
Márton	átlagos	semlegesen reagált, először nehezen alkalmazkodott, de idővel javult	Kahoot	Hogy így is tanulni kellett ☺	igen, több Kahoot	teljesítő
Gábor	alacsony	semlegesen reagált, először nehezen elkalmazkodott, de idővel megszerette a rendszert	Kahoot	Így „muszáj" volt házi feladatot csinálni	nem, inkább csak dolgozatokat írna	felfedező, gyilkos
Gergő	átlagos	semlegesen reagált, és bár volt, hogy érdeklődött, nem tudott alkalmazkodni	Szabaduló szoba, Kahoot	Társasjáték	Igen, hetente legalább egyszer Kahoot	?, felfedező

Táblázat 1-Diákok

Az első témakör alkalmával úgy tűnt inkább a két, szorgalmasabb diákom, Viktória és Petra esetében működik a játékosítás. Ők szinte minden alkalommal csináltak házi feladatot és az órai munkájukért is mindig tudtam pontot adni. Önmagukhoz képest a dolgozatuk értéke ugyan nem változott, de ezekkel a plusz lehetőségekkel egy jeggyel jobbat kaptak a tőlük elvárthoz képest. Plusz feladatok elvégzésére is nyitottak voltak.

Ugyanezen diákjaimról elmondható, hogy matematikai szorongásuk meglehetősen magas. Dolgozatírás közben rendszeresen lefagytak, a táblához nem mertek kijönni. Ez azonban a játékosítás alatt pozitív irányba változott. Mivel tudták a dolgozat eredménye csak egy szelete a tortának, ez levette a vállukról a terhet, kevésbé mutattak szorongásra utaló jeleket. Pontért szívesebben szólaltak fel, maguktól jelentkeztek.

A csoport másik három tagjának nehezen indult az új rendszer elfogadása. Úgy érzékeltem az amúgy sem magas elköteleződésük még romlott is, hiába örültek a sütizős matematika óra lehetőségének. Próbáltam a fentebb említett szorzók segítségével visszahozni őket a játékba, ez több-kevesebb sikerrel működött. Ők inkább a Kahoot ,illetve szabadulószoba extrapontokkal és a dolgozattal húzták feljebb a jegyüket, egyéb pontot alig szereztek. Olyan feladatok elvégzésére voltak csak hajlandók, amelyek minimális energiabefektetést igényeltek.

Ennek oka véleményem szerint az, hogy egyes diákoknak időre van szüksége, míg elfogadnak és megszoknak egy új rendszert. Ezt bizonyította az is, hogy miután az első témakört lezártuk és megtapasztalhatták mivel és hogyan lehetett volna jobb jegyeket szerezni a következő témához való hozzáállásuk már teljesen más volt, minden pontért megharcoltak. A játékokban is találkozhatunk az úgynevezett „tutorial"-okkal. Ezen részek elmagyarázzák a felhasználóknak a játék működését, és a játékosok kipróbálhatják azt. Valószínűleg a diákok számára is ilyen funkcióval bír az első játékosított témakör.
Az első témakör alatt a diákok az összesen megszerezhető órai munka pontok 64,5%-át, míg a házi feladat pontok 61%-át szerezték meg. Ez az arány a második körben órai munkára 83%-ra, míg házi feladat esetében 71%-ra ugrott. Egy diákomnál, az autizmus spektrumon lévő Gergőnél a változás mértéke igen csekély volt. Ennek oka, hogy őt a kísérlet alatt felmentették matematikából, így az ő esetében nem is tudunk igazán releváns következtetésekre jutni.

A játéknak része az is, ha vereséget szenvedünk. Az első témakör alatt a diákoknak nem sikerült teljesíteniük a sütizős matematika órához szükséges feltételeket, így ezt a lehetőséget elbukták. Ám a következő téma alkalmával új esélyt kaptak. Másodjára a játékos tanul a hibáiból ismeri a pályát, így könnyebben tudták ők is teljesíteni a feladatot és sikerült megszerezniük a különleges jutalmat, kincset.

Végezetül szeretném részletezni milyen változásokat tapasztaltam a kísérlet végére egyes diákjaimnál. Viktória szívesen csinálta végig a két, játékosított témakört, és bár mindig szorongott a matematika dolgozatoktól, négy dolgozatából háromban jó és jeles érdemjegynek megfelelő pontszámot ért el, így a pontokból gyűjtött jegye mellé, még dolgozatára is beváltotta a jó jegyeket. Ha felszólítom azóta szívesen válaszol, már nem látom rajta a szorongás jeleit. Tovább szeretné folytatni ezt a rendszert, de úgy látta ő sok pontot gyűjtött, viszont egyes társai miatt nehéz megszerezni a sütizés nyereményét.

Petra is együttműködő volt a kísérlet alatt, jól teljesített, de nagy változásokat nem tapasztaltam a dolgozatai alapján. Szorongása csökkent, gyakran jelentkezik, sokkal motiváltabb a matematika irányába, mint korábban.

Márton az első témakör alatt hatalmas visszaesést mutatott, de szerencsére a második témakörnél már felülmúlta a kísérlet előtti teljesítményét. Időre volt szüksége, hogy elfogadja az új rendszer szabályait, viszont miután megtapasztalta a játékot egy teljesen új oldalát mutatta. Szinte minden megszerezhető pontot megszerzett, még a dolgozatok alkalmával is. Egy eddig elégséges tanuló elkezdett időt fektetni a matematikába, és látható fejlődést mutat.

Gábor korábban a dolgozataival is megfelelő-jó jegyeket szerzett. Így szerinte ez a rendszer nem adott számára semmi pluszt. Mivel ő Gyilkos és Autonómia kereső típusba tartozó személy nehezebb volt számára megfelelő feladatokat találni, játékos elemeket építeni az órába. Ettől függetlenül pedagógusként azt láttam, hogy a korábban házi feladatot soha nem készítő Gábor húsz alkalomból tizenhatszor elkészítette azt, illetve jelesnek megfelelő dolgozatot tudott írni. Az ő esete azért okoz dilemmát számomra, mert nem szeretné folytatni a játékosítást, legalábbis a házi feladattal járó pontgyűjtést. A teljesítménye azt mutatta működött nála ez a keretrendszer, viszont ha Autonómia keresőként nem akar tovább így dolgozni változtatásra lesz szükség.

Gergő az autizmusa és az új matematika felmentése miatt nem tudott alkalmazkodni a rendszerhez. Bár gyűjtött pontot fejlődést nem vettem észre rajta. Szívesen folytatná a pontgyűjtést, de az egyéb tényezők miatt az ő eredményeit nem tartom relevánsnak.

6. TESZTEK ÉS EREDMÉNYEK

Az eredményeket minőségi és mennyiségi elemzésnek is alávetettük. Mivel kis létszámú kísérleti és kontroll csoportról van szó(5-5 fő), inkább a kvalitatív analízis lesz fókuszban.

A kísérlet megkezdése előtt felmértük a diákok matematikai szorongási szintjét a 9 kérdéses AMAS matematika szorongásteszttel, a matematikához való hozzáállásukat a 20 kérdéses MAS kérdőív segítségével. Mértük az elköteleződésüket a matematika-, további reál-, illetve humán tantárgyakhoz a SCARF modellen alapuló kérdőív segítségével. Ezenkívül általános matematikai tudásukat a az MTA–ELTE MATEMATIKA TANULÁSELMÉLETI KUTATÓCSOPORT logika és geometria tesztjei segítségével elemeztük.

Ezen adatokból látható volt, hogy a két csoportot összevetve a kísérleti csoport matematikához való hozzáállása lényegesen rosszabb, mint a kontroll csoporté. Általános matematikai tudásukat nézve gyengébben teljesítenek a kísérleti csoport tanulói. A két csoport szorongási szintje nagyjából azonos, egyénenként változó.

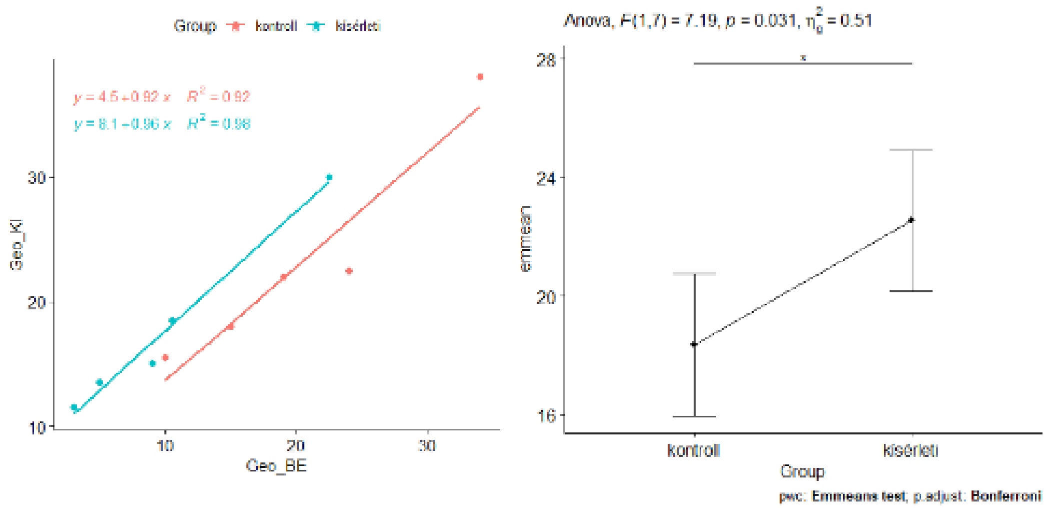
A két játékosított témakör után a diákok hasonló utóteszteket írtak. Az elő és utótesztek eredményeit összevetve azt vizsgáltuk, hogy a diákok önmagukhoz képest jobban teljesítettek-e, és ezt összevetettük a kontrollcsoport változásának értékével.

6.1 Mennyiségi elemzés

Kovarianciaanalízissel (ANCOVA) vizsgáltuk, hogy a kísérleti és a kontroll csoportban a tanulók hozzáállása, szorongása, geometriai készsége és logikai készsége hogyan változott a vizsgálat ideje alatt. A modellekben azt vizsgáltuk, hogy a két csoport kimeneti tesztjei különböznek-e egymástól, kovarianciaváltozóként pedig a bementi teszt pontszámát vittük be a modellbe. Ezzel a tanulók fejlődését mértük a kezelés hatására. Az összes elemzést az R4.3.3 programmal végeztük el. A változást csoportos nagyságrendben nézve nehéz volt mérni a kis létszám tekintetében. Az elemzés a geometria tesztek alapján mutatott említésre méltó eredményt.

A geometria teszt esetében is szignifikánsan összefüggött a bementi és kimeneti pontszám ($F(1,7)=119{,}3$; $p<0{,}0001$). Emellett a kezelés hatása is szignifikáns ($F(1,7)=7{,}2$; $p=0.031$). A kísérleti csoport jobb geometriai kimeneti tesztet írt, mint a kontrollcsoport a bementi tesztek pontszámához képest.

Tehát azt mondhatjuk, hogy a geometriai tesztek eredményei alapján a statisztika azt mutatja, hogy működött a játékosítás módszere a kísérleti csoportom esetében. Más aspektusból vizsgálva nem volt kimutatható változás.



Ábra 6: Statisztikai eredmények

A diákok elköteleződését a SCARF modell segítségével mértük. A SCARF modellt David Rock agykutató fejlesztette ki 2008-ban neurológiai kutatások alapján, szerinte az agy büntető környezetben elkerülő viselkedésre ösztönzi az adott személyt, míg jutalmazó környezetben elköteleződhetünk.

A SCARF modell öt területet különít el, amelyeken, ha jutalmazó a környezet, akkor elköteleződünk. Ezek a tényezőket Szörényi (2023) szakdolgozatában definiálta, szó szerint idézem:

„• A státusz (status) a többiekhez viszonyított fontosságát írja le az egyénnek. Amikor fejlődünk, és mások elismerik a fejlődésünket, megdicsérnek minket, úgy érezzük, nő a státuszunk.

• A bizonyosság (certainty), azt írja le, hogy mennyire bejósolható a környezetünk. Minél bejósolhatóbb, minél kevesebb a váratlan változás, annál könnyebben elköteleződünk.

• Az önállóság (autonomy) az, hogy mennyire tudjuk befolyásolnia körülöttünk zajló eseményeket, mennyire hozhatunk önálló döntéseket. Az önállóság növelése nem könnyű feladat, mert a megnövekedett önállóság ronthatja a folyamatok hatékonyságát.

• A kapcsolódás (relatedness) az, hogy mennyire érezzük magunkat biztonságban a többiek között, mennyire tartjuk a többieket ellenségeinknek vagy barátainknak. Növeli a kapcsolódás érzését, ha találunk olyan dolgokat, amelyek összekötnek minket a többiekkel.
• Az igazságosság (fairness) azt írja le, hogy mennyire igazságosak a lezajló folyamatok. Az egyértelmű elvárások, szabályok és célok növelik az igazságosság érzését.)”

Szörényi (2023) a SCARF modell alapján készített tesztet, melyek mérik a diákok elköteleződését az adott tantárgyak iránt. Diákjaim és a kontroll csoport tagjai elő és utótesztként is kitöltötték ezt. A változás mértékét itt elemzem.

Tanulók elvárása Bemeneti teszt	Kísérleti csoport
Státusz	2,6
Bizonyosság	4
Önállóság	4,1
Kapcsolódás	4
Igazságosság	3,4

Tanulók elvárása Kimeneti teszt	Kísérleti csoport
Státusz	2,8
Bizonyosság	5
Önállóság	5,2
Kapcsolódás	3,8
Igazságosság	4,4

Matematika óra Bemeneti teszt	Kísérleti Csoport
Státusz	4
Bizonyosság	4,2
Önállóság	4
Kapcsolódás	4,4
Igazságosság	4

Matematika óra Kimeneti teszt	Kísérleti csoport
Státusz	3,7
Bizonyosság	4,7
Önállóság	5
Kapcsolódás	4,1
Igazságosság	4,8

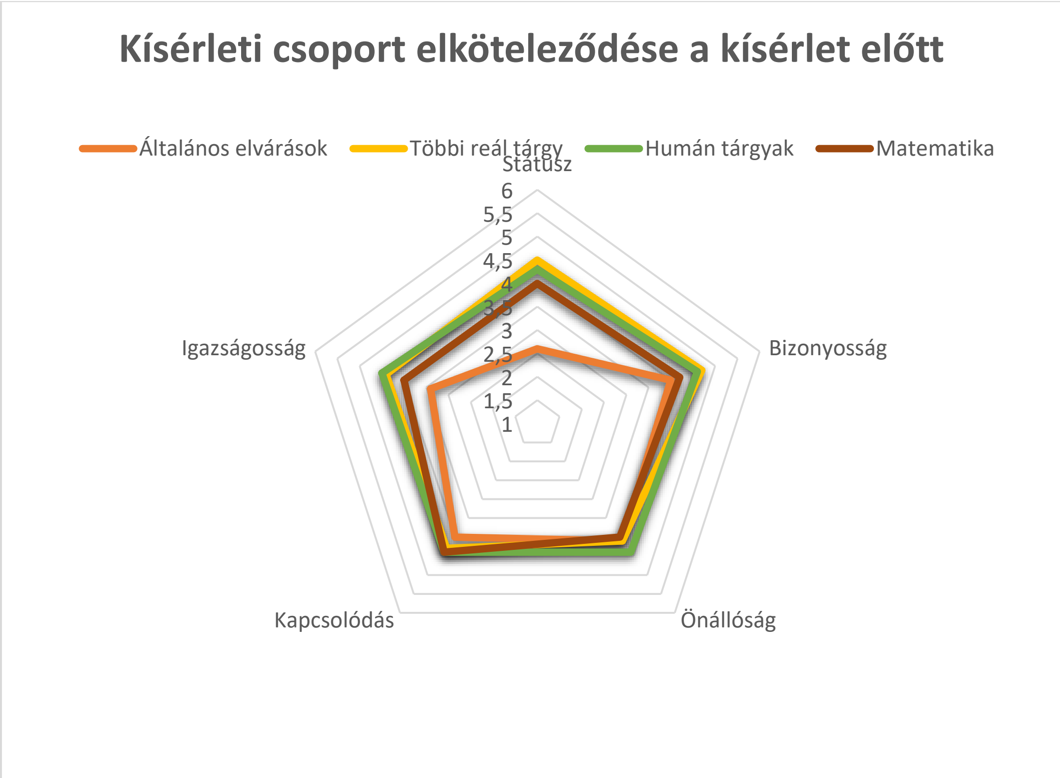
Tanulók elvárása Bemeneti teszt	Kontroll csoport
Státusz	5,2
Bizonyosság	5,7
Önállóság	5,6
Kapcsolódás	5,8
Igazságosság	5,4

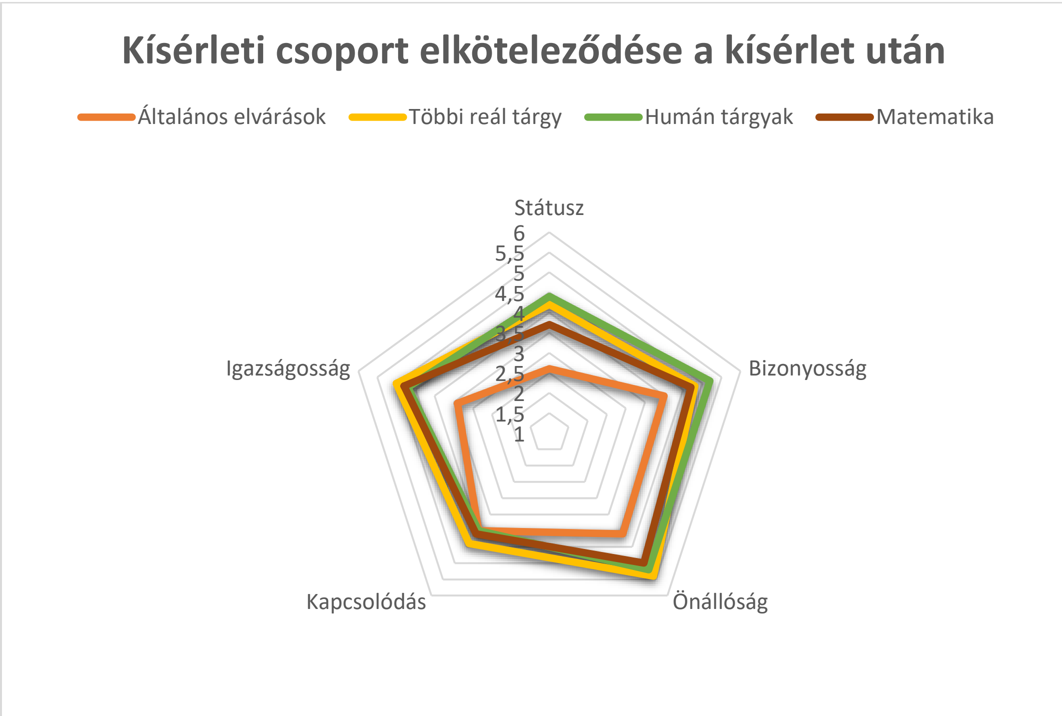
Tanulók elvárása Kimeneti teszt	Kontroll csoport
Státusz	4,9
Bizonyosság	5,4
Önállóság	5,3
Kapcsolódás	5,6
Igazságosság	5,2

Matematika óra Bementei teszt	Kontroll csoport
Státusz	5,2
Bizonyosság	5,7
Önállóság	5,2
Kapcsolódás	5,3
Igazságosság	5,5

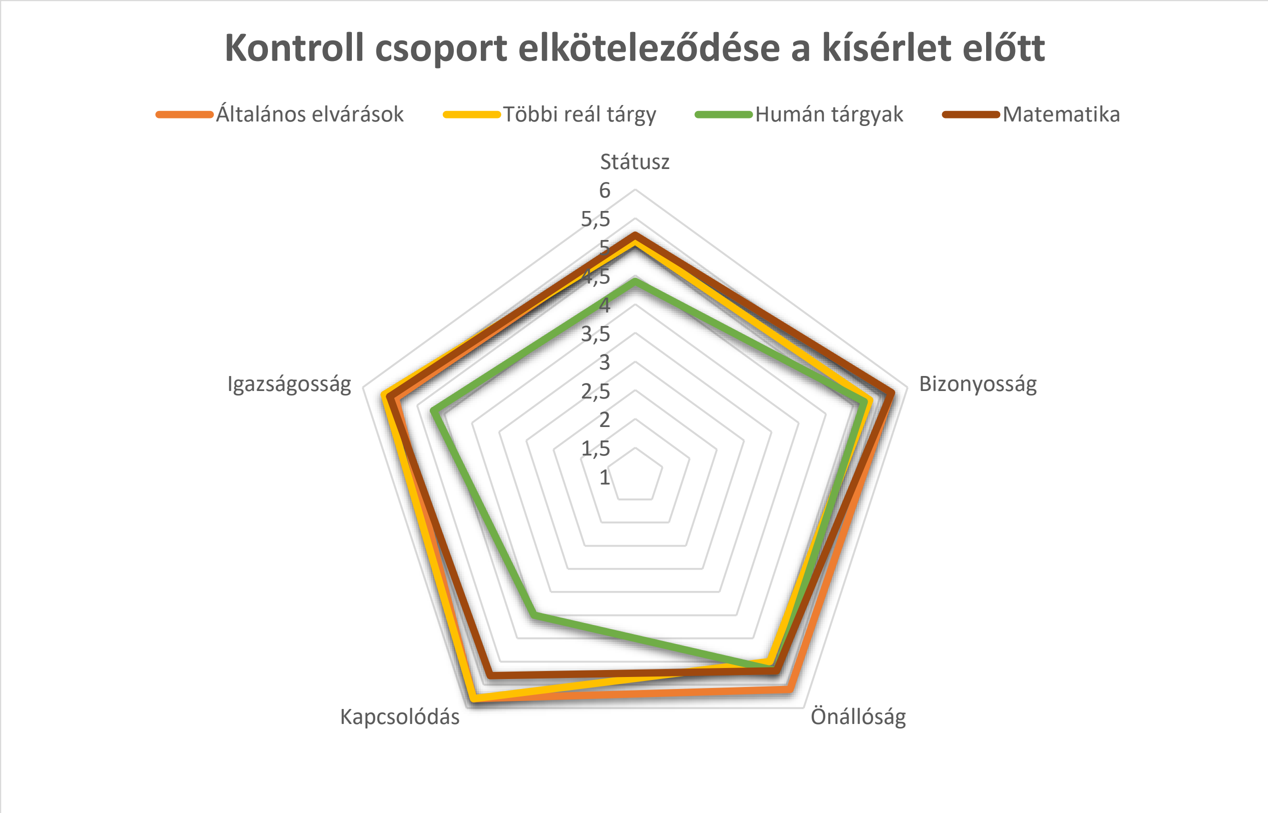
Matematika óra Kimeneti teszt	Kontroll csoport
Státusz	5,1
Bizonyosság	5,3
Önállóság	5,1
Kapcsolódás	5,4
Igazságosság	5,2

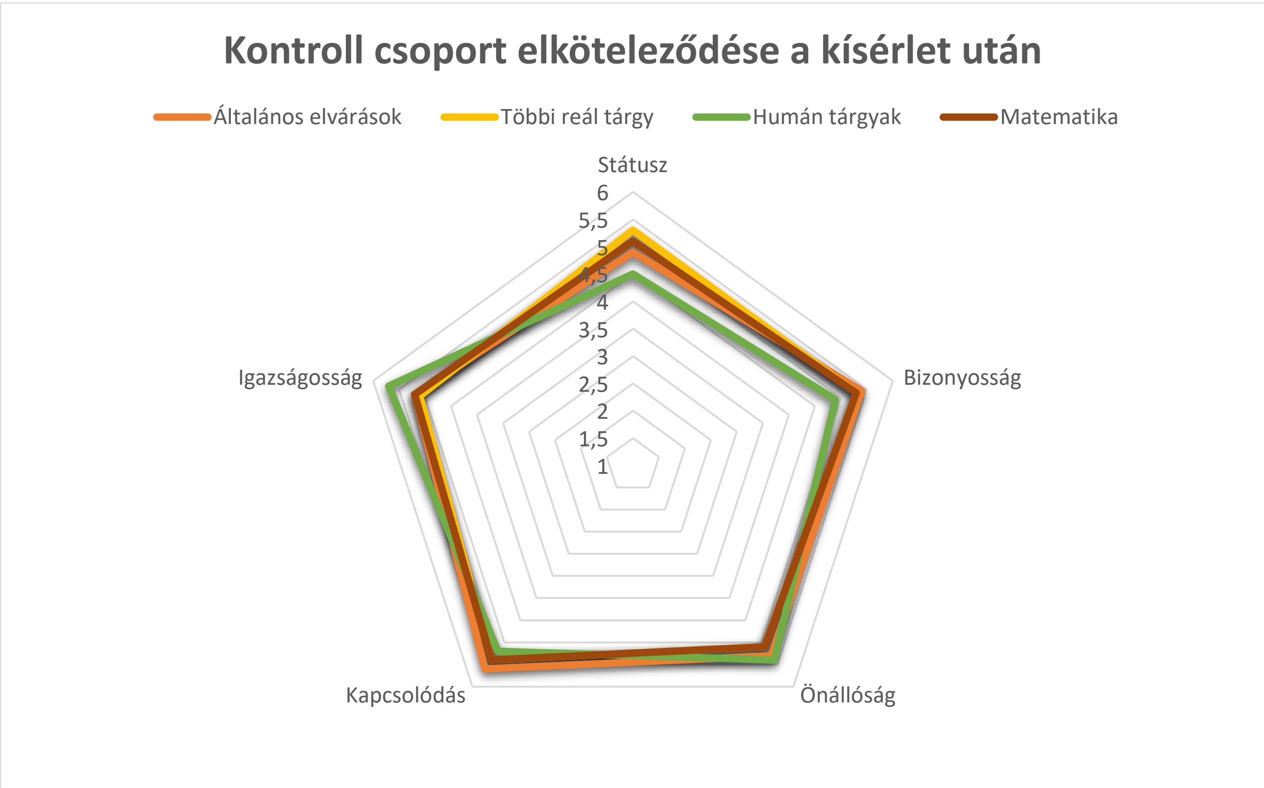
Ábra 7: A kísérleti és kontroll csoport bemeneti és kimeneti adatai általános elvárásokat és a matematikai irányú elköteleződésüket mérve a SCARF modell alapján





Ábra 8: Pókháló ábra a kísérleti csoport elköteleződésének változásáról a SCARF modell alapján





Ábra 9: Pókháló ábra a kontroll csoport elköteleződésének változásáról a SCARF modell alapján

A SCARF modell alapján azt láthatjuk, hogy míg kezdetben a kísérleti csoport általános elvárásai a kontroll csoporthoz képest igen alacsonyak voltak, a játékosítási kísérlet után elvárásaik lényegesen magasabbak lettek, míg a kontroll csoport szinte minden tényezőnél csökkenő értékeket mutatott. A kísérletben résztvevő hallgatók bemeneti és kimentei tesztjeiből a következő sorrendet állíthatjuk fel. A státusz számukra a legkevésbé jelentős szempont, ez a kísérlet után sem változott, minimálisan, 0,2-del erősödött. A bemeneti tesztek alapján ezután az igazságosság következett, majd a bizonyosság, önállóság és kapcsolódás szinte holtversenyben, ugyanannyira voltak fontosak. Ezek az értékek a játékosítás után mind erősödtek, de más mértékben. A bizonyosság és igazságosság egy egésszel, míg az önállóság 1,1-del nőtt. Az erősödő értékek mind olyan tényezők, melyek az általam vezetett játékosítási kísérletben is erősen domináltak, a hallgatók a kísérlet után ezen értékeket mentén növelték elvárásaikat. A kapcsolódás értéke minimálisan csökkent.

A matematika órák irányába történő elköteleződés is több szempont szerint pozitívan változott. A kísérleti csoportnál az önállóság egy egésszel, az igazságosság 0,8-del, míg a bizonyosság 0,5-del növekedett, míg ezek az értékek a kontroll csoport esetében csökkentek. Ez azt mutatja, hogy a játékosítás alatt megismert rendszer, melyet a diákok fogadtak el bizonyosságot ad számukra tudják, mire számíthatnak, igazságosnak tartják az értékelés folyamatát, s közben önállóan dönthetnek milyen feladatokat végeznek el, hogy jó értékelést szerezzenek. A státusz értéke minimálisan csökkent, mely szerintem elhanyagolható, hiszen ez a diákok számára sem volt fontos szempont. A kapcsolódás értékének csökkenése véleményem szerint két dolog miatt történhetett. Egyrészt nem alkalmaztam megfelelő mennyiségű feladatot, mellyel ezt a szempontot erősíteni tudtam volna, mert úgy láttam nem igazán van ilyen igénye tanulóimnak. Másrészt az alkalmazott módszerek esetén a tanulók túl nagy mértékben voltak társaikra utalva (lásd ritka nyeremény, közös kihívás).

Összességében az adatok alapján elmondható, hogy a játékosítás pozitív hatással volt a tanulók elköteleződésére.

6.2 Minőségi elemzés

A csoportok kis létszáma miatt úgy gondolom ez a két eredmény is figyelemreméltó, de messzebbre menő következtetéseket akkor vonhatunk le, további eredményeket akkor találhatunk, ha az adatokat személyenként, részletesebben is elemezzük.

A kísérleti csoport két hozzáállás tesztjét összevetve azt láthatjuk, hogy Gergő kivételével minden tanuló hozzáállása javult a matematika felé átlagosan 9,5 ponttal. Gergő drasztikus romlását megmagyarázza matematikából kapott felmentése. A kontroll csoport esetében egy tanulót kivéve minden diák attitűdszintje csökkent, az ő pontszámaikhoz is fiktív nevet csatoltam, az eredményeiket így mutatom be.

Tanulók-Kísérleti csoport	Hozzáállás bemeneti teszt	Hozzáállás kimentei teszt
Viktória	27	37
Petra	15	19
Márton	14	29
Gábor	20	29
Gergő	22	14

Tanulók-Kontroll csoport	Hozzáállás bemeneti teszt	Hozzáállás kimentei teszt
Bálint	41	38
Zsombor	45	40
Zoltán	40	38
Erika	29	39
Teréz	12	0

Ábra 10: Hozzáállás teszt-a tanulók konkrét pontszámairól

A tanulók szorongása teljesen vegyes képet mutatott, valakinél minimálisan csökkent, valakinél minimálisan nőtt. Véleményem szerint ez inkább csak a teszt napján írt pillanatnyi érzéseiket mutatja, nagyobb változás semmilyen irányban sem volt észlelhető.

A már említett geometria teszt pontszámait elemezve azt láthatjuk, hogy átlagosan szinte minden tanuló jobban teljesített a kimenetei teszt alkalmával, (ami teljesen helytálló, mivel az egyik témakör a kísérlet ideje alatt a geometria volt, mind a kísérleti, mind a kontroll csoport számára) viszont a kísérleti csoport tagjai lényegesen jobban teljesítettek önmagukhoz képest. Míg a kísérleti csoport átlagosan 7,7 ponttal írt jobb kimeneti tesztet, addig ez a különbség a kontroll csoport esetében 2,8 pont.

Tanulók-Kísérleti csoport	Geometria bemeneti teszt	Geometria kimentei teszt
Viktória	5	13,5
Petra	9	15
Márton	10,5	18,5
Gábor	22,5	30
Gergő	3	11,5

Tanulók-Kontroll csoport	Geometria bemeneti teszt	Geometria kimentei teszt
Bálint	34	38
Zsombor	15	18
Zoltán	24	22,5
Erika	10	15,5
Teréz	19	22

Ábra 11: A tanulók konkrét pontszámai- Geometria teszt

A logikai tesztek is személyenként változó értékeket mutattak, minimális eltéréssekkel, így azt mondhatjuk, hogy a játékosítás nem volt hatással a diákok logikai fejlődésére.

7. ÖSSZEGZÉS

Szakdolgozatom írása során mélyebben megismertem, majd alkalmaztam a játékosítás módszerét. Az általam tanított kísérleti csoport matematika óráiba játékos elemeket integráltam, figyelembe véve diákjaim igényeit, visszajelzéseit. Kis létszámú, 5 fővel rendelkező csoporttal dolgoztam együtt, így lehetőségem volt megvizsgálni a játékosítás egyénekre gyakorolt hatását.

A fentebb bemutatott eredmények alapján arra a következtetésre jutottam, hogy az általam tanított csoport számára működött a játékosítás módszere, hiszen önmagukhoz képest és a kontrollcsoporthoz mérve is fejlődést mutattak a geometria területén, matematikai hozzáállásuk is (egy tanuló kivételével) javult, illetve elkötelezettebbek lettek a matematika irányába. Az eredmények egyértelműen azt mutatják, hogy érdemes folytatnom ennek a módszernek az alkalmazását, csiszolni rajta, hogy még hatékonyabban működjön a későbbiekben.

A játékosítás sikerességének kulcsa véleményem szerint abban rejlett, hogy a kis létszám miatt könnyebben tudtam tanóráimat diákjaim igényeire szabni. Nagyobb osztály esetén ez a módszer túl időigényes lehet a pedagógus számára, illetve a pontrendszer követése is bonyolulttá válhat. Azon pedagógusoknak viszont, akik hasonló helyzetben dolgoznak, mint én mindenképpen javaslom a módszer kipróbálását.

8. MATEMATIKAI RÉSZ

Szakdolgozatom utolsó részében Persi Diaconis, Susan Holmes és Richard Montgomery Dynamical Bias in the Coin Toss című, 2007. évben megjelent kutatásáról, bizonyított elméletéről számolok be. Diaconis és csapata rájött, hogy a pénzérme feldobásához kapcsolódó egyszerű matematikai elmélet, mely szerint annak az esélye, hogy egy szabályos érmével fejet dobok $\frac{1}{2}$, bár jó megközelítése a valóságnak, nem teljesen pontos.

Képzeljünk el egy olyan egyszerű hétköznapi helyzetet, minthogy egy pár egyik tagja kínai ételt akar vacsorázni, míg a másik fél pizzára vágyik. Sok módon eldönthető hova menjenek. Például az egyik fél enged, mondván legközelebb ott esznek, ahol ő szeretne, vagy éppen választanak egy mindkettőjüknek megfelelő helyet. Egy, teljesen a szerencsén múló módszer a vitás helyzetek eldöntésére az érmefeldobás. Az ujjunk hegyére helyezünk egy érmét, megkérdezzük a másik személyt „fej vagy írás?". A levegőbe pöccintjük az érmét, mely pörög-forog míg végső helyzetébe nem érkezik. A futballmérkőzéseknél a kezdés jogát érmefeldobással döntik el. Fontosabb eseményeknél is alkalmazzák ezt a technikát, hiszen akármelyiket oldalt is választjuk, a szerencse dönt. Elméletben ugyanannyi esélye van a fejnek, illetve az írásnak fentre érkezni.

Biztosan nem én vagyok az egyetlen aki, mielőtt válaszolna a „fej vagy írás?" kérdésre, ránéz a kézen fekvő érmére és azt az opciót választja, amelyik visszanéz rá. Ha írás van felül, akkor írást, ha fej, akkor fejet. Mint kiderült ez a megérzés nem is volt alaptalan, hiszen, mint később látni fogjuk, ennek a valószínűsége igazából 0,51.

Az érmefeldobás részletesebb megértésének egyik fő alakja Joe Keller (1986). Az érme mozgásának meghatározására modellt készített. Szerinte a pénzérme mozgását a következő tényezők befolyásolják:

- A kezdeti (feldobás előtti) állapotban, a pénzérme síkjában található tengely (mely körül az érme forog) körüli forgás mértéke (ω_1) másodpercenként
- A kezdeti magasság melyből az érmét dobtuk (z_0)
- Az eltelt idő (t)
- A gravitációs gyorsulás (g) $(10m/s^2)$
- A felfelé mutató ($\vec{K}$) sebesség v_z

Ha az érmét pontosan abban a magasságban kapjuk el, ahol feldobtuk (z_0), akkor az érme $\frac{\omega v_z}{\frac{g}{2}}$ alkalommal fordul át. Ha ez az érték $2k$ és $2k+1$ ($k \in \mathbb{Z}_0^+$) között van, akkor az érme ugyanazt az oldalát fogja felfelé mutatni, amit kezdetben is. Ha viszont $2k+1$ és $2k+2$ között, akkor az ellentéteset. Modellje alátámasztotta az elméletet, vagyis az $\frac{1}{2}$ –es valószínűséget.

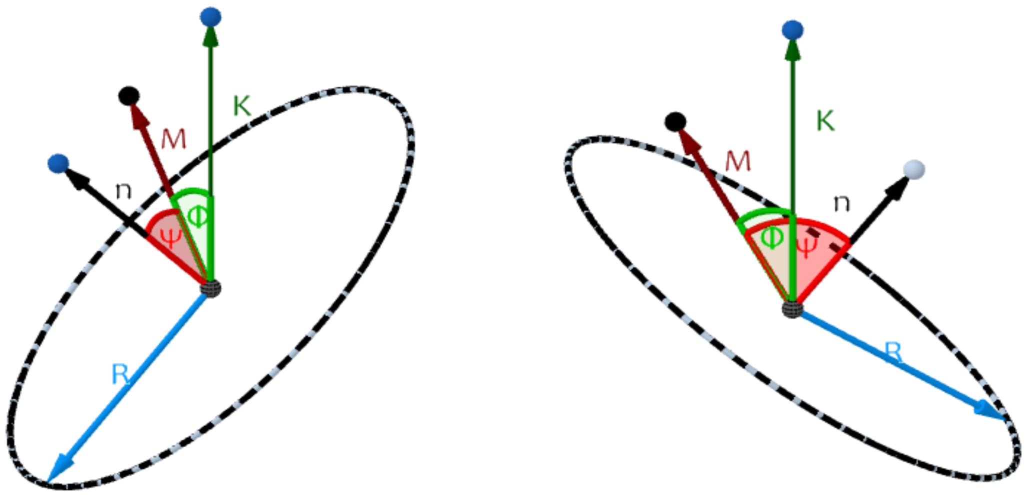
Kellerrel párhuzamosan még sok matematikus hasonló alapokra építette modelljét. Vulovic és Prange (1986) figyelembevették az érme pattogását (bouncing). Keller modelljét követve feltételezték, hogy az érme a síkjában található tengely mentén forog. Ilyen körülményeket vizsgálva is hasonló következtetésekre jutottak, mint Keller. Zen-Yuan és Bin (1984) mind a légellenállást mind az érme pattogását (bouncing) is számításba vette. Ezek a tényezők még inkább növelik a véletlenszerűséget, vagyis az $\frac{1}{2}$-es valószínűséget. Többen kísérleteztek 10000-es nagyságrendben érmék feldobásával, melyekből ugyanúgy az 50-50% köszönt vissza.

Jaynes (1996) volt az első fizikus, aki jegyezte a később részletezett szögmomentum fontosságát az érmefeldobások során. Diaconis és társai (2007) a szögmomentum tényezőjére építették elméletüket. A Dynamical Bias in the Coin Toss (2007) című tanulmányukban más, az $\frac{1}{2}$-től eltérő megállapításra jutottak az érmék feldobásával kapcsolatban. Kutatásuk során mérték és kiszámolták, annak az esélyét, hogy az érme érkezés után azt az oldalát mutatja felfelé, amelyik a dobás előtt is felül volt, szerintük ez a valószínűség 0,51.

A mérések megkezdésekor egy szabályos érmét vizsgáltak. Egy érmeforgató gépezetbe érmét helyeztek és a megfelelő, alapos beállításokkal elérték, hogy minden esetben, 100%-os bizonyossággal ugyanarra az oldalára érkezzen az érme, mint ami eredetileg is felül volt. Ebből látható volt, hogy egy ilyen helyzetben inkább a fizika dönt, mintsem a véletlen. Ezután embereket ültettek kamerák elé, dobásaikat rögzítették és ezen felvételek alapján új modellt készítettek. Az említett kameraképekből egyértelműen látható volt, hogy egy dobásnál az érme nem csak a szimmetriatengelye körül pörög. A korábbi kutatásokban nem vettek figyelembe egy fontos tényezőt, a precessziót. Vagyis azt a tényt, hogy az érmére merőleges tengely iránya változhat, ahogy az érme végighalad a pályáján. Ez bármilyen átlagos érmefeldobásnál egy nem elhanyagolható komponens.

Precesszió: A precesszió egy fizikai jelenség, amely egy forgó test rotációs tengelyének azon mozgása, amelyet egy külső erő gyakorol rá. A precesszió során a test rotációs tengelye körül egy másik tengely mozog, amely egy körforgást ír le. Ennek eredményeként a test vagy rendszer pozíciója körkörösen változik, míg a saját tengelye körüli forgása fennmarad.

Szeretném megjegyezni, hogy dolgozatomban a pörög és forog szavak nem szinonimaként alkalmazandók. Pörgésről akkor beszélhetünk, ha az érme a síkjában lévő tengely körül mozog, míg forgásról akkor beszélhetünk, ha az érme a síkjára merőleges tengely körül mozog. Különböző Geogebra ábrákat készítettem a modell megértéséhez, melyeket képeken, illetve a dinamikus ábrákat a csatolt hivatkozásokon tudnak megtekinteni.



Ábra 12: Az érme, és a vektorok

Az ábrákon a következő jelöléseket alkalmazom: $\vec{K}$: felfelé mutató vektor,$\vec{M}$: szögmomentum, $\vec{n}$: az érme normálvektora, $\vec{R}$: az érme egy sugarának vektora, ψ: $\vec{M}$ és $\vec{n}$ által bezárt szög φ: az $\vec{M}$ és $\vec{K}$ által bezárt szög

Diaconis (2007) kutatásáról a következő állításokat tehetjük:

- A kísérlet során olyan átlagos dobásokat vizsgáltak melyeknél tudták kezdetben melyik oldal van felül, és olyan magasságban kapták el az érmét, ahol a dobás kezdődött.
- A kutatás során minden esetben a fej lesz a kezdetben felfelé néző oldal. Tehát a következőkben, ha a fejet felfelé mutató dobásra hivatkozunk, akkor arra a szituációra gondolunk, mikor az érme a dobás után azt az oldalát mutatja felfelé, amit kezdetben is felül volt.

- Nem vettek figyelembe olyan eseteket, ahol az érme visszapattan, vagy más felülettel ütközik.
- Nem vettek figyelembe olyan eseteket, ahol a dobó elkapja az érmét majd „lecsapja".
- Ebben a kutatásban továbbá nem vették figyelembe a légellenállást, mivel úgy látták elhanyagolható hatással lehet az eredményekre.
- Szem előtt tartották az érmék szabályosságát, a dobás szögét és az érme sebességét.

Három olyan helyzetet van, ahol az érmefeldobás során „szabályosságot" láthatunk, ezek az esetek (és majd a későbbiek is) $\vec{M}$ helyzetétől függnek.

Ha feldobásnál pontosan úgy találjuk el az érmét, hogy az $\vec{M}$ és az $\vec{n}$ megegyezik, akkor az érme nem pörög az $\vec{R}$ körül, csak az $\vec{n}$ körül forog. Diaconis írásában a feldobott pizzához hasonlítja a helyzetet. Nincs precesszió.

https://www.geogebra.org/calculator/cbszn9ff

Ábra 13: $\vec{n}$ körül forgó érme

Ha a ψkisebb, mint 45°, de nagyobb, mint 0°, akkor csak precessziót tapasztalhatunk, de az érme nem pörög. Ebben az esetben az $\vec{n}$ forog az $\vec{M}$ körül.

https://www.geogebra.org/calculator/xvrsexgt

Ábra 14: Precesszió, ψ<45° esetén

Láthatjuk, hogy a ψ_1-t állítva és a P pont animációját elindítva $0° < \psi < 45°$ esetén az érme nem fordul át a másik oldalára.

Amikor az $\vec{M}$ az érme síkjában helyezkedik el (=$\vec{R}$), az érme csak $\vec{M}$ körül pörög. Itt az $\vec{n}$ $\vec{M}$ normálvektora, $\psi = 90°$. Ebben az esetben a fej valószínűsége valóban $\frac{1}{2}$. Nincs precesszió, ezen a lehetőségen alapul Keller analízise.

https://www.geogebra.org/calculator/yyywcayg

Ábra 15: $\vec{M}$ az érme síkjában

Ezen bármely szabályosságot mutató dobások mellett előfordul olyan eset is, mikor precessziót is megfigyelhetünk, emellett az érme forog az $\vec{n}$, pörög az $\vec{M}$ körül. Ilyenkor az érme normál vektora ($\vec{n}$) a szögmomentum vektora ($\vec{M}$) körül forog ω_N szögsebességgel (precesszió) Az érme a normál vektora ($\vec{n}$) körül is forog konstans ω_{pr} szögsebességgel. Minden alkalommal, mikor az érme normálvektor ($\vec{n}$) megtesz egy teljes kört a szögmomentum vektora körül ($\vec{M}$) az érme ψ szögben precesszál $\omega_N$szögsebességgel.

Diaconis és társai elméletük szemléltetésére kétféle koordinátarendszert használtak. Az egyikben a tengelyek és a vektorok fixek, tehát külső szemlélőként figyeljük az érme mozgását. Ezen rendszer vektorait nagy betűkkel jelölték. A másik esetben képzeljük el, hogy az érmén utazunk, a tengelyek és a vektorok az érméhez „tapadnak", ebben az esetben a vektorokat kisbetűvel jelöljük. Tehát például az $\vec{N}$ vektor mindig változik t időpillanattól függően, míg a $\vec{n}$ állandó, az adott koordinátarendszerben a z tengelynek tekinthető. Az egyik rendszer vektorai a másikba vihetők egy forgatásmátrixxal.

A korábban említett vektorok közül a legtöbb könnyen értelmezhető, $\vec{n}$ az érmére merőleges vektor, $\vec{K}$ a felfelé mutató vektor, $\vec{R}$ az érme egy síkjában lévő vektor. Az $\vec{M}$ megértéséhez viszont meg kell értenünk a szögmomentum fogalmát.

Az érme normálvektora a feldobás előtti pillanatban a $\vec{K}$ felfelé mutató vektorral egybeesik. A szögsebesség és a tehetetlenségi nyomaték meghatároz egy fix vektort, vagyis az $\vec{M}$ vektort. A szögmomentum $\vec{M}$ a tehetetlenségi nyomaték mátrix és a szögsebesség vektoriális szorzata. $\vec{M} = I\ x\ \vec{\omega}$

A szögsebesség egy vektoriális mennyiség, amely leírja egy test vagy rendszer forgási mozgásának sebességét.

A tehetetlenségi nyomaték (I) egy mátrix, amely leírja egy test vagy rendszer mozgásának tehetetlenségi tulajdonságait az egyes forgástengelyek mentén. A tehetetlenségi nyomaték általában attól függ, hogy a test hogyan van elosztva a tömegtere, és hogy hogyan forog a test a térben. Az I_1, I_2, I_3értékeket az érme vastagsága, sugara, sűrűsége adja. Tehát az $\begin{matrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{matrix}$ mátrix és a szögsebesség adja meg az $\vec{M}$ vektort.

Az I_1, I_2, I_3 úgynevezett tenzorok, melyeket Diaconis Landau és Lifschitz, Mech (1976)-ra hivatkozva a következőképpen adott meg:

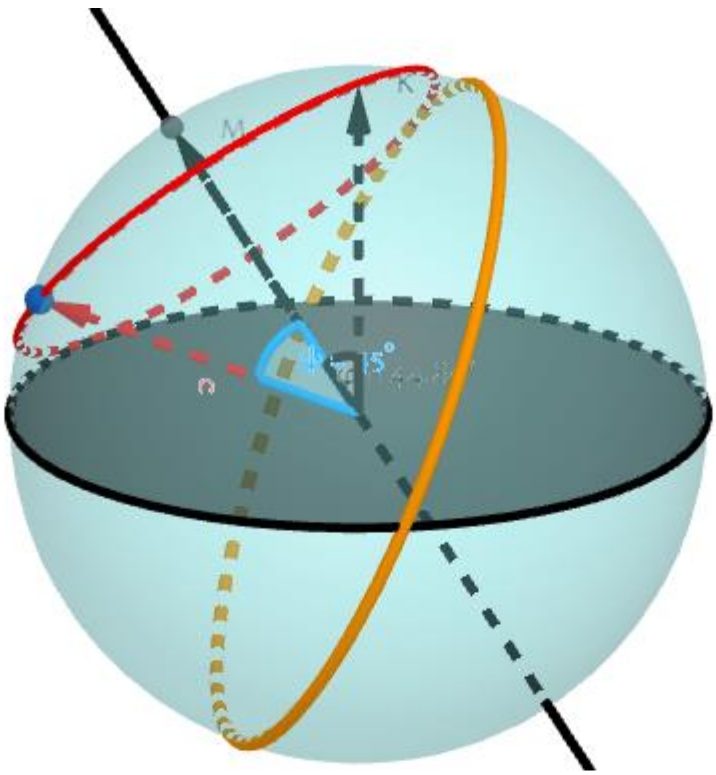
$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(mp^2 + \frac{1}{3} mh^2 \right) \text{ és } I_3 = \frac{1}{2} \cdot mp^2$$

ahol az m az érme tömege, p az érme sugara, h az érme vastagsága, vagyis a henger magassága.

Az érme normálvektora a dobás kezdetétől egy fix ψ szöget zár be az $\vec{\mathrm{M}}$ vektorral, az $\vec{\mathrm{n}}$ forog az $\vec{\mathrm{M}}$ körül ω_N szögsebességgel (precesszió). Eközben az érme az $\vec{\mathrm{n}}$ körül forog ω_{pr} szögsebességgel. A precesszió mértéke függ, a ψ szögtől mértéke $\pi \cdot cos\ \psi$.

Az elmélet fő eleme a ψ szög, melyről kameraképek segítségével tapasztalati becslést adott, melyből arra jutott, hogy a precesszió mértéke legalább 0,1-os részrehajlást mutat a kezdetben is felül lévő oldal irányába. Következő modellje segítségével tehát a precesszió mértékét szeretné megadni, mellyel bebizonyíthatja ezt a „szabálytalanságot”.

Diaconis (2007) elméletét egy $\widehat{M}$ egységvektorok által kiveszített gömbmodell segítségével szemléltette. Itt is P pontot elindítva, $\psi_1$szöget változtatva láthatóak a különböző helyzetek.



https://www.geogebra.org/calculator/dhhkxsvk
Ábra 16: A gömbmodell

A gömböt északi és déli féltekre osztotta. Az gömb északi fele a „fejjel felfele” (továbbra is feltesszük, hogy minden dobást fejjel felfelé indítunk) és a déli féltek az „írással felfele”. Miközben az érme precesszál a normálvektora egy kört ír le ezen a gömbön. Mikor a normálvektor pontosan az egyenlítőre mutat az érme „függőleges” állapotban van, vagyis a kezdeti állapothoz képest élére állítva. Ha a normálvektor az érme a gömb északi féltekére mutat, akkor a fej oldala van felfelé, ha iránya délnek áll, akkor pedig az írás.

A kutatás két fő tételre támaszkodik. Diaconis (2007) az $\vec{\mathrm{n}}$ mozgására egy f függvényt adott meg, melyet az 1*. tételben részletezek, ezt a függvényt fizikai levezetésekből kapta. Majd kiszámolta annak a valószínűségét, hogy ez az f függvény pozitív, vagyis, hogy az érme fejjel felfelé van, ez a 2*. tétel során elemezzük.

A fej vagy írás kérdését az $\vec{N}(t)$ és $\vec{\mathrm{K}}$ által bezárt szög határozza meg. Az érme felfelé van (fej), ha $\vec{N}(t) \cdot \vec{\mathrm{K}} > 0$, vagyis hajlásszögük $\theta < \frac{\pi}{2}$ vagy $\frac{3\pi}{2} < \theta$ Az érme lefelé van (írás), ha $\vec{N}(t) \cdot \vec{\mathrm{K}} < 0$, vagyis hajlásszögük $\theta > \frac{\pi}{2}$ vagy $\frac{3\pi}{2} < \theta$.

1*. tétel

Legyen $f(t) = \vec{N}(t) \cdot \vec{\mathrm{K}}$, az előbb láttuk, hogy e két vektor hajlásszögének koszinusza dönti el, hogy a fej vagy írás kérdését a t-edik időpillanatban.

Definiáljuk ψ, φ szögeket a következőképpen:

$$\boldsymbol{cos}(\psi) = \vec{N}(0) \cdot \widehat{M}$$

$$\boldsymbol{cos}(\varphi) = \vec{\mathrm{K}} \cdot \widehat{M}$$

ahol az $\widehat{M}$ az $\vec{\mathrm{M}}$ irányába mutató egység hosszú vektor.

Ekkor $f(t) = A + B cos(\omega_N t + \theta_0)$

$A = cos\psi \cdot \cos\varphi$, $B = sin\psi \cdot \sin\varphi$, $\omega_N = \frac{M}{I_1}$, θ a fordulás szöge t idő elteltével; $\theta = \omega \cdot t$,

θ_0-t, vagyis a kezdeti szöget $\vec{\mathrm{K}} \cdot \vec{N}(0)$ határozza meg.

A tökéletes felfelé mutató dobás esetén $\psi = \varphi$

2*. tétel

Definiáljuk $0 \leq \psi$ és $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ szögeket úgy, mint az 1* tétel esetében. Legyen a $p(\psi, \varphi)$ a fej valószínűsége pénzfeldobások alkalmával, melyek esetén ψ az érme normálvektora $\vec{N}(0)$ és a szögmomentum vektora $\vec{\mathrm{M}}$ által, illetve φ a felfelé irányuló $\vec{\mathrm{K}}$ vektor és $\vec{\mathrm{M}}$ vektor által bezárt szögek.

Ekkor

$$p(\psi,\varphi)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,sin^{-1}(\cot(\varphi)\,cot(\psi)) & ha\quad \cot(\varphi)\cot(\psi)\leq 1\\ 1 & ha\quad \cot(\varphi)\cot(\psi)\geq 1\end{cases}$$

Bizonyítás:

A kutatás során azt is bebizonyították, hogy a $\theta=\omega_N t$ szög egyenletesen oszlik el a $[0;2\pi]$ intervallumon. Megfigyelések Így tehát azt kell megnéznünk, hogy az 1* tételben szereplő függvény milyen θ esetén nagyobb 0, $(f(\theta)>0)$.

Tehát $f(\theta)=A+Bcos(\theta)$ függvény leírja, hogy a leesés pillanatában éppen milyen szögben áll az érme, hiszen θ_0 a kezdeti $\vec{N}$ és $\vec{K}$ által bezárt szög, ami az idő függvényében változozi $\omega_N t$ szerint.
$A=cos\psi\cdot\cos\varphi$, $B=sin\psi\cdot\sin\varphi$

Ha $A>B$, akkor az $f(\theta)>0$ minden θ esetén, és $p=1$. Ez csak akkor lehetséges, ha $\cot(\psi)\cdot\cot(\varphi)>1$.
$(0;\pi)$-n az f monoton csökken.
Nézzük meg a függvény mikor 0:

$A+Bcos(\theta)=0$
$Bcos(\theta)=-A$
$sin\psi\cdot\sin\varphi\cdot\ cos(\theta)=-(cos\psi\cdot\cos\varphi)$
$cos(\theta)=-(\cot(\varphi)\cot(\psi))$
$\theta=cos^{-1}(-(\cot(\varphi)\cot(\psi)))$
használva a $\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)=\sin(h)$ azonosságot
$\theta_1=\ \frac{\pi}{2}+sin^{-1}((\cot(\varphi)\cot(\psi))$ esetén 0.

Ha az f függvénynek θ_1 pontban van zérushelye, $0<\theta<\theta_1$ között a függvény pozitív, vagyis az érme fejjel van felfelé, míg $\theta_1<\theta<\pi$ között a függvény negatív, vagyis az érme írást mutat.

Vagyis a valószínűségünk:

$$p(\psi, \varphi) = \frac{\theta_1}{\pi}$$

Ebből közvetlenül kiszámolható, hogy hogy adott precessziós szög ψ mellett a fej valószínűsége.

2. tétel

$$p(\psi, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1}(\cot^2(\psi)) & ha \ \ \frac{\pi}{4} < \psi < \frac{3\pi}{4} \\ 1 & ha \ \ 0 < \psi < \frac{\pi}{4} \ \ vagy \ \frac{3\pi}{4} < \psi < \pi \end{cases}$$

Látható, hogy az $\frac{1}{2}$-es valószínűség csak akkor igaz, ha $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Látható, hogy a valószínűség függ ψ szögtől, és mindig legalább $\frac{1}{2}$. Mostmár csak a ψ szög eloszlását kell megállapítanunk. Diaconis és munkatársai felépítettek erre egy gyakorlati kísérletet. Nagyfelbontású sorozatfelvételeket vizsgáltak, ahogy géppel és kézzel féldollárosokat dobnak fel. A vizsgálatokból arra jutottak, hogy a precesszió mértéke legalább 0,1-es részrehajlást mutat a kezdetben is felül lévő oldal irányába, ebből kapták a 0,51-es valószínűséget.

A kutató azt a becslést adta, hogy nagyjából 250 000 pénzérme feldobásra lenne szükség az elmélet gyakorlati bizonyításához. Ezért 2023-ban számos egyetem (köztük az ELTE) összefogott és összesen 350 757 érmefeldobást gyűjtött annak érdekében, hogy bebizonyítsák ezt az elméletet. A kísérlet során 48 személy 46 különböző pénzérmét használt, a 350 757 dobásból 178 078 a kezdeti oldalon landolt. Vagyis kísérletük alapján p(ugyanolyan oldal)= 0,508. Ez meglehetősen közelít Diaconis jóslataihoz.

Láthatjuk, hogy már egy átlagos pénzérme feldobásnál is rengeteg tényezőt kell figyelembe venni. Így bár ez a kutatás hihetetlen eredménnyel zárult, mégis elmondható, hogy minden egyéb körülményt figyelembe véve a klasszikus $\frac{1}{2}$ valószínűséget adó becslések igen szilárd talajon állnak.

9. Felhasznált szakirodalom

Bartle, R. A. (1996). *HEARTS, CLUBS, DIAMONDS, SPADES: PLAYERS WHO SUIT MUDS*. MUSE Ltd, Colchester, Essex. United Kingdom.

Bartle, R. A. (2003). *Designing Virtual Worlds*. New Riders Publishing.

Bartoš, F. és társai (2023). *FAIR COINS TEND TO LAND ON THE SAME SIDE THEY STARTED: EVIDENCE FROM 350,757 FLIPS*.

Bunchball. (2010). *Gamification 101:* An Introduction to the use of game dynamics to influence behavior.

Csíkszentmihályi, M. (1975). *Beyond Boredom and Anxiety:* The Experience of Play in Work and Games. San Francisco: Jossey-Bass.

Deterding, S. és társai (2011) *From game design elements to gamefulness: defining "Gamification"* In Proceedings of the 2011 Annual Conference Extended Abstracts on Human Factors in Computing SystemsNew York, NY, USA, (old.:9–15).

Diaconis, P., Holmes,S., és Montgomery, R. (2007). *Dynamical Bias in the Coin Toss*. Society for Industrial and Applied Mathematics. SIAM Review (old.: 211-235).

Hill, D., and S. Brunvand. (2017). "*Gaming the System:* Helping Students Level Up Their Learning." International Journal of Teaching and Learning in Higher Education 30 (1):70–9.

Hill, D., and S. Brunvand. (2019) *Gamifying your Teaching*: Guidelines for Integrating Gameful Learning in the Classroom.

Huotari, K., & Hamari, J. (2017). A *definition for gamification*: anchoring gamification in the service marketing literature. Electronic Markets, (old.: 21-31).

JAYNES, E. T. (1996) *Probability Theory: The Logic of Science,* Cambridge University Press, Cambridge, UK, pp. (old.:1003-1007).

Kapp,K.M. (2012) *The gamification of learning and instruction*. Game-based Methods and Strategies for Training and Education. John Wiley & Sons.

Keller, J. B. (1986) *The probability of heads,* Amer. Math. Monthly, (old.:93:191-197).

Khairani, D. A., Marmanto, S. és Supriyadi, S. (2020). *The Effect of Gamification on Students' Motivation in Learning English.*

Kiryakova, G., Angelova, N., és Yordanova, L. *Gamification in Education.*

Lazzaro, N., (2004). *Why we play games: Four Keys to More Emotion without Story.*

Marczewski, A. (2013). *What's the difference between Gamification and Serious Games?*

Montessori, M.(1912) *THE MONTESSORI METHOD SCIENTIFIC PEDAGOGY AS APPLIED TO CHILD EDUCATION IN "THE CHILDREN'S HOUSES*" FREDERICK A. STOKES COMPANY, New York.

Paróczay, E, Tamás, B., dr. Wintsche, G., (2021). *Matematika 6. tankönyv.* Oktatási Hivatal, Budapest.

Rock, D. (2008). *SCARF: a brain-based model for collaborating with and influencing others*. NeuroLeadership Jounal.

Rodrigues, L., Palomino, P. T., Toda, A. M., Klock, A. C. T., Oliveira, W., Avila-Santos, A. P., Gasparini, I., & Isotani, S. (2021). *Personalization improves gamification: Evidence from a mixed-methods study. Proceedings of the ACM on Human-Computer Interaction*, (old.:1–25).

Scriven, M. (1996). *Types of evaluation and types of evaluator*. (old.:151-161).

Simões, J., Redondo, R. D., & Vilas, A. F. (2013). *A social gamification framework for a K-6 learning platform. Computers in Human Behavior* 29(2), (old.: 345–353).

Szabó, C., Szenderák, J., & Szörényi, S. (2021). *A játékosítás lehetőségei a közoktatásban*. Képzés és Gyakorlat, (old.:141-150).

Szenderák, J., & Szörényi, S. (2020). *A játékosítás hatékonysága az egyetemi oktatásban*. OTDK dolgozat.

Szenderák, J., & Szörényi, S. (2020). *A játékosításban rejlő lehetőségek a közoktatásban*: miért, mikor, hogyan?

Szörényi, S. (2023). *Akarsz-e játékosítani mindent, mi Számelmélet?* Szakdolgozat.

Vulovic, V. Z. és Prange, R. E. (1986) *Randomness of a true coin toss,* Phys. Rev. (old.:576-582).

Ya Xiao & Khe Foon Hew (2024): *Personalised gamification enhances student participation but produces mixed effects on emotional and cognitive engagements*: a systematic review, Interactive Learning Environments.

Zeng-Yuan, Y. és Bin, Z. (1984) *On the sensitive dynamical system and the transition from the apparently deterministic process to the completely random process,* Appl. Math. Mech., 6 (old.:193-211).

Zichermann, G., és Cunningham, C. (2011). *Gamification by Design*: Implementing Game Mechanics in Web and Mobile Apps. O'Reilly Media.

[1] MTA–ELTE MATEMATIKA TANULÁSELMÉLETI KUTATÓCSOPORT honlapja: https://matapszi.elte.hu/

10. ÁBRAJEGYZÉK