

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Algebra és Számelmélet Tanszék

HOGYAN ÉREZZÜK JOBBAN MAGUNKAT

A MATEMATIKA ÓRÁN?

A JÁTÉKOSÍTÁS MÓDSZERÉNEK KÍSÉRLETI ALKALMAZÁSA

EGY MONTESSORI ISKOLÁBAN

OT szakdolgozat

Készítette

LESKOVICS ESZTER

matematika, történelem

és állampolgári ismeretek tanára

Témavezetők

Szeibert Janka

adjunktus

ELTE TÓK

Dr. Szabó Csaba

egyetemi tanár

Algebra és Számelmélet Tanszék



Budapest, 2024.

NYILATKOZAT

Név: Leskovics Eszter

ELTE Természettudományi Kar, szak: matematika, történelem és állampolgársági ismeretek tanára

NEPTUN azonosító: CES4SP

Szakedolgozat címe: Hogyan érezzük jobban magunkat a matematika órán? A játékosítás módszerének kísérleti alkalmazása egy Montessori iskolában

A **szakedolgozat** szerzőjeként fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem, hogy a dolgozatom önálló munkám eredménye, saját szellemi termékem, abban a hivatkozások és idézések standard szabályait következetesen alkalmaztam, mások által írt részeket a megfelelő idézés nélkül nem használtam fel.

Budapest, 2024. április 23.



a hallgató aláírása

Tartalomjegyzék

Bevezető	2
1. Szakmódszertan	4
1.1. Flow-élmény	4
1.2. Játékosítás	5
1.2.1. A játékosítás módszerei	6
1.2.2. Toborzás	7
1.2.3. Személyiségtípusok	8
1.2.4. A kísérletben használt játékos-taxonómia	9
1.2.5. Játékos elemek, HEST rendszer, PKR rendszer	10
1.3. A kísérlet leírása	13
1.3.1. Az iskola	13
1.3.2. A csoport	14
1.3.3. A játékosítás alatt feldolgozott tananyag	15
1.3.4. A játékosított elemek megvalósulása a kurzuson	18
1.4. Eredmények diszkusszió	24
1.4.1. Kvantitatív elemzés	24
1.4.2. Kvalitatív elemzés	29
1.5. Összefoglalás	34
2. Matematika rész	36
Irodalomjegyzék	42

Bevezető

Kezdő pedagógusként az oktatás céljának azt tartom, hogy képessé tegyük a gyermekeket a visszahívható tudás megszerzésére úgy, hogy eközben sikeres stratégiákat alakítsanak ki a problémáik megoldására. Elérhető-e ez egy univerzális recepttel? Kialakítható-e egy tudományos alapokon nyugvó rendszer, mely mindenki számára élvezetes és hasznos? Az egyetem szakmódszertani óráin kívül számos új, innovatív módszerrel találkozhatunk a kutatócsoportok munkáin keresztül, amelyek segítenek nekünk abban, hogy belépve a közoktatás rendszerébe hogyan érjük el a fentebb említett célt. Az MTA-ELTE Matematika Tanuláseleméleti és Pszichológiai Kutatócsoportjának munkájának középpontjába éppen a tananyag átadási-elsajátítási módszereinek vizsgálata áll. Fő kutatási területeik az előhívási hatás vizsgálata, a társasjátékokkal való fejlesztés, a játékosítás, a fonott feladatsorok használata, a problémafelvetés, a geometriai szemléletfejlődés vizsgálata, a tudáskülönbségek áthidalása, a lemorzsolódás csökkentésének lehetőségei és a téri képességek fejlesztése.

Dolgozatom első részében egy középiskolai módszertani kísérletet mutatok be. A kutatás célja a játékosítás hatékonyságának vizsgálata volt egy budapesti általános iskola és gimnáziumban, amely Maria Montessori elvei alapján működik. A kísérlet során a gimnáziumi csoportok pedagógusaként voltam jelen, valamint a tervezés és lebonyolítás folyamatában szoros kapcsolatot tartottam a kutatócsoporttal, valamint Farkas Fruzsina szaktársammal, aki hasonló kutatást végzett általános iskolai környezetben. A kutatást két csoportban 9. és 10. évfolyamban indítottuk el. A 9. évfolyam esetében a kísérlet során arra a döntésre jutottunk, hogy a csoportnak nem megfelelő az eltervezett kurzus. Ezért a dolgozomban csak a második kísérletet, valamint annak eredményeit mutatom be részletesen, amelyet a 10. évfolyammal végeztünk. A tanulók fejlődését –az ELTE-s kutatócsoport által használt– online hozzáállás és elköteleződés tesztek kitöltésével

mértük a játékosított kurzus előtt és után. A kísérleti csoporton kívül a 10. évfolyam egy másik tanulói csoportja is kitöltötte a tesztek, hogy kontrollcsoportként össze tudjuk hasonlítani a gyerekek eredményeit, és felmérhessük, mennyire volt hatékony a játékosítás módszere. Ezenkívül mindkét csoport részt vett egy bemeneti dolgozat kitöltésében a másodfokú egyenletek témakörében, valamint egy kimeneti dolgozatban, melynek témája a másodfokú egyenlőtlenségek voltak.

A kísérlettel a célom, hogy a játékosítás hatására a tanulóknál csökkenjen a szorongás érzése és javuljon a matematikához való hozzáállásuk. A szorongást úgy definiálhatjuk, mint a lehetséges kudarctól és következményeitől való félelem. A megfelelés kényszere és a kudarctól való félelem rontja a teljesítményt, mert az információkezelési készségeket és az funkciókat zavarja. Minél strukturálatlanabb, újszerűbb feladatról van szó, annál inkább. Ha tartósan fennáll ez a fajta szorongásos állapot, akkor beépülhet a személyiségbe, és a tanulásban, a teljesítményhez való viszonyt rontja, a motivációkat rombolja. (N. Kollár, Szabó, 2017) Diákjaimnál már észlelhető ez az állapot a gimnázium megkezdése óta és nagyon kevés motivációt mutatnak a matematika iránt.

Dolgozatom második, matematikai részében Dr. Pintérmé Tóth Rebeka szakdolgozatában ismertetett problémával foglalkozom. A kiinduló feladat egy Arany Dániel Tanulóversenyen szerepelt, és Rebeka többféle módszerrel oldotta meg középiskolai és egyetemi szinten egyaránt. A feladat diszkussziója során általánosította a problémát, és általános megoldást adott páratlan n értékekre. Páros n esetre kitért, de nem adott teljeskörű általános megoldást. Dolgozomban általános megoldást adok páros n értékek esetre, amit egy konkrét példán keresztül is bemutatok.

1. fejezet

Szakmódszertan

1.1. Flow-élmény

Az új évezredben a pozitív pszichológia az egyén erősségeinek felmutatásával és támogatásával igyekszik fejleszteni a problémák feldolgozását és megoldását. Ez azonban nem csak a traumák feldolgozására, a mentális problémák kezelésére lehet hasznos –aminek kutatása során indult fejlődésnek a második világháborút követően– hanem jól használható az élet számos területén. Csíkszentmihályi Mihály –a pozitívizmus egyik jeles képviselője– szerint bármilyen tevékenység közben megtapasztalhatjuk azt a tökéletes élményt, melyet ő flow-élményként definiál. „A flow-élmény az, amikor teljesen elmerülünk egy tevékenységben, és a lehető legboldogabbak és legelégedettebbek vagyunk, mert az óriási erőfeszítéseink úgy érezzük, hogy megtérülnek” (Csíkszentmihályi, 1991). Az emberi boldogság szempontjából elengedhetetlen a flow-élmény vagy magyarosított kifejezésben áramlat-élmény, azonban a mindennapi életben ez a jelenség rendkívül ritkán fordul elő. A jelenség vizsgálatának részeként Csíkszentmihályi kutatta mikor és hogyan érhető el az „amikor minden jól megy” állapot. Kreativitás, a flow és a felfedezés, avagy a találékonyság pszichológiája munkájában kilenc ismétlődő elemet azonosított különböző interjúalanyokkal folytatott beszélgetései során. Ezek közül több olyan van, amit alkalmazhatónak tartok az iskolai környezetben is.

A célok minden egyes lépésnél tiszták. A diákok rövid és hosszú távon is tisztában kell lenniük az elvárásokkal. Ahhoz, hogy ezeket a célokat elérjék, magabiztos és tudatos lépéseket kell tenniük, így a munka közben a következő lépés tervezhető és megugorható

feladatként jelenik meg.

Az egyén azonnali visszajelzést kap tevékenységéről. Az értékelés kulcsszerepet játszik a tanulási motivációban. Egyik fő célja az, hogy visszajelzést adjon a munka pontosságáról. Másrészt motivációs eszközként is szolgál, hiszen lehetővé teszi a diákok számára az előrehaladás és a kompetencia érzésének tapasztalását. Ahhoz, hogy ez az állapot tartós maradjon az értékelésnek folyamatosnak kell maradnia.

Nincs kudarcból való félelem. A tanár reakciója a kudarc helyzetekben kiemelkedő fontosságú. A kudarcnál a belső, változtatható okokra helyezze a hangsúlyt, hiszen ez ösztönző lehet a diák további erőfeszítéseire. Azonban alapvető fontosságú, hogy a visszajelzés hiteles és precíz legyen, hiszen nem szándékunk téves irányba terelni a tanulókat képességeik értékelésekor.

A követelmények és felkészültségünk egyensúlyban van. Ha a diákoktól elvárt feladat túl könnyű, az unalmat okoz, mert nem nyújt kihívást. Ha túl nehéz, szorongást vált ki, mivel a diák úgy érzi, hogy nem képes megbirkózni vele, és ez túlmutat képességein. Számos oktatási helyzetben kell ezért, a differenciálás gyakorlatát alkalmazni. (Csíkszentmihályi, 2021)

Ezek tehát mind olyan előfeltételek, amelyeknek szerepelniük kell a tanítás-tanulási folyamatban kitűzött célok között. Az állapot általános elérésének leírása mellett konkrét példát is ad Beyond boredom and anxiety című könyvében: „A játékok nyilvánvaló forrásai a flow-élménynek, és játszani maga a legkiválóbb flow-élmény” (Csíkszentmihályi, 1985) Ezzel párhuzamosan fogalmazódott meg a kutatókban az igény, hogy a flow-élményt kiváltó játékokat és a játékos elemeket be kell vonni az élet különböző területeire akár vállalati akár oktatási szinten. Ennek a szükségletnek megfelelően fejlődött ki a gamification vagyis a játékosítás elmélete, melynek célja, hogy motiváltabbá és hatékonyabbá tegye az emberek részvételét különféle tevékenységekben, miközben élvezik azokat.

1.2. Játékosítás

A játékosítás egyik megalkotójának Jane McGonigalt tartjuk, aki egy világhírű játékfejlesztő. Kutatásaiban a játék okozta izgalom és öröm megélésének gyakorlatát és

annak pozitív hatásait igyekezett átültetni a való életbe. A játékosítás definiálásra a 2010-es évektől kezdve törekednek. Ennek folytán a fogalom folyamatosan bővül és túlmutat az eredeti online felületeken való alkalmazásán. Gabe Zicherman és társai is többször árnyalták megfogalmazásukat a játékosításról: „az a folyamat, amelyben a felhasználókat problémamegoldásra készítjük játékos gondolkodással és játék mechanizmusokkal”, valamint „a felhasználók elkötelezettségének növelése játék design elemekkel, hűségprogramokkal és viselkedésgazdaságtannal”. Kapp célként jelöli meg az emberek részvételének, cselekvésének és problémamegoldásnak ösztönzését, valamint tanulásuk segítségét. (Szenderák, Szörényi, 2023) A dolgozatomban Houtori és Hamari definícióját veszem alapul, miszerint: „A játékosítás az a folyamat, amely egy tevékenységet azáltal javít, hogy játékszerű élmények lehetőségét teremti meg, hogy elősegítse a felhasználó értékalkotását” (Huotari, Hamari, 2017). A módszer alkalmazása mind vállalati, mind oktatási környezetben elterjedt. A tevékenység iskolai keretek közt az oktatás, a felhasználói a diákok és az érték, amit a folyamat végén várnak pedig a visszahívható tudás megszerzése.

Az oktatás területén számos empirikus kutatás folyik jelenleg is a témában. Ezen eredmények egy széles csoportjának összegzését kísérelte meg két hongkongi kutató, Ya Xiao és Khe Foon Hew 2023-as *Personalized gamification enhances student participation but produces mixed effects on emotional and cognitive engagements: a systematic review* című tanulmányukban. Az egyik a felhasználók osztályozása, akiket öt játékos típusba sorolnak a kutatások: teljesítők, gyilkosok, felfedezők kapcsolatépítők és autonómiakeresők, valamint az ezekhez a típusokhoz kapcsolódó kiemelkedő jellemzők ismertetése. A másik téma a személyre szabott játékosítás hatása a diákok viselkedésére, érzelmi és kognitív elkötelezettségére. Számos következtetést vontak le a már végbement vizsgálatok alapján, valamint segítséget nyújtanak abban, hogy a jövőbeni kutatásoknál mik azok a részletek, amikre nagyobb hangsúlyt kell fektetni a hatékony fejlődés érdekében. (Xiao, Hew, 2023)

1.2.1. A játékosítás módszerei

A játékosítás módszerével egy egyetemi kurzus keretein belül találkoztam először, ahol szaktársaim Szenderák Júlia, Szörényi Sára és Tóth Rebeka Szabó Csaba tanár úr

vezetésével folytatottak kutatást Algebra és számelmélet 1. kurzuson. Azóta számos kutatást végeztek kutatócsoportjukban, amelyek segítettek a saját kurzusom tervezésében és gyakorlati megvalósításában. Kutatásom során mintaként tekintettem Szenderák Júlia és Szörényi Sára A játékosításban rejlő lehetőségek a közoktatásban: Miért, mikor, hogyan? című tudományos diákköri dolgozatában felvázolt módszereket. Eredményeik alapján közösen állítottuk össze a kísérlet gyakorlati megvalósításának tervét a kutatócsoporttal és Fruzsínával. A következő részben bemutatom, hogy milyen részletekre helyeztünk különös figyelmet a játékosítás folyamatának tervezése során.

1.2.2. Toborzás

A toborzás vállalati közegben az a folyamat, amely során az új munkaerő elsajátítja azt a tudást, valamint azokat a viselkedéseket, amelyek szükségesek ahhoz, hogy hatékony tagjává tudjon válni a szervezetnek. (Szenderák, Szörényi, 2023) Ez ideális iskolai környezetben az adott iskolatípus első szaktárgyi órája, 5., 7., és 9. évfolyamokon. A pedagógus ezen alkalommal ismerteti a tantárgy követelményrendszerét, valamint saját elvárásait, mely keretet ad a továbbiakban a közös munkához. Ennek két alappillére van a kialakított kapcsolatok és az elvégzendő feladat, melynek egyensúlyban tartása igen nehéz feladat. Ennek eléréséhez Kenneth Thomas négy belső motivációs elemet emel ki, mely érzésekre különös figyelmet kell, hogy fordítsunk. (Szenderák, Szörényi, 2023)

Az értelmesség érzése, amikor a tevékenység alatt hasznosnak érezzük erőfeszítéseinket. Ehhez elengedhetetlen nagyobb végső célokat kitűzni, valamint jelentőséget adni az adott tevékenységnek az ide vezető úton. Emellett előnyös kihangsúlyozni, hogy ez nem csupán önös érdek, hanem egy közösség tagjaiként vesznek részt a diákok folyamatban, így egymás segítése elengedhetetlen.

A választás érzése, amikor lehetőséget kapunk az önálló döntéshozatalra, abban a tekintetben, hogy milyen feladatokat végezzünk el és hogyan. Fontos, hogy ez mind kontrolált környezetben történjen a megfelelő tudás mellett, hiszen a felmerülő hibákat és kudarokat is kezelni kell mind diákoknak mind a pedagógusnak.

A kompetencia érzése, amikor az adott feladatot jól végeztük el. Annak érdekében, hogy támogassuk a kompetencia érzését, fontos, hogy részletes visszajelzési rendszert alakítsunk ki, ügyelve arra, hogy ez mind közösségi mind egyéni szinten helytálló legyen.

Ehhez szorosan kapcsolódik a haladás érzése, amikor láthatóvá válnak az eredményeink a kitűzött célokhoz képest. Érdeemes ezért több kisebb mérföldkövel megszakítani a tevékenységet, ahol a diákok pozitív visszacsatolások után új lendülettel állhatnak a következő akadályok elé.

1.2.3. Személyiségtípusok

A játékosított kurzusok során –mind az ELTE-s kutatócsoport munkájában, mind a hongkongi kutatók által vizsgált tanulmányokban– fontos szerepet játszanak a játékos-típusok. Ez a felhasználók kategorizálását jelenti a játék során mutatott viselkedésük alapján. A játékos-típusok kategorizálására többféle rendszert dolgoztak ki. Ezek a tipizált csoportjellemzők segítik a tervezés és megvalósítás folyamatát, hiszen előre vetítik a különböző csoportok reakcióit az játékosított elemekre és ajánlásokat adnak eszközökre a motiválásukkal kapcsolatban. Ya Xiao és Khe Foon Hew által áttekintett szakirodalmakban három ilyen keretrendszer található.

Az ELTE-s kutatócsoport által használt rendszer 4 csoportba sorolja a felhasználókat: teljesítő, gyilkos, felfedező és kapcsolatépítő. Richard Bartle ezeket a csoportokat a felhasználók preferenciái szerint két fő tengely mentén határozta meg. Az egyik szempont, hogy a játékos önállóan cselekszik vagy keresi az interakciós lehetőségeket a játékban. A másik szempont, hogy a játékosnak a játék belső világának megértése, felfedezése áll a felhasználó prioritási sorrendjének elején vagy a játék során kialakított társas kapcsolatok, interakciók.

A BrainHex keretrendszer összesen hét különböző játékos-típust mutat be: hódítók, kapcsolatépítők, teljesítők, keresők, mesteremberek, félelmetesek és túlélők. Ezt a keretrendszert használták a legkevesebbszer a tanulmányban áttekintett szakirodalmakban, hiszen több olyan eleme is van, amelyek kifejezetten az online játékelületeken érvényesek és kevésbé ültethetők át iskolai gamifikációs környezetbe. Ilyen például a lövöldözés és az ezzel együtt járó izgalom és rémület.

A harmadik modell a Hexad-modell, amely az önmeghatározás elmélet szerint sorolja fel a játékos-típusokat. Az elmélet három alapvető pszichológiai szükségletre épül, amelyek szükségesek az egyén egészséges fejlődéséhez és jólétéhez. Az egyik ilyen szükséglet a kompetencia, hogy az egyén hozzáértőnek, hatékonynak és sikeresnek érezze ma-

gát a tevékenység során. A másik szükséglet az autonómia, hogy az egyén szabadon választhasson és irányíthassa tevékenységeit, vagyis ne érezze kényszerítve magát. A harmadik szükséglet pedig a kapcsolatok szükséglete, tehát az hogy az adott közösség elfogadott és támogatott tagja lehessen. Ennek megfelelően hat kategóriát különböztet meg: teljesítők, kapcsolatépítők, felfedezők, önkifejezők, befektetők és a csapatjátékosok. (Xiao, Hew, 2023)

Ezek természetesen nem kizárólagos skatulyák. A felhasználókban, diákokban kisebb nagyobb mértékben keveredhetnek ezek a jellemzők, jellemvonások, sőt bizonyos tevékenységek során mutathatnak a típusuktól teljesen eltérő viselkedésformákat is. A hongkong-i kutatók összegezték a cikkekben előforduló játékos típusokat és javaslatot tesznek öt ismétlődő karaktertípus bevezetésére, hogy a későbbiekben a leendő kutatók a lehető leghatékonyabban dolgozhassanak a témában. Az általuk meghatározott típusok: teljesítő, versengő, csapatjátékos, felfedező, autonómiakereső.

1.2.4. A kísérletben használt játékos-taxonómia

A teljesítők –vagy másnéven kihívók– azok, akiknek szükségük van a folyamatos megmérettetésre önmagukkal. A fentebb említett keretrendszerekben többféle megközelítése is létezik ennek a típusnak, melyek abban különböznek, hogy külső vagy belső motiváció munkálkodik bennük a feladatok teljesítése során. Egyeznek a jellemrajzok abban a tekintetben, hogy a feladatok nehézség szerinti differenciálása és a teljesítmény elismerésére kapott jelvények és díjak mind javítják a hozzáállásukat. Érdemes ezeket kiegészíteni olyan listák összeállításával, amelyekkel nyomon követhetik a fejlődésüket, akár önálló akár közösségi szinten. Akik önmaguknak szeretnének bizonyítani azoknak elegendő egy lista, melyen vezetni –esetleg pipálgatni– tudják a már megszerzett elemeket. Akik azonban a külvilág felé szeretnének bizonyítani, azoknak inspirálóbb egy ranglista. A minél több és nehezebb feladat elvégzése mellett az idő, mint tényező is motiválóan hat rájuk. Nem elégszenek meg a feladatok teljesítésével, a feladat elvégzésének ideje is számít. Az elsajátított feladatmegoldási lépéseket egyre rövidebb idő alatt igyekeznek elvégezni.

A versengők és a teljesítők motivációs lehetőségei nagy mértékben megegyeznek. Esetükben is kiemelten fontos, hogy igénylik a kihívást jelentő szinteket, akár olyanokat is, amik

nem mindenki számára megugorhatóak. Sőt céljuk, hogy a többiek felülkerekedve ők legyenek a legkiválóbbak. Minden alkalmat megragadnak, ahol a tudásuk, erejük összevethető a társaikkal. Szeretik a kihívásokat és ezt általában nem is titkolják. A versengés közben arra is figyelmet fordíthat, hogy a saját sikerei mellett a többieket gyengítse, így tartva meg saját státuszát a csoportban.

A csapatjátékosok a fentebb említett kapcsolatépítők és befektetők csoportjainak jellemzői alapján határozandók meg. Azokat a játékosokat jelöli, akik inkább a csoportos tevékenységekben érzik jól magukat, és örömmel dolgoznak másokkal együtt. Számukra a csapatmunka és az együttműködés fontos, és motiválja őket, hogy közösen ériék el a kitűzött célokat. Élvezik a társas interakciókat, és előnyben részesítik a kooperatív játékelményt a versengő vagy önálló tevékenységekkel szemben. Tetteikkel, kommunikációjukkal gyakran erősítik meg társaikat, segítik egymást a közös siker elérésében.

A felfedezők azok, akiket az új dolgok megismerése, feltérképezése vonz. Szeretnék az egész kitalált világ működését, szabályait megismerni. Élvezik, ha a tevékenység tágabb keretrendszerbe van foglalva, ismerik a háttértörténetet, esetleg fizikailag is megjelenik előttük a szabályrendszer vagy egy teljesítendő küldetés. Szívesen megosztják a tudásukat és próbálnak ki új technikákat és startégiákat. Inspiráló számukra, ha valami nem várt, meglepő mozzanat szakítja meg a tevékenység monotonitását.

Az autonómiakeresők kiemelt figyelmet fordítanak a személyes önállóságra és a saját irányításra a játék folyamán. Élvezik, ha lehetőségük van döntési pozícióba kerülni, saját tevékenységeiket irányítani. Ez elsőbbséget élvez a csoportos és/vagy versengő tevékenységekkel szemben. Az ilyen típusú játékosok örömeiket lelik az olyan tevékenységekben, ahol kifejezhetik személyes kreativitásukat, önállóan, saját tempójukban oldhatnak meg problémákat.

1.2.5. Játékos elemek, HEST rendszer, PKR rendszer

A HEST rendszer, mely az access (hozzáférés), power (erő), status (státusz) és stuff (eszközök) rövidítése, egy komplex gamifikációs keretrendszer, mely számos alkalmazási lehetőséget kínál a motiváció és elkötelezettség növelése terén. Ez a rendszer különféle jutalmazási elemeket integrál, hogy ösztönözze és motiválja a felhasználókat a kívánt viselkedésre, legyen szó online platformokról, oktatási rendszerekről vagy más digitális

alkalmazásokról. Az hozzáférés lehetőséget biztosít a felhasználók számára, hogy új tartalmakat és funkciókat érjenek el. Az erő lehetővé teszi számukra, hogy befolyásolják vagy irányítsák a rendszer eseményeit. A státusz és az eszköz elemek pedig pozíciójuk és jutalmaik révén ösztönzik a felhasználókat a további részvételre és aktivitásra.

Az online játékok világának mára külön nyelvezete alakult ki. Ezek főként angol szavak magyarosítását jelentik, melyeknek többletjelentést adnak az ugyanazt vagy hasonló játékot játszóknak. Ez abból adódik, hogy a játékfejlesztők hasonló sémák szerint alakítják ki, fejlesztik a játékokat. A felhasználók így komfortosan érezhetik magukat a különböző játékok közti átjárásokban, hiszen hasonló lehetőségekkel és funkciókkal találkoznak. Az oktatás terén is alkalmazhatók ezek az elismert játékfejlesztők által megalkotott elemek. Szenderák Júlia és Szörényi Sára dolgozatukban készítettek egy gyűjteményt ezekből az elemekből saját tapasztalataik, valamint a Gamified UK és a Bunchball listái alapján. (Szenderák, Szörényi, 2023) Ezek az elemek a megfelelő alkalmazás mellett beépíthetők a játékosított kurzusok során az oktatásba is. A kutatócsoport segítségével ezeket az elemeket csoportosítottuk aszerint, hogy melyik játékos típus ösztönzésére használhatóak.

Teljesítők: befektetés, feloldható tartalmak, haladásjelző, időnyomós, időzítések, képességek, kihívások, mérföldkövek, kitűzők, személyes ranglista

Versengők: befektetés, haladásjelző, időnyomás, időzítések, képességek, kihívások, leszámolás a főgonossal, mérföldkövek, szavazás, tét, versenyek, kitűzők, csoportos ranglista

Csapatjátékosok: ajándékozás, anonimitás, csapatok, gyűjtés és cserélgetés, közösségi együttműködés, húsvéti tojás, szavazás, szerencsejáték, tipp, útmutatás, csoportos ranglista, személyes ranglista

Felfedezők: ajándékozás, anonimitás, csapatok, felfedezés, feloldható tartalmak, gyűjtés és cserélgetés, hiány, játékos felfedezés, képességek, kihívások, közösségi együttműködés, szavazás, szerencsejáték, téma, testreszabás, történet

Autonómiakeresők: anarchia, anonimitás, befektetés, felfedezés, feloldható tartalmak, képességek, kihívások, kreatív eszközök, szavazás, testreszabás

A pontrendszerek kialakításához nagy segítséget nyújt Gabe Zichermann és Christopher Cunningham *Gamification by design* könyvében ismertetett struktúrája, amely öt eltérő módon megszerezhető pontot különböztet meg. A tapasztalati pontok visszajelzést adnak a felhasználók részére, hogy az adott tevékenységet milyen szinten sajátították el. A beváltható pontokkal a felhasználók kereskedni tudnak bizonyos ajándékokért, kedvezményekért. A képesség pontokkal növelhető egy felhasználó fizikai ereje, gyorsasága, varázsereje. A karmapontok fő funkciója, hogy különböző tevékenységekre –belépés a játékba, adományozás– motiválja a felhasználókat. A hírnévpontok pedig a közösség építésének egyik mesterséges formája.

A felhasználók státuszának megjelenítésére alkalmazzák a kitűzőket. Ezek tartalma és fizikai megnyilvánulása alakítható annak függvényében, hogy mely fentebb említett személyiségtípus ösztönzésére használjuk fel. Hasonlóan a pontokhoz, ezek nem csak tartalmi minőségükben térhetnek el, hanem mennyiségi birtoklásuk is okozhat egyfajta pozíciókülönbséget. Továbbá a különböző mérföldkövek, szintlépések egyik megszokott jelképe, mint például a végzős diákokat megkülönböztető szalag vagy a hivatalos szervek egyenruháinak jelzései.

A PKR rendszer harmadik eleme a ranglisták. Lényegük, hogy sorba rendezze az embereket, lehetővé téve a játékosok számára, hogy összehasonlítsák saját teljesítményüket másokéval. Általában két típusú ranglista használatos. Az egyik típus központosított és személyes, ahol a játékos a lista középpontjában helyezkedik el. Így könnyen áttekintheti, hogy mennyi pontot kell még szereznie a következő szint eléréséhez, vagy hogy a tevékenységben mik azok a feladatok, amiket már teljesített és miket el kell még végeznie. Egy példája ennek a gyakorlatnak a feladatlapok kiosztása különböző nehézségi szintekkel, amelyek pontosan meghatározzák, hogy adott idő alatt hány feladatot kell megoldani. A másik típusú ranglista minden résztvevő eredményeit, státuszát mutatja. A ranglisták is különféle szempontok alapján alakíthatóak ki, szabályozhatóak annak érdekében, hogy különböző személyiségtípusokra legyenek motiváló hatással. Érdemes figyelni arra is, hogy ezek az összegzések könnyen válhatnak demotiváló tényezővé is. A listák alján elhelyezkedő személyeknél figyelmet kell arra fordítani milyen reakciókat, érzelmeket vált ki bennük az elért teljesítményük. (Szenderák, Szörényi, 2023)

A fenti felsorolás egy kiegészített változat, ahol a PKR (pontok, kitűzők, ranglis-

ták) rendszerének elemeit is beépítettük. Ezek kisebb nagyobb részben megjelennek a HEST-rendszer elemeiben is, de fontosnak tartottuk ezeket újra kiemelni, hiszen ez a leggyakrabban alkalmazott jutalmazási, értékelési rendszer a játékosítás folyamatában. Fontos azonban megjegyezni, hogy a pontrendszer alkalmazása, vagy a kítűzők osztogatása önmagában nem egyenlő a játékosítás folyamatával. Ezek a lehetőségek mind alkalmasak, értékesek és jól beépíthetőek, ugyanakkor főként a külső motiváció növelésére alkalmasak.

1.3. A kísérlet leírása

1.3.1. Az iskola

A kísérletet egy budapesti Montessori iskolában végeztem. Az intézményben általános iskola és gimnázium is működik, tehát az itt tanulók egy elég széles életkori sávot fednek le. A montessori pedagógia eszközei elsősorban az alsó tagozaton kerülnek gyakori használatra, míg a felső tagozaton egyre kevésbé jellemzőek. Az oktatás során hangsúlyt fektetnek a különféle érzékszervi ingerelésre, különösen az írás-olvasás oktatásában az alsóbb évfolyamokon. Másik alapelve az, hogy az oktatás a gyerekek aktivitására épül, ösztönzi őket a tudás megszerzésére és alkalmazására. Számos fejlesztő eszköz és játékkészlet áll rendelkezésre, hogy könnyebben elsajátíthassák az életkoruknak megfelelő tudást játékos formában. A montessori pedagógia alapelvei sokban hasonlítanak Piaget kognitív fejlődéstudáselméletéhez, amely szerint a tanítási módot a gyermekek gondolkodási szintjéhez kell igazítani. (N. Kollár, Szabó, 2017) Általános iskola közepéig általában a játékos tanítási módszerek jellemzőek az oktatási intézményben, amelyek segítségével a gyerekek könnyebben tanulnak. A játékosítás az oktatás egy természetes része, de ahogy haladnak az évfolyamokkal, fokozatosan kevésbé hangsúlyossá válik, és a diákok későbbi tanulmányai során csak korlátozottan jelenik meg. Az adott intézmény pedagógusai azonban igyekeznek felsőbb évfolyamokon is a mindennapok részévé tenni. Ennek legfőbb oka Vigotszkij legközelebbi fejlődési zóna elméletével magyarázható. Az elmélet szerint, a valaki képességeit fejleszteni és fejlődését elősegíteni kívánjuk, akkor az illető jelenlegi szintjétől kell kiindulnunk, és ehhez igazítanunk a fejlesztési terveket. Az elvárásoknak az egyén saját képességeihez és szükségleteihez kell illeszkedniük. Vigotszkij szerint, játék

közben a gyerekek gyakran olyan módon viselkednek, mintha érettebbek lennének, és olyan tevékenységeket végeznek, amelyeknek általában nehezebbek lennének a korukhoz képest. (Szörényi, Szenderák, 2023)

A montessor-i módszert gyakran alkalmazzák az átlag fölötti és alatti értelmi képességű tanulóknál is, így nem meglepő, hogy az ilyen intézményekben integrált oktatás folyik. Az integrált oktatás azon elvet követi, hogy különböző képességű tanulók ugyanabban az iskolában tanulnak. Biztosított számukra a differenciált oktatás a tanórákon, illetve a tanórákon kívül gyógypedagógusok segítik előrehaladásukat, illetve fejlesztik képességeiket. Az intézményben az osztályok heterogenitását –az egyéni fejlesztések mellett– csoportbontásokkal igyekszünk kiegyensúlyozni, különösen a matematika és az angol nyelv tantárgyak terén. Azonban a mindennapi gyakorlatban számos esetben jelennek meg az inkluzív oktatás elmei. Az inkluzív oktatás előtérbe helyezi az egyenlő hozzáférést és lehetőségeket a tananyag elsajátításához minden tanuló számára. Differenciált oktatási módszereket alkalmaz, hogy minden tanuló sikeres legyen, miközben erősíti a közösségi érzést és elfogadást az iskolai környezetben.

1.3.2. A csoport

A játékosított kurzust a 10. évfolyamban indítottuk el. Itt három részre bomlik a két osztály. A csoportbontás 9. évfolyamtól él, mely egy diagnosztikus felmérés követően alakult ki. A kísérleti csoportba 13 tanuló jár, közülük 5 matematika osztályozás és értékelés alól mentesített. A szakértői bizottság véleménye alapján a tanulók aktívan részt vesznek az órán bevonódnak, aktív részesei a tevékenységeknek, de a szintjüknek megfelelő feladattípusokat kapják, illetve számonkérés során érdemjegyet nem kapnak. Az ilyen típusú tanulók integrálása a tanórába külön odafigyelést igényel. Ehhez a folyamathoz nélkülözhetetlen a gyógypedagógus és az iskolapszichológus. A saját nevelési igényű (SNI) és a beilleszkedési, tanulási és magatartási nehézségekkel (BTMN) küzdő diákok esetén az egyéni fejlesztések a törekednek kapcsolódni szaktárgyi órákon tanultakhoz. A kísérletet a második félévben indítottuk el és 5 héten át tartott, amely –a heti 3 matematika óra alapján– 15 tanórát ölelt fel. Az órarendben a matematikaórák szerdán 2. és 3., míg csütörtökön 6. órában zajlottak. Ez megnehezítette a tanulók érdeklődésének fenntartását. Stanislas Dehaene Numbersense című könyvében, mint

hatékony tanulási módszerről ír az elosztott tanulásról. Ez a fogalom azt jelenti, hogy a tananyagot időben szétagoltan tanuljuk, több kisebb időintervallumban, és ezáltal az ismeretek jobban rögzülnek az agyunkban. A jobb megértést és a hosszútávú tudást segíti elő, ha a kisebb tananyagrészeket rendszeresen rövid időközönként tanuljuk, tanítjuk. (Dehaene, 1997) Ennek elősegítése érdekében 2 olyan hét is volt, amikor a diákok csütörtökön kiadott házi feladatokat két részletben kapták meg. Az egyik feladat beadási határideje hétfő 18:00 óra, a másik határideje szerda 8:30 óra. A feldolgozandó tananyag a másodfokú egyenletek és a másodfokú függvények kapcsolata, valamint a másodfokú egyenlőtlenségek volt. Ezt megelőzően a másodfokú egyenletek megoldási módszereivel foglalkoztunk.

1.3.3. A játékosítás alatt feldolgozott tananyag

A játékosítás keretében öt héten keresztül a másodfokú egyenletekkel és a másodfokú függvények kapcsolatával valamint a másodfokú egyenlőtlenségekkel foglalkoztunk. Az első héten a gyerekek a másodfokú egyenletekből írtak egy ellenőrző dolgozatot, lezárva ezzel az előző témakört.

Név:

Másodfokú egyenletek 10. osztály

1. Oldja meg a következő egyenletet!(3pont)

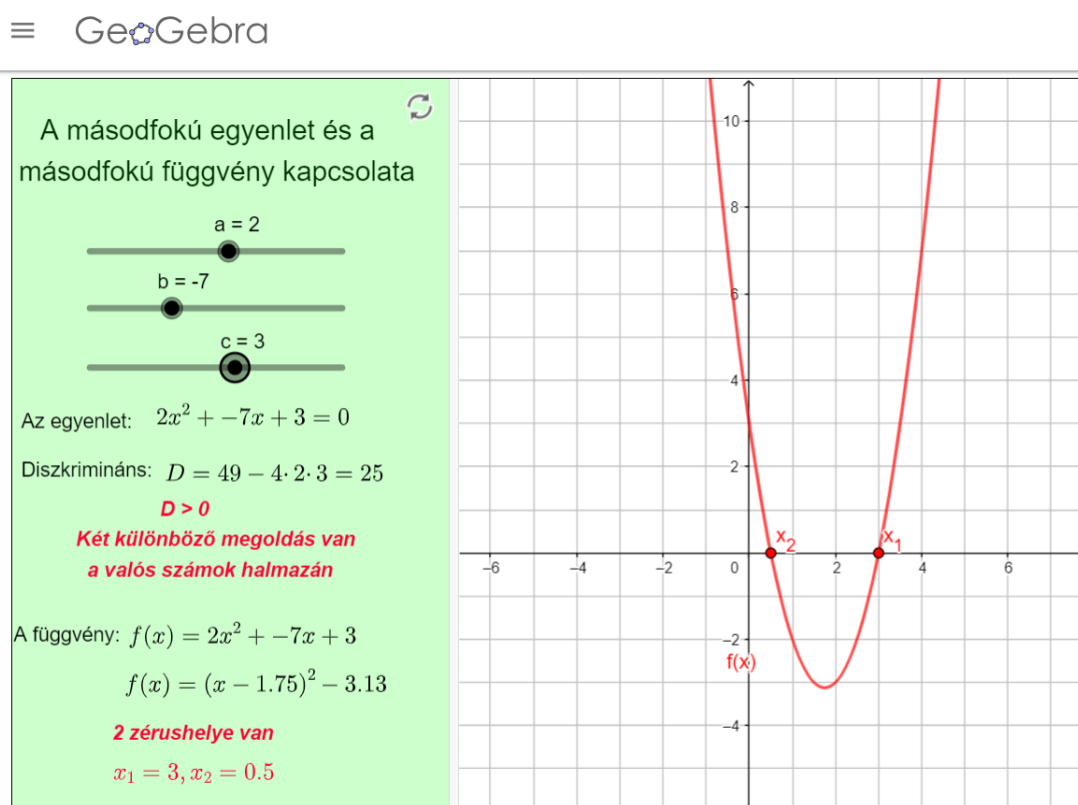
$$4(x-3)(-9-x)(x+1) = 0$$
2. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet $ax^2 + bx + c = 0$ alakban, amelynek gyökei a $x_1 = -7, x_2 = 6$! (2 pont)
3. Oldja meg a következő egyenletet a másodfokú megoldóképlet segítségével!(5pont)

$$3x^2 - 18x + 24 = 0$$
4. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet! (5 pont)

$$(2x-1)(1-2x) = (x+6)^2 + 58$$
5. Melyik az a szám, amelynek a felét és az ötödét összeszorozva a szám hétszeresét kapjuk. (5 pont)
 (Ügyelj a szöveges feladat lépéseire: adatok, terv, számolás, ellenőrzés, válasz)

1.1. ábra. Bemeneti méréshez dolgozat

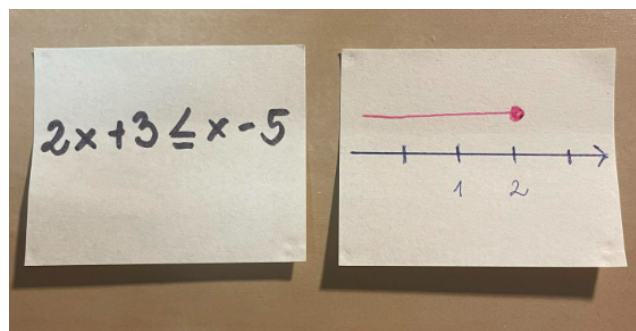
Az ellenőrző dolgozatot követően átismételtük a már korábban tanult másodfokú függvényeket. Az ismétlés során különös hangsúlyt fektettünk a másodfokú egyenletekkel való kapcsolatra azzal a céllal, hogy a gyerekek számára könnyebb legyen a továbblépés. Az elmélyítéshez a Geogebra-t hívtam segítségül. A programban készített ábra segítségével vizualizáltuk a függvények és az egyenletek közötti kapcsolatot, valamint a hozzájuk kapcsolódó fogalmakat. A diákok itt megérthették, hogy a másodfokú egyenletek megoldásai a másodfokú függvény zérushelyei. Az ábrát elérhetővé tettem számukra, hogy otthon is tudjanak vele foglalkozni, illetve gyakorolni a segítségével. A program segítséget nyújtott abban, hogy azok a diákok is megérthessék a tananyagot, akiknek a másodfokú függvények ábrázolása nehezen megy. Az ábrán látható a csúszkák paramétereit szabadon változtathatták, mely során azonnal újabb függvények jelentek meg előttük, így sokkal több példával találkoztak a tanórán és otthon is, mint a hagyományos füzetbeli ábrázolások során.



1.2. ábra. Geogebra szemléltetés

Az ismétlést követően elkezdtek bevezetni az új tananyagot az egyenlőtlenségek terén. Elsőként áttekintettük a korábban tanult elsőfokú egyenlőtlenségeket, amelyek megoldásait számhalmazformával, intervallumokkal, illetve számegyenesekkel is megadtuk. Az

ismétlés során azt tapasztaltam, hogy a tanulók nem annyira emlékeznek erre a témakörre, így a vártnál eggyel több órát szántam az ismétlésre. Elővettük az előző évi gyakorló feladatsorokat, melyeken számegyenesről kellett leolvasni az adott intervallumokat és megadni számhalmaz formában, valamint az adott intervallumokat kellett ábrázolni a számegyeneseken. Az ezzel a témakörrel kapcsolatos két órát egy játékos elemmel zártuk le. A játékos feladat során minden tanuló kapott a tudásszintjének megfelelően egy egyenlőtlenséget, majd meg kellett keresniük a saját egyenletük megoldását egy számegyenesen. A tevékenységről részletesebben a Húsvéti tojások című alfejezetben írok.



1.3. ábra. Egyenlőtlenségek és megoldásaiknak ábrázolása számegyenesen

Az elsőfokú egyenlőtlenségek átismétlése után már a másodfokú egyenlőtlenségekkel foglalkoztunk, ahol nagy mértékben támaszkodtunk az előző órákon felelevenített tudásra. A későbbiekben visszatértünk a Geogebra ábrákhoz, melyek lehetővé tették, hogy a diákok könnyen leolvassák az egyenlőtlenségek megoldásait a másodfokú függvények grafikonjairól. Ennél a témakörnél több terület összekapcsolása és megértése már nélkülözhetetlen a feladat megoldásához. Ismert, hogy a munkamemória kapacitása véges és kevés elemmel tud dolgozni: úgy éreztem, hogy a diákok kicsit bizonytalanok, még nem tudták rutinszerűn alkalmazni az egyenleteknél tanultakat. Annak érdekében, hogy az egyenlőtlenségek megoldását megértsék, segítségképpen hoztam be az órákra a Geogebrát, mint egy eszközt, ami esetleg átvesz némi terhet a munkamemóriától. Külön tudtunk koncentrálni arra is, hogy a megoldáshalmazt milyen módokon érdemes megadni.

Annak érdekében, hogy a feladatok könnyebben menjenek a diákoknak, készítettünk számukra egy segédanyagot, amely lépésről lépésre vette végig az egyenlőtlenségek megoldásához szükséges módszereket és lépéseket. Innentől kezdve a diákok szabadon

használhatták ezt a segédanyagot az órákon.

Az összefoglaló órán a tanulók kaptak egy próbadolgozatot, amely tartalmazta azokat a típusfeladatokat, amelyek a számonkérésnél előfordulhattak. Az ezt követő órán megírták a dolgozatokat.

Név:

Egyenlőtlenségek MÉG NEM ÉLES dolgozat
10. osztály

1. Oldd meg az $x^2 - 4x + 8 \leq 2x - 1$ egyenlőtlenséget! Ábrázold a megoldáshalmazt számegyenesen és add meg intervallumos formában is! (3,5 pont)
2. Oldd meg az $-x^2 + 4x - 3 > 0$ egyenlőtlenséget! Ábrázold a megoldáshalmazt számegyenesen és add meg intervallumos formában is! (3,5 pont)
3. Oldd meg az $(x - 3)(x - 5) > x^2 - 5 - 10x$ egyenlőtlenséget! Ábrázold a megoldáshalmazt számegyenesen és add meg intervallumos formában is! (5 pont)
4. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget! NE felejts el számegyenes készíteni ! (5 pont)
$$\frac{x^2 - 25}{2x + 1} \geq 0$$
5. Add meg az alábbi az alábbi számhalmazok intervallumformáját, valamint ábrázold számegyenesen azokat! (3pont)
 - a) $-3 < x \leq 5$
 - b) $4 \geq x$
 - c) $-3 > x$ vagy $5 < x$



1.4. ábra. Próba dolgozat

1.3.4. A játékosított elemek megvalósulása a kurzuson

A játékos elemek beépítésekor többféle szempontot kell figyelembe venni. Egyik legfontosabb, hogy a folyamat a benne lévő személyekre legyen szabva, vagyis a tartalmat a rendszer az egyének tulajdonságaihoz igazítja. Ez kulcsfontosságú tanulási paradigmának számít az oktatástechnológiai kutatási közösségben. (Xiao, Hew 2023) Ennek legkézenfekvőbb pontja a kiválasztott csoport előzetes elemzése. Felméréseket végeztünk a csoport elköteleződéséről és hozzáállásáról –melynek módját és eredményeit a későbbiekben tárgyalom–, valamint figyelembe vettük a diákok -fentebb kategorizált-

személyiségtípusait. Annak érdekében, hogy egy pontosabb képet kapjunk a diákokról igyekeztünk a lehető legtöbb és legkülönbözőbb játékos elemet beépíteni a kurzus felépítésébe, hogy –minél több elem kipróbálása során– árnyaltabbá váljon a kezdetben meghatározott személyiségtípusuk.

Emellett digitális eszközöket és online felületeket próbáltunk beépíteni a változatos élmények és a digitális kompetencia fejlesztése érdekében. Fontos azonban az arány megtalálása, mivel a diákoknak már egyébként is sok időt töltenek a hétköznapiakban a képernyő –számítógép, telefon– előtt. Tapasztalataim szerint a kísérleti csoport diákjai szívesen oldanak meg kvízeket vagy játékos feladatokat házi feladatként, azonban például a Geogebra szerkesztés vagy online beadandó feladatok terén még mindig nem rendelkeznek megfelelő szintű digitális kompetenciákkal. Ez azt jelenti, hogy sokan nem tudják magabiztosan használni az eszközöket és az online tér számukra leginkább az időtöltés színtere. A tanórákon pedig vitatott a digitális eszközök, főként a telefon használata, hiszen mindig lesznek olyan diákok, akik kihasználva a lehetőséget nem a feladattal foglalkoznak a telefonjukon.

A következő részben összegzem a kurzuson alkalmazott játékosított elemeket, amelyeket különböző fent említett elemek szerint csoportosítok. Ezek közt vannak olyan tevékenységek, amelyek egyszerre több elemet ötvöznek. Rámutatok arra is, hogy ezek mely játékos típusokat motiválhatják.

Pontrendszer, ajándékozás

A diákok lehetőséget kaptak pontok gyűjtésére, ami egy külön érdemjegyet jelentett a témakör végén. A pontok a házi feladatok és az órai munkájuk értékeléseként kapták ez összesen heti 20 pontot jelentett, így a kurzus végére 100 pont volt összegyűjthető. Az érdemjegyeket az érettségi ponthatárok szerint húztuk meg, így akinek sikerült 80 pontot elérnie ötös érdemjeggyel gazdagodhatott. Ezt kiegészítve voltak olyan pluszpontok, amelyekkel növelhették a pontszámaikat. Ezek egyik leggyakoribb előfordulása a segítség pontok. Ez azt jelentette, hogy aki segítséget kért vagy nyújtott a tanórán, az plusz egy-egy pontot kapott. Továbbá az is pontot szerezhettek, aki engem keresett meg a házi feladattal kapcsolatban. A csoport tagjai közül főként a csapatjátékosok értékelték a segítségpontok adásának lehetőségét. Meglepetésemre azonban volt egy versengő

típusú lány, aki saját maga felismerte ebben a verseny lehetőségét. Ez a pontrendszer folyamatosan követhető volt a csoport Teams csoportjában egy Excel táblázatban, így mindenki láthatta eredményeit.

Emellett a gyerekeknek páros munka során lehetőségük volt egymást értékelni és egy plusz ponttal jutalmazni, ha a másik segítségére voltak. Ennek oka az volt, hogy a csoportban több olyan gyerek is van, aki nem igazán szeret csoportban dolgozni, így a páros munka az, amit még komfortosan tudnak kezelni. A párok beosztását a két alkalommal különböző szempontok alapján alakítottam ki. Az egyikben tudásszintben heterogén párok jöttek létre, ekkor a feladat elkészült a legtöbb párosításnál, de pontot csak az egyik fele kapott a párosnak. A következőben olyan párok jöttek létre, akik közel azonos tudásszinten állnak és lehetőleg kedveljék is egymást. Itt a feladatok nagy része nem készült el a kitűzött időre, de a gyerekek jobban élvezték a közös munkát.

Ranglisták, haladásjelzők

Az előzőekben említett Excel táblázat egyfajta ranglistaként is, melyben az összes résztvevő nyomon tudta követni fejlődését önmagához és a csoporthoz képest is. A ranglista eredményeinek kiegészítésére igyekeztem az órákon a kisebb nagyobb mérföldköveket kiemelni szóban. Például: „Eddig ezt a házi feladatot sikerült a legeredményesebben kitölteni!”; „Mindenki elérte a 25 pontot”; „A mai napra csinálták meg legtöbbben a házi feladatot”.

Újabb példa a játékosítás alatt megjelenő ranglistákra és haladásjelzőkre egy Kahoot-kvíz kitöltése. Ez egy oktatást segítő program, mely minden feltett kérdés után rangsorolja a diákokat teljesítményük alapján. A rangsor felállítása nem csak a helyes válaszok alapján történik, hanem a játékosok plusz pontokat szerezhetnek a válaszájuk gyorsasága alapján is. Ez megosztó abból a szempontból, hogy az idő, mint tényező a teljesítőket és a versengőket inspirálja, vannak azonban olyan diákok, akik szoronganak az ilyen nyomás alatt. Ezt a nyomást azzal igyekeztem csökkenteni, hogy a tananyag feladatai mellett olyan kérdések is belekerültek a kvízbe, mely nem igényelt matematikai tudást. Például: „Mit definiál a következő mondat? Négy lába van, asztal, de nem szék?” vagy „Mit iszik a tehén?”. Ezek a kizökkentő kérdések azok, amelyek nevetésre készítetik a csoportot. Ugyanakkor ennél a tevékenységnél több tanuló is nem várt módon reagált.

A formátum hatására többen is felvették a versengő szerepet és érezték, hogy nagy eséllyel szerencse alapon is sikeresek lehetnek. A „véletlenül” elért siker érdekeltté tett olyanokat is, akiket a témakör különösebben nem érdekelt. Az ezt követő tanórán ezek a tanulók érezhetően a megszokottól nagyobb figyelemmel kísérték a történéseket.

Kitűzők, mérföldkövek

A kitűzők és mérföldkövek jelezhetik egy tanuló státuszát, vagyis a csoportban való elhelyezkedését. A mérföldkövek alapján nem szükséges mindent újból kezdenünk, mivel már van olyan tartalom amit, biztosan lezártunk, megtanultunk. A témakörön belül átismételtük a másodfokú függvényeket, melynek lezárásaképp a gyerekek egy online szabaduló szobából kellett kiszabadulniuk. A felület a genial.ly.com-on érhető el és kifejezett oktatási célokra lett kifejlesztve. A diákoknak 6 különálló részt kellett teljesíteniük, melyek mind teszt kérdésekből álltak. A felület addig nem enged továbblépni a 6 leckén belül, míg a helyes választ meg nem adja a felhasználó. A végén pedig egy tanúsítványt állít ki a megszerzett tudásról. Aki ezt teljesítette megkapta a házi feladatra szereshető maximális 4 pontot. Ez volt az a feladat, amely olyan diákokat is megmozgatott, akik a házi feladat megoldásában nem igazán voltak érdekeltek. A felület az újdonság varázsával hatott és mindenki számára sikerélményt adott a kitöltők közt.

Ebből inspirálódva készítettem a diákoknak a témakör végén egy tanúsítványt, mely azt jelezte, hogy ezt a témakört sikeresen teljesítették. Ez nem aratott akkora sikert, mint amire számítottam. Erre abból következtettem, hogy volt olyan tanuló, aki a teremben hagyta a papírját.

Feloldható tartalom, kihívások és küldetések

A feloldható tartalmak –a fentebb leírtak szerint– megmozgatták az autonómiakeresők és a felfedezők fantáziáját. Az ilyen típusú diákok azonnal kérdezték, hogy mi lesz a jutalom, ami feladat végén várja őket. A feladat egy másodfokú egyenlőtlenség megoldása volt, melyhez hasonlólt előtte osztályszinten oldottunk meg, tehát csak alkalmazniuk kellett egy új problémára a már lejegyzetelt megoldásmenetet. Az első három játékos extra jutalmat is kapott. Ezzel próbálkoztam érdekeltté tenni a teljesítők és versengők csoportját. A feloldható tartalom 1-1 perc jutalom játékidőt jelentett, amit beválthattak

közösen egybe vagy kisebb részekre felbontva. Az első három helyezett pedig további 30 másodperc játékidőt kapott, így összesen 14 és fél percet lehetett összegyűjteni. A sikeres megoldások által az óra végéig 10 és fél perc játékidő gyűlt össze. A tanóra végén a szünetben a csoport közösen döntötte el, hogy a beváltható időt egy részletben szeretnék felhasználni a következő órán.

A tevékenység, amivel készültem a következő óra utolsó 10 percére a Bash nevű kockajáték. A játék a diákok számára nem volt ismeretlen, volt már korábban lehetőségük játszania matematika óra keretein belül. A játék során 2 dobókockával kell dobni és az előző játékosnál mindig nagyobb eredmény kell elérni. A dobást valódi értékét csak az adott játékos látja, de fontos szabály, ha dobtál mindig nagyobb értéket kell mondanod az előző játékosnál akkor is, ha nem sikerült ezt megdobnod. A következő játékos pedig eldöntheti, hogy átveszi és dob egy nagyobb számot vagy nem veszi át és ekkor meg kell mutatni a dobott értéket. Ha egyezés van a dobott érték és a kimondott szám között, akkor dobó nyert és a másik játékos veszít egy életpontot, ha pedig nincs egyezés akkor a dobó veszít egy életpontot. A személyiségtípusok itt nagyon jól láthatóak voltak és hasonlóan a Kahoot-hoz itt is más arcukat mutatták a diákok. Ami nagyon érdekes volt, hogy a felfedezők közül többen megosztották a stratégiájukat és próbáltak segíteni azoknak, akiknek a játék megértése nehezebben ment. A tevékenység a legtöbb gyerek tetszését elnyerte. Hasonló hatást fejtett ki, mint a kvíz így olyanok is bevonódtak a játékba, akik nem az óra nagy részén passzivitást mutattak. Ugyanakkor az időbeli korlát sokat segített, hiszen az óra végére időzítettük a játékot, ami megkönnyítette az óra tervezését és a diákok ismét egy pozitív élménnyel távoztak az órától.

A játék küldetéseinek célja, hogy a játékosok konkrét célokat érjenek el, míg a kihívások tesztelik a tudásukat és képességeiket. A sikeres teljesítésük által érzett elégedettség növeli a játékélményt. Ezen célok és kihívások elérése érdekében egy feladatlapot állítottam össze a tört alakban megadott egyenlőtlenségek gyakorlása során. A diákok három nehézségi szint közül választhattak. A feladat ismertetése során a gyerekeknek fel kellett írniuk egy kis papírra a nevüket és hogy melyik nehézségű feladatot tudnák megoldani. Ezt összeszedtem és ismertettem a feladat további instrukcióit. A feladatokat házi feladatként kellett megoldaniuk. A célom az volt, hogy minden feladat megoldása felkerüljön a táblára a következő órán különböző emberektől, amiért pluszpontot gyűjtettek. Emellett akinek sikerült megoldani mind a három feladatot, vagy egy nehezebb

feladatot, mint amit a papírjára írt, annak még egy pluszpont járt. Örömmel láttam, hogy volt több tanuló is, aki próbálkozott nehezebb szintű feladattal is, mint amit a papírra írt és mind a három kategória megoldására volt jelentkező.

Veszteségkerülés

Az értékelés egyik legáltalánosabb formája a közoktatásban az írásbeli témazárók kitöltése. A diákok egy-egy témakör végén egy feladatlap előtt találják magukat, mely általánosságban nagy stresszel jár számukra. Ennek csökkentésére egy próbadolgozat került kiadásra. A kitöltés fakultatív volt, de beadás után a megszerzett pontok 10 százaléka hozzáadódott az „éles” dolgozathoz. A célom az volt, hogy lássák mire számíthatnak és otthon nyugodt körülmények közt, időnyomás nélkül gyakorolhassanak. A diákok közül két felfedező típusú diák élt csupán a lehetőséggel, nekik azonban a megszerzett pontok alapján sikerült egy jegyet javítaniuk a témazáró értékelésekor.

Húsvéti tojások (Easter eggs)

A tanulási folyamat könnyedén feldobható és a diákok motivációja fokozható húsvéti tojásokkal. Ezek a tojások nem feltétlenül kapcsolódnak szorosan a tananyaghoz, de remekül alkalmazhatóak az óra hangulatának javítására és a tanóra monotonitásának megtörésére. Az egyik órai feladatlapra a diákok felfedezhettek egy QR kódot a jobb alsó sarokban, melyet kértem, hogy a feladat végén tekintsenek meg. A QR kód mellé egy rövid szöveges üzenetet is mellékeltem: „Aki kíváncsi, gyorsan öregszik”. A QR kód egy képhez vezetett, amelyen a következő szöveg volt olvasható: „Amikor végeztél a matek feladattal és nem tudod eldönteni, hogy ez most könnyű volt, vagy mindent elrontottál.” A felfedező és autonómiakereső típusú gyerekek azonnal a telefonjuk után nyúltak és igyekeztek kideríteni mit rejthettem el kíváncsiskodóknak. A versengő és teljesítő típusú gyerekek betartva az utasítást rögtön a megoldandó feladatra koncentráltak, mindaddig míg az első nevetés meg nem hallották. Ezek után engedélyeztem mindenki számára, hogy megtekintse a képet és tanóra végén mi közösen is készítettük egy hasonló képet. A másodfokú egyenlőtlenések bevezetésénél a diákok csoportos párosító feladatot kaptak az óra közepén. A tevékenység célja a lankadó figyelem újbóli felélesztése és a tanulók aktivizálása volt. A tanári asztalon találtak post-it-eket, amelyeken számegyeneseken

ábrázolt intervallumok voltak megtalálhatóak, a hátoldalukon pedig egy-egy betű. A feladatuk egy egyszerű, tudásuknak megfelelő egyismeretlenes egyenlőtlenség megoldása volt, melyeket én osztottam ki személyre szabottan. Ehhez kellett kiválasztaniuk a megoldásukat reprezentáló számegyenes, így a helyes megoldások esetén megkapták a húsvéti tojás szó betűinek egy-egy darabját. Ezután a kártyákból, közösen alkották meg a betűk helyes sorrendjét.

Időzítés az oktatásban

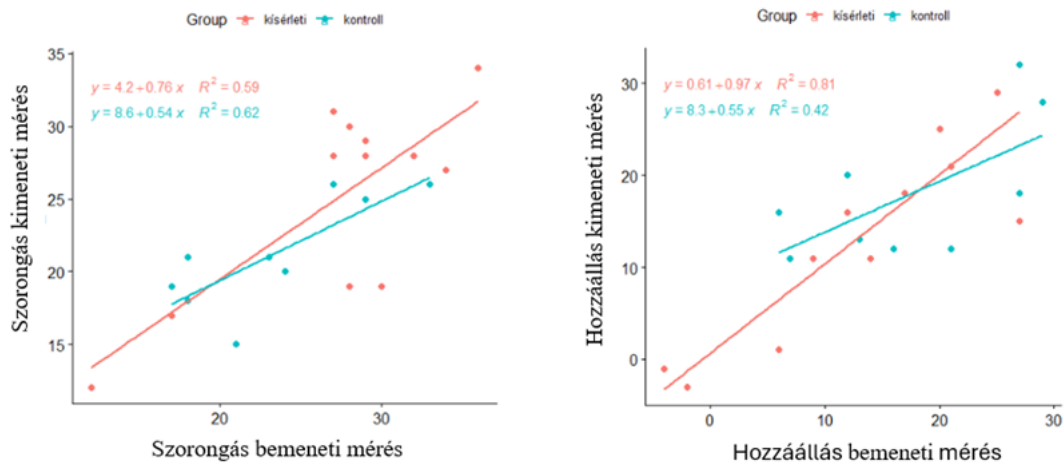
Az időzítések arra utalnak, hogy a játékos jutalma hogyan függ az időtől. Megkülönböztetünk három típust a témában. A fix és időtől függő jutalmak könnyedén beépíthetőek az –általam is használt– pontrendszerbe. A teljesítők és versengők számára ezek könnyen tervezhetően megszerezhetőek. A véletlenszerű jutalmak főként a felfedező típusú diákokat motiválják. Ezzel szemben a teljesítő és versengő típusú tanulóknál gyakran frusztrációkat okoznak, hiszen nincs ráhatásuk az elérésükre. Véletlenszerű pontokkal és szóbeli dicséretekkel igyekeztem az órán passzívbabban viselkedő diákok megszólalásait jutalmazni. Ezt követően a versengő és teljesítő diákok láthatóan aktivizálódtak és még inkább igyekeztek a tanórához érdemlegesen hozzászólni.

1.4. Eredmények diszkusszió

1.4.1. Kvantitatív elemzés

Célunk a kísérlet során az volt, hogy megfigyeljük, hogyan változott a kísérleti és a kontrollcsoport attitűdje és szaktárgyi tudása az öt hét alatt. Először ismertetem a szorongás és attitűd tesztek, illetve a dolgozatok alapján kapott statisztikai eredményeket. A csoportok mérete, vagyis a statisztikai minta kicsi volt, ezért aggódtam, hogy a statisztikai elemzés kimenetele nem mutat szignifikáns változást. A tesztek és dolgozatok eredményeit kovarianciaanalízissel (ANCOVA) vizsgáltuk. Az elemzést az R 4.3.3 programmal végeztük el. A modellekbe azt vizsgáltuk, hogy a két csoport kimeneti eredményeinek kimeneti pontszámai különböznek-e egymástól, kováltozóként pedig a bemeneti teszt eredményeinek pontszámát vittük be a modellbe. Ezzel a tanulók

fejlődését mértük a kezelés hatására. Az eredményekből kiderült, hogy az attitűd teszt bementi és kimeneti értékei szignifikáns összefüggést mutattak csoporttól függetlenül ($F(1,18) = 38; p < 0,0001$), azonban nem volt különbség a kimeneti eredmények pontszámai között ($F(1,18) = 0,08; p = 0,78$). Ugyan ez a mintázat volt a szorongás teszt esetében is, a teszt kimeneti és bementi eredményének pontszámai szignifikánsan összefüggenek ($F(1,18) = 24; p < 0,0001$), azonban itt sem volt különbség a kimeneti teszt eredményeinek pontszámaiban a csoportok között ($F(1,18) = 0,4; p = 0,53$). Ez azt jelenti, hogy a két csoport attitűdjének változása statisztikai módszerekkel nem kimutatható. A kapott eredményeket diagramon ábráztuk.



1.5. ábra. A statisztikai elemzés eredményei

A dolgozatokon elért pontszámok esetében is összefüggött a bementi és kimeneti dolgozatok pontszáma ($F(1,18) = 48; p < 0,0001$), azonban itt sem volt egyelőre kimutatható hatása a kezelésnek ($F(1,18) = 0,86; p = 0,37$).

A kvantitatív elemzés második fázisaként online kérdőív segítségével mértük fel a diákok elkötelezettségét az iskolával, valamint a humán, reál és matematika tantárgyak iránt. A kérdőívet Szörényi Sára saját szakdolgozatához készítette, az Aquilone Training Kft. szervezetfejlesztő és játékosító vállalat közreműködésével. A vállalat az elköteleződést a SCARF modell alapján vizsgálja. (Szörényi, 2023) A SCARF modell egy olyan keretrendszer, amely a szociális szabályozás neurobiológiai alapjait vizsgálja az emberi interakciók során. A modell öt fő dimenziót azonosít, amelyek befolyásolják az emberek viselkedését és élményeit a közösségi helyzetekben: Status (státusz), Certainty (bizo-

nyosság), Autonomy (autonómia), Relatedness (kapcsolódás) és Fairness (igazságosság). Ezek alapvető elemek a vezetésben, szervezeti kultúrában és az emberi kapcsolatokban, és a modell segíthet hatékonyabb vezetési stratégiák kidolgozásában. (Rock, 2008)

A státusz azt jelzi, milyen fontosnak tartják mások az egyént a közösségben. Amikor fejlődünk, és mások elismerik a haladásunkat, úgy érezzük, emelkedik a státuszunk. A bizonyosság azt jelenti, hogy mennyire kiszámítható a környezetünk. Minél kiszámíthatóbb, és kevesebb a váratlan változás, annál könnyebben tudunk elköteleződni. A bizonyosság mértéke azt mutatja, mennyire lehet előre látni a környezet változásait. Az elköteleződés tehát növelhető a váratlan tényezők minimalizálásával. Az önállóság azt jelzi, mennyire tudjuk befolyásolni a körülöttünk zajló eseményeket és mennyire szabadok vagyunk döntéseinkben. Az önállóság növelése nem egyszerű, mert a túlzott autonómia ronthatja a folyamatok hatékonyságát. A kapcsolódás azt írja le, mennyire érezzük magunkat biztonságban a társas kapcsolatainkban, és mennyire tekintjük a többieket ellenségeinknek vagy barátainknak. A közösséghez való tartozás érzése fokozódik, ha megtaláljuk azokat a közös pontokat, amelyek összekötnek minket másokkal. Az igazságosság azt mutatja, mennyire korrekt a folyamatok lebonyolítása. Az egyértelmű elvárások, szabályok és célok segítik az igazságosság érzését. (Szörényi, 2023)

A kérdőív négy részből állt, melyekben a tanulóknak 10-10 kérdést kellett megválaszolniuk. Ez segített felmérni a gyerekek általános elvárásait az iskolával, a humán és reál tárgyakkal, valamint a matematikával szemben. Az összes kérdésnél a tanulóknak 1-6 terjedő skálán kellett értékelniük szempontokat, ahol a 6 azt jelentette, hogy az állítás teljes mértékben igaz, az 1 pedig, hogy egyáltalán nem igaz.

A tanulók által adott pontszámokat a SCARF modell dimenziói alapján átlagoltuk, melyeket táblázatos formában összesítettünk.

Bemeneti mérés eredményei

Kísérleti csoport	Általános elvárások	Reál tárgyak	Humán tárgyak	Matematika
Státusz	3,5	3,13	3,75	3,01
Bizonyosság	4,96	3,7	4,6	3,75
Önállóság	4,13	3,67	4,35	3,18
Kapcsolódás	4,13	3,13	3,57	3,13
Igazságosság	4,74	3,65	4,63	3,71

Kontroll csoport	Általános elvárások	Reál tárgyak	Humán tárgyak	Matematika
Státusz	3,25	3,3	4,05	3,2
Bizonyosság	4,25	4,2	4,15	4,05
Önállóság	4,3	4,55	4,65	3,89
Kapcsolódás	4,1	4,25	4,73	3,85
Igazságosság	3,8	4,6	3,94	4,05

Kimeneti mérés eredményei

Kísérleti csoport	Általános elvárások	Reál tárgyak	Humán tárgyak	Matematika
Státusz	3,25	2,75	3,5	2,96
Bizonyosság	5	3,46	3,08	4
Önállóság	4,83	3,33	3,58	3,71
Kapcsolódás	3,74	3,08	3,41	3,25
Igazságosság	4,46	3,92	4,54	3,92

Kontroll csoport	Általános elvárások	Reál tárgyak	Humán tárgyak	Matematika
Státusz	2,78	3,39	4,06	2,94
Bizonyosság	4,39	3,94	4,33	4,17
Önállóság	3,72	4,39	4	3,94
Kapcsolódás	3,89	3,45	4,33	3,17
Igazságosság	4,39	3,94	4,06	4,22

A bemeneti és kimeneti mérések eredményei

Az elköteleződésről szóló kérdőív eredményei alapján megállapítható, hogy mind a kísérleti, mind a kontrollcsoport tanulóinál a legfőbb általános elvárás a biztonság érzése. Ez azt jelenti, hogy számukra kiemelten fontos egy biztonságos környezet biztosítása. Váratlan helyzetek általuk is nehezen kezelhetők, és aggodalommal töltik el őket. Minél kiszámíthatóbb a környezetük, annál jobban teljesítenek, beleértve ebbe a tanári elvárásokat és a tantárgyi követelményeket is. A kísérleti csoportban a kísérlet hatására nőtt a bizonyosság érzése az általános elvárások és a matematika terén, ugyanakkor a reál és humán tárgyak esetében csökkent. Ez arra utalhat, hogy összefüggés van a matematikaórákon tapasztalt kiszámíthatósággal járó biztonságérzet és az iskolában általánosságban elvárt biztonságérzet között. A kontrollcsoportnál az általános elvárások és a humán tárgyak területén tapasztalható növekedés, míg a reál tárgyak és a matematika terén csökkenés figyelhető meg.

Az igazságosság tekintetében a kísérleti csoportban az általános elvárásoknál csökkenés tapasztalható, ami valószínűleg összefüggésben áll a humán tantárgyakon elért eredményekkel. Ugyanakkor a humán tárgyak és matematika tantárgy esetében növekedés figyelhető meg. Ez arra enged következtetni, hogy a játékosítás során a tanulók úgy érezték, hogy igazságosan és méltányosan kezelik őket. Az elvárások, szabályok és célok számukra világosak és egyértelműek voltak. A kontrollcsoport esetében mind a matematika órákon, mind a humán tárgyak óráin növekedett az igazságosság érzése, így nem meglepő, hogy az általános elvárásaiknál is növekedés tapasztalható.

A kapcsolódás érzésében a kísérleti csoportban az általános elvárásoknál csökkenés figyelhető meg, amely azt jelenti, hogy a diákok a társas kapcsolataik terén visszaesést éltek meg. Mind a humán mind a reális tárgyakon csökkentek a kapcsolódáshoz tartozó értékek, ezzel ellentétben a matematika terén növekedés mutatható ki. A csoport tagjai a változatos munkaformák során új kapcsolatokat kötöttek, melyek jó hatással voltak a csoportdinamikára és a csoport tagjai közelebb kerültek egymáshoz. Eközben a kontrollcsoport eredményei mind a 4 kategóriában csökkentek.

A kísérleti csoportban a matematika órákon az önállóság érzése növekedett a legjelentősebben. A játékosítás során több olyan feladat is megjelent, ahol döntési pozíciókba kerültek. Ez általában pozitív hatást váltott ki, mivel minden tanuló a saját képességeinek megfelelő feladatokkal dolgozhatott, vagy dönthetett egy jutalom felhasználásáról.

Ugyanakkor fontos figyelmet fordítani arra hosszú távon, hogy ez az önállóság ne korlátozza őket abban, hogy kihozzák magukból a legjobbat és feszegethessék a határaikat. Érdekes módon a kontrollcsoportban az önállóság nőtt a szaktárgyakban, ugyanakkor az általános elvárások szintjén csökkent.

A kísérleti csoportban a legkevésbé fontos dimenzió a státusz volt, mind a bemeneti mind a kimeneti mérésen. a két vizsgált csoportnál. Az eltelt 5 hét alatt a kísérleti csoportnál csökkentek az értékek mind a négy kategóriában.

1.4.2. Kvalitatív elemzés

A kvantitatív értékelés mellett szeretném a folyamatot kvalitatív megközelítésben is vizsgálni, a folyamatok és jelenségek mélyebb megértésének érdekében. A kísérlet során állandó figyelemmel kísértük a tanulók fejlődését egyéni és csoportos szinten egyaránt. A kurzus befejeztével félig strukturált interjút készítettem a diákokkal, amely három fő kérdést tartalmazott.

- Melyik volt az a tevékenység, ami a legjobban tetszett neked az elmúlt 5 hét folyamán?
- Melyik volt az a tevékenység, ami a legkevésbé tetszett neked az elmúlt 5 hét folyamán?
- Milyen tevékenységet építenél még be szívesen a matematika órákba?

Az alábbiakban diákonként összefoglalom tapasztalataimat és észrevételeimet a diákok attitűdjének és szaktárgyi tudásának fejlődéséről. A résztvevők neveit személyiségvédelmi okok miatt megváltoztattam.

Virág: A kísérleti csoportban Virágnál történt a kitöltött szorongás és attitűd teszt alapján a legnagyobb változás. Nőtt a hozzáállása és a szorongása is jelentősen csökkent az eltelt 5 hét alatt, valamint a teljesítménye is javult a bemeneti és kimeneti dolgozat alapján. Örömmel vette az olyan feladatokat, ahol közösen dolgozhattak és segítséget kapott a társaitól. A felfedező típusú diákok közé tartozott, leginkább az elrejtett meglepetések és a közös felfedezések aktivizálták.

Büszkeséggel töltötte el, egy feladat megoldásának ismertetésekor plusz pontot kapott. Esetében eddig még sosem történt olyan, hogy elég bátorsága lett volna az osztály előtt szerepelni. A csoportban perifériáján való elhelyezkedését jó irányba mozdította el a kurzus, olyan személyekkel is együttműködött, akikkel eddig még kommunikálni sem akart.

Béla: Béla autizmus spektrumzavarral élő gyermek, így sajátos nevelési igényekkel rendelkezik. Szociális képességeiben gyenge, nehezen alakít ki kapcsolatokat. Nehezen tűri a változásokat és az interjú során meg is fogalmazta, hogy nincs szüksége játékos elemekre. Az attitűd tesztje alapján ő a csoportban a legmotiválatlanabb, mely a kurzus végére nem változott. A szorongása csökkent, ami főként az önálló döntéshozatali lehetőségeknek volt köszönhető. Az általános iskolából olyan megbélyegzéssel érkezett, hogy ő nem tudja a matematikát. Ennek köszönhetően csakis a legegyszerűbb feladatokat hajtotta végre. Hiába érték sikerélmények az egyszerű feladatok megoldása során, nem volt motivált saját határainak átlépésében. Autonómiakeresőként akkor érezte magát a legkomfortosabban, amikor egy már lejegyzetelt megoldásmenetet kellett alkalmaznia önálló munka során.

Valentina: Valentina a második félévtől a szakértői bizottság véleménye alapján tantárgyi értékelés alól felmentést kapott. A képességeinek hiányát szorgalmával és kitartásával kompenzálta az előző félévig. Az öt hét alatt a tesztek alapján sem az attitűdje, sem a szorongása nem változott jelentős mértékben. A házi feladatok megoldásának hiányából észleltem a lelkesedésének a csökkenését, de a próbadolgozatot maradéktalanul, kevés hibával töltötte ki. A próbadolgozat otthoni kitöltését és a pontrendszert jelölte meg, beépítendő elemként a matematika órákra. A pontrendszer által kialakított ranglistát folyamatosan követte, minél jobban akart teljesíteni az órai munkájával. A megszerzett tudását szívesen megosztotta azokkal a diákokkal, akik ezt igényelték. A felmentett tanulók szívesen fordultak hozzá segítségért. A nehezebb feladatok megoldásának képtelensége feszültséget okozott neki, és szívesen mellőzte volna a feladatsorok ezen részeit.

Edvárd: Edvárd a szaktárgyi értékelés alól felmentett tanulók közé tartozik. Aktivizálni a tanóra keretein belül a csoportos, páros feladatok során lehet a leginkább. A legjobban az tetszett neki, amikor értékelhette osztálytársát a páros feladat során,

és pontot adományozhatott a segítségért cserébe. Pozitívan értékelte, hogy sok változatos tevékenység jelent meg az órákon, főként azok amik nem igényeltek nagy szaktárgyi tudást. Ilyen volt például a húsvéti tojás szó kirakása vagy a Bash nevű kockajáték. A feladatok megoldásával megpróbálkozik abban az esetben, ha van előzetesen egy kidolgozott megoldásmenet vagy valaki segítségére van a feladatmegoldás során.

Lara: Lara az attitűdtesztek alapján Béla után a legkevésbé motivált. Beilleszkedési zavarokkal és mentális problémákkal küzd. Nagyon nehezen viseli társas interakciókat. Ennek ellenére a gyógypedagógus tanácsára Edvárdal párban remekül dolgoztak. A feladatok során meglepő módon könnyen együttműködtek és kölcsönösen sikeresnek értékelték a közös munkát. A szaktárgyi tudása csoportban a legkiemelkedőbb, a dolgozatok során mindig a legkiválóbbak közt teljesít.

Benett: Benett a második félévben csatlakozott a csoporthoz. Beilleszkedési zavarai indokolták a csoportváltást. Az előző csoportban a periférián helyezkedett el és sok kudarcélmény érte szociális és tanulmányi szinten egyaránt. A tesztek alapján a szorongása nem változott a hozzáállása azonban kis mértékben növekedett. A páros és csoportos feladatoknál félénken viselkedett az önálló feladatokban biztonságban érezte magát. A feladatok nagy százalékáról pozitívan nyilatkozott, a leginkább az értékelte, ha az óra monotonitását egy meglepő mozzanat szakította meg. A legkedveltebb tevékenysége a szabaduló szobás házi feladat volt. Büszkén mesélte, hogy első kitöltésre sikerült a tanúsítványt megszereznie. A tevékenységek nagy részénél a teljesítők személyiségjegyei voltak megfigyelhetőek nála.

Nárcisz: Nárcisz a felfedező csoportjába tartozik. Minden feladatot igyekszik alaposan felmérni a szabályokat különös részletességgel igyekszik megismerni. Művészi beállítottsága miatt a tevékenységek során kiemelten fontos számára a felületek, kiosztott feladatok fizikai megnyilvánulása. Kíváncsisággal figyel és tanulmányozza ezeket. A QR kódos feladatnál az elsők között volt, akik megnyitották az elrejtett képet. A próbadolgozathoz hasonló érdeklődéssel állt. Elmondása szerint a próbadolgozat kitöltése megnyugvást adott számára, hiszen tudta, hogy milyen típusú feladatokra számíthat. A hozzáállása az attitűd teszt alapján jelentősen csökkent. Ez annak köszönhető, hogy teljesítménye és szorongása miatt a gyógy-

pedagógussal egyetértésben szakértői vizsgálatra küldtük. A témakör végén a dolgozat értékelése során megfigyelhető volt, hogy a kimeneti tesztje rosszabb eredménnyel zárult, mint a bemeneti.

Etelka: Etelka az hozzáállása és szorongása is párhuzamosan azonos mértékben nőtt. Az órán jelentkező versenyhelyzetek egyszerre motiválták és szorongással is töltötték el. A csoportban a szaktárgyi tudása alapján a legkiválóbbak közé tartozik, ezt a státuszát mindenáron meg akarta tartani. A leginkább a versenyhelyzetet teremtő feladatokat élvezte, a leginkább kedvelt tevékenysége a Kahoot-kvíz. Ezt jelölte meg a matematika órába rendszeresen beépíthető tevékenységként. A versengők csoportjába tartozik, ennek ellenére a páros és csoportos feladatoknál nagyon együttműködő, ha nem érzi annak a lehetőségét, hogy ő személyesen alulmaradhat. Szívesen segít az olyan tanulóknak, akik az értékelés alól fel vannak mentve.

Hanna: Hanna kifejezetten nehezen élte meg a játékosítás folyamatát. Az öt hét alatt csökkent a motivációja és nőtt a szorongása. A szaktárgyi értékelés alól felmentést élvez, így a próbálkozásom az órai munkának a bevonására sikertelenek voltak. A dolgozatokat során a feladatlapokat üresen adta be és az interjú során is szűkszavúan és érdektelenül válaszolt.

Marcell: Marcell a csoportban a legjobb szaktárgyi eredményekkel rendelkezik. Nem meglepő, hogy a szorongás teszt eredménye alapján a nála mért érték a csoport átlagos szorongásának felével egyezik meg. Az autonómiakeresők csoportjába tartozik, feladatait önállóan szereti végezni. A feladatmegoldások során érdekli, hogyan lehet a feladatokat más módon, lehetőleg egyszerűbben megoldani. A kihívásokat pozitívan értékeli. A legkedveltebb tevékenységeként a feloldható tartalmakat jelölte meg. A csoportos feladatokban azonban zavarja a többi tanuló jelenléte, ilyenkor háttérbe vonul és saját maga önállóan próbálja megoldani a feladatokat. A Bash nevű kockajátéknál azonban teljesen megváltozott az attitűdje. A játékot nagyon komolyan vette és csakis a győzelem érdekelte.

Kitti: Kitti a szaktárgyi értékelés alól felmentést élvez. Besorolása a játékos típusokba Hannához hasonlóan nehézkes. A tanórákon nehezen motiválható. A hozzáállása az attitűd tesztek alapján csökkent. Nehezen viseli a tanulói aktivitást igénylő

tevékenységeket, de a páros és csoportos feladatokban részt vesz annak érdekében, hogy a többieket ne hátráltassa.

Dóra: Dóra a szaktárgyi értékelés alól felmentést élvez. A tanórákon a teljesítménye hullámzó. Az általa kedvelt tevékenységeknél aktív, de a tanórák nagy részén passzívan viselkedik. A szaktárgyi tudást nem igénylő tevékenységek során a versengők típusába sorolható. A Kahoot kvízt emelte ki, mint legkedveltebb tevékenység. A szerencsének köszönhetően a játék végén a tabella elején végzett, melynek sikere meghatározta a hozzáállását a tanóra további részében. Az átlagostól jelentősen nagyobb koncentrációt mutatott. A húsvéti tojás szó kirakását versenyként élte meg, igyekezett minél hamarabb megoldani a feladatot. A kimeneti dolgozat során meglepetést okozott azzal, hogy megpróbálkozott a feladatok megoldásával, és ezekért pontokat is szerzett. Az eddigiekben a feladatlapokat mindig kitöltetlenül adta be.

Összességében elmondható, hogy a csoport összteljesítménye javult az attitűd és szorongás teszt eredménye alapján is. A hozzáállásuk ugyan csak kissé javult, de többségében a tanulók aktivitása emelkedett mind a tanórákon, mind a házi feladatok megoldásánál. A játékosítás időtartama alatt több tanuló is kiemelkedett, átlépve saját korlátaikat. A pozitív megerősítésre még nagyobb hangsúlyt fektettem a kurzus során, és a játékosított elemek segítségével reálisan értékelhettük a tanulók teljesítményét. ez különösen fontos, hiszen számos tanuló érkezik azzal a megbélyegzéssel az általános iskolai éveiből, hogy ő nem ért a matematikához. Ezek a tapasztalatok már mélyen beépültek a gimnáziumi éveikre, és nehéz ezekből kilépni számukra. Emellett olyan nem szaktárgyi elemek is bekerültek, amelyek különösen a szaktárgyi értékelés alól felmentett diákoknál játszottak fontos szerepet. Az általános sikerélmény pedig új lendületet adott a további munkának. Ezzel szemben a kontrollcsoport hozzáállása összességében az eltelt 5 hét alatt csökkent. A szorongás tekintetében észleltünk különbségeket a kísérleti és kontrollcsoportok között, hiszen a kísérleti csoport kezdetben magasabb szinten állt a szorongás tekintetében. Azonban mindkét csoport esetében a kísérlet során hasonló mértékű csökkenést tapasztaltunk a szorongás terén. Fontos azonban megjegyezni, hogy a kontrollcsoport esetében a szorongás csökkenése párhuzamos volt a hozzáállás csökkenésével, ami azt sugallja, hogy általánosságban csökkent az érdeklődésük a matematika iránt. A kísér-

leti csoportban fejlesztésre kötelezett tanulók közül többen pozitívan nyilatkoztak a gyógypedagógusnak az eltelt időszakról. Továbbá a legmagasabb szorongási szinttel rendelkező 4 tanuló mindegyikénél csökkent a szorongás mértéke. Az írásbeli dolgozatok eredményei alapján megfigyelhető, hogy a kontrollcsoport tagjai hasonló tudásszintet mutattak mind a be-, mind a kimeneti tesztek során. Viszont a kísérleti csoport esetében javulást tapasztaltunk a kimeneti teszten. Örömmel állapíthatom meg, hogy a kísérleti csoport tagjai közül csak egy tanuló adott be üres dolgozatot a kimeneti mérésen, míg a bevezető mérésen három tanulóról volt szó.

1.5. Összefoglalás

Egy budapesti Montessori általános iskola és gimnáziumban végeztem egy középiskolai módszertani kísérletet. A gimnázium 10. évfolyamának egy csoportján matematika órákon alkalmaztam egy speciális módszert: a játékosítást. A kísérlet célja az volt, hogy megvizsgáljam ennek a módszernek a hatékonyságát a tananyag átadásában és elsajátításában. A kísérlet során öt hétig figyeltem meg a diákok attitűdjének, szorongásának, elköteleződésének és szaktárgyi tudásának fejlődését. Ezeket az eredményeket összevettem a 10. évfolyam egy másik csoportjával. Az eredmények elemzése során megfigyeltem, hogy a játékosítás alkalmazása pozitív hatással volt a diákokra. A statisztikai elemzés nem mutatott szignifikáns változást a tanulók kis létszáma miatt a kitöltött attitűd és szorongás tesztek, valamint be- és kimeneti dolgozatok eredményei alapján. Viszont a kitöltött elköteleződési kérdőívek eredményei alapján megfigyelhető, hogy a csoport a SCARF-modell 5 dimenziója közül 4-ben (bizonyosság, önállóság, kapcsolódás, igazságosság) fejlődött. Ez segítette megérteni a diákok igényeit és bizonyította, hogy a kezelés hatásos volt a kísérleti csoporton.

A kvalitatív elemzés mélyebb betekintést nyújtott a csoportban zajló folyamatokba. A tanulókat személyenként értékeltem, különös figyelmet fordítva a játékosítás során megfigyelhető személyiségtípusokra. Az 5 felsorolt játékosítástípus (teljesítők, versengők, csapatjátékosok, felfedezők, autonómiakeresők) mindegyike más játékelemekkel motiválható, így az egyes tevékenységeket úgy alakítottuk, hogy több típusnak is megfeleljenek. A játékos elemek lehetőséget teremtettek a diákok számára, hogy kilépjenek a komfortzónájukból. Az elmúlt 5 hét során a diákok sokféle élményt tapasztaltak, de összességében a

teljesítményük és a félig strukturált interjúk során elmondottak alapján pozitív hatással volt rájuk a játékosítás.

Általánosságban úgy gondolom, hogy érdemes volt alkalmazni a játékosítás módszerét, hiszen kimutatható volt a szorongás csökkenése és a hozzáállás növekedése. Ugyanakkor fontosnak tartom megjegyezni, hogy az intézmény speciális környezetet biztosított a módszer alkalmazására. Ez tehát nem egy univerzális módszer, mely minden csoportra alkalmazható. A játékosított tevékenységek tervezésekor fontos figyelembe venni az adott csoport igényeit, és ehhez alkalmazkodni, akár a kurzus folyamán is.

Az iskola integráló jellege miatt csoportomban több olyan tanuló is volt, akik saját nevelésű igényekkel vagy beilleszkedési, tanulási és magatartási nehézségekkel küzdenek. Ezeknek a tanulóknak a jelenléte további kihívásokat jelentett a csoport motiválása szempontjából. A differenciálás elengedhetetlen, de figyelmet kell fordítani arra is, hogy a tantárgyi követelményeket fenntartsuk, és minden tanuló képes legyen fejlődni. Ahogyan az elköteleződésről szóló kérdőívből is kitűnik, ezeknek a gyerekeknek a legfontosabb a biztonságos környezet kialakítása. A váratlan helyzeteket és újdonságokat félve és kételkedve fogadják.

Személyes véleményem szerint a játékosítás módszere rendkívül hatékony lehet a diákok szorongásának csökkentésében és motiválásában, feltéve, hogy fokozatosan építjük be a mindennapokba. A játékosított elemek beépítése azonban komoly tervezést igényel. Nem minden tananyag alkalmas a játékosításra, és a játékos elemek túlzott használata éppen ellenkező hatást érhet el, csökkentve a diákok motivációját. Emellett fontos megjegyezni, hogy időnként vissza kell térni a játékosított elemekhez, hogy fenntartsuk a diákok kísérlet alatt megnövekedett motivációját.

2. fejezet

Matematika rész

A következő részben dr. Pintéerné Tóth Rebeka Egy Arany Dániel feladat utóélete című szakdolgozatában feltüntetett problémára keresem a választ. A kiinduló Arany Dániel Tanulóverseny feladatának szövege:

1. Feladat. *Egy szabályos sokszög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy -1 -et írunk. Egy „lépésben” bármely három egymást követő csúcshoz írt szám előjelét az ellenkezőjére változtatjuk. (Például az $1; 1; -1$ hármast a $-1; -1; 1$ hármásra cserélhetjük.)*

a) *Elérhető-e ilyen „lépésekkel” tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokhoz írt 100 szám összege 0 legyen?*

b) *Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?*

Rebeka dolgozatában ismertette ennek a feladatnak a hivatalos megoldását, majd készített egy a középiskolások által könnyebben feldolgozható feladatot, melyet 11. és 12. osztályosok számára fakultáció során ki adott. Megadott egy kiinduló helyzetet és a $-1, 1$ jelölést egy korong piros és kék oldalának feleltette meg. A középiskolásoknak kiadott feladat szövege a következő:

2. Feladat. *100 korongot lehelyezünk egymás mellé egy körben. Minden korongnak 2 oldala van, egy piros és egy kék. Minden lépésünkben megfordítunk 3 egymás melletti korongot, ezzel megváltoztatva a színüket. (Tehát ha egy piros, piros, kék hármast fordítunk meg, abból egy kék, kék, piros hármassá lesz.) Legyen az a kiindulási helyzet, hogy mind a 100 korongunknak a piros oldala van felül.*

a) *Elérhető-e a megengedett lépéseinkkel, hogy 1 kivételével minden korongnak a piros fele legyen felül?*

b) *Elérhető-e a megengedett lépéseinkkel, hogy minden korongnak a kék fele legyen felül?*

Az eredeti feladat megoldása során a diákoknak azt a specifikus ötletet kell felhasználniuk, hogy először rövidebb ciklusokra bontva tudják az adott feltételt teljesíteni, majd ezeket a lépéseket ismételve a kitűzött feladat megoldása már magától adódik.

Ennek az általános leírásához Rebeka a lineáris algebra eszközeit használta, melynek összes algebrai kifejezését és definícióját a Kis Emil Bevezetés az Algebrába (Kiss, 2007) és Freud Róbert Lineáris Algebra (Freud, 2006) című könyveiből használta. A továbbiakban én is ezt használom. A különböző állapotokat 100 hosszú oszlopvektoroknak feleltette meg, melynek koordinátáit –a korongok két különböző színű oldala miatt– \mathbb{Z}_2 -ben volt érdemes felírni. Így a piros színt 0-val, míg a kék színt 1-essel feleltette meg. Tehát a \mathbb{Z}_2^{100} vektortér összes vektora megadja az összes felírható állapotot. Átforgatásvektornak fogja nevezni azokat a vektorokat, melynek három egymás alatt álló koordinátája 1-es, míg a többi 97 nulla. Ez azért volt szükséges, mert egy korong megforgatása, –tehát az, hogy pirosból kék vagy kékből piros legyen– a vektorok nyelvén a következőt jelenti: ha 0-hoz 1-et adok, akkor 1-et kapok, ha 1-hez 1-et adok, akkor pedig 0-át kapok, így változik a „színük”. Ha azonban a 0-hoz 0-át adok vagy 1-hez 0-át az az összegvektorban nem változtatja meg az eredeti állapotvektorban szereplő koordinátát, így a korong „színe” nem változik. Mivel a kitűzött feladatban kör alakban helyezkedtek el a korongok, így ezt mesterségesen el kellett vágni. Így keletkeztek olyan átforgatásvektorok is, amelyekben nem egymás alatt helyezkedett el a három 1-es koordináta, hanem az 1, 99, 100, illetve a 1, 2, 100 koordináták helyén.

A feladat megoldása és ellenőrzése után, adódik az igény, hogy számtalan ehhez hasonló feladat gyártható a feltételek megváltoztatásával különböző nehézségi szinteken. A lehetséges módosításoknál Rebeka vizsgálta, hogy mi történik akkor, ha $3k + 1$ alakú, $3k$ vagy $3k + 2$ alakú számokat ad meg a korongok darabszámaként a feladatokban. Megoldásait középiskolai és egyetemi szinten is végigvezette. Az egyszerűbb követhetőség kedvéért az $n \equiv 0 \pmod{3}$ eset vektorteres megoldását $n = 6$ korong esetén vezette végig a Gauss-elimináció módszerével. Mivel az ott bemutatott módszer körülményes 100, 101, vagy 102 hosszú vektor esetén, így egy új módszert vezetett be, aminek a alapja a

merőleges altér keresése.

Az átforgatásvektoraink által generált altér merőlegesét keressük. Ez az altér azokból a vektorokból áll, amelyekre igaz, hogy ha az átforgatásvektorok által generált altér bármelyik vektorával vett skalárszorzata 0. Tehát az állapot előállításának eldöntéséhez meg kell vizsgálni, hogy a lehetséges vektorok merőlegesek-e erre a merőleges altérre. Ráadásul egy bázis megkeresése ezen merőleges altérnek elegendő, mert ha egy vektor merőleges minden bázisvektorra, akkor az összes vektorra merőleges lesz az altérben, és pontosan ezek a vektorok tartoznak bele.

Az átforgatásvektorok által generált altér merőlegesével azt is megállapíthatjuk, hogy a lehetséges állapotok közül ténylegesen mennyi áll elő az átforgatásvektorok lineáris kombinációjaként. Ezt pedig úgy tudjuk megadni, hogy felhasználjuk azt a tudást, hogy egy V vektortér esetén, ahol $U \subseteq V$ egy altér, akkor fennáll a következő összefüggés:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

Rebeka szakdolgozatában általánosította a feladatot páratlan n esetére. A páros n esetére kitért, de nem adott általános megoldási módszert.

A következőkben vizsgálom a problémát páros n esetére általánosságban és egy konkrét példa ismertetésével szemléltetem megoldásmenetemet.

Nézzük meg először az $n = 6, k = 4$ esetet. Rendezzük ezeket egy mátrixba a könnyebb kezelhetőség érdekében. Ezek a sorvektorok legyenek a forgatásvektorok, amelynek legyenek e_1, e_2, \dots, e_6 vektorok:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Legyen v_i az a vektor, amely két átforgatásvektor különbsége, azaz legyen $v_1 = e_2 - e_1$. Általánosan $v_i = e_{i+1} - e_i$. Az indexeket modulo 6 értjük, $v_6 = e_1 - e_6$. Ha elvégeztük a kivonásokat az alábbi mátrixot kapjuk, melynek sorai v_1, v_2, \dots, v_6 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Könnyű látni, hogy az e_i vektorok előállíthatóak e_1 és a v_i vektorok segítségével. Például $e_2 = e_1 + v_1$, $e_3 = e_2 + v_2$. Tehát megállapítható, hogy az e_i -k által generált altér és az e_1 és a v_i vektorok által generált alterek megegyeznek, azaz

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \langle e_1, v_1, \dots, v_n \rangle$$

Ha ugyanezt elvégezzük a $n = 6, k = 2$ esetre akkor az elforgatásvektorokból előállítható kiinduló mátrix, tehát az e_1, e_2, \dots, e_6 vektorok:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A szomszédos e_i vektorok különbségvektorai, tehát a $v_1, v_2 \dots v_6$ vektorok:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Észre lehet venni, hogy az $n = 6, k = 4$ és az $n = 6, k = 2$ esetekben a v_i vektorok által generált alterek megegyeznek. Rebeka dolgozatában látható az is, hogy a v_i vektorok

segítségével létrehozhatók, azok a vektorok amelynek koordinátában az i -edik és a $i + (n, k)$ -adik koordináta 1, a többi 0. Például az $n = 6, k = 4$ esetben, ha összeadjuk Határozzuk most meg a v_1, v_2, \dots, v_6 által generált mátrix rangját. Látható az $n = 6, k = 2$ esetben a v_i -k által generált mátrixban, ez első négy sorban elhelyezkedő vektorok lineárisan függetlenek, mert az egyesek különböző oszlopokban kezdődnek. Míg v_5 és v_6 vektorok megkaphatóak az őket megelőző vektorok lineáris kombinációjaként $v_5 = v_1 + v_3, v_6 = v_2 + v_4$. Ez azt jelenti, hogy a mátrix rangja 4. Ez a rang megegyezik $n = 6, k = 4$ esetében, hiszen a látható, hogy a két mátrix sorai megegyeznek, csupán a sorok sorrendjében különböznek.

Nézzük meg az általános esetet, amikor n hosszú vektoraink vannak és k szomszédos 1-es koordináta szerepel bennük. Először is képezzük $e_1, e_2 \dots e_n$ vektorokból álló mátrixot. Az e_i vektorok segítségével állítsuk elő v_i vektorokat –hasonlóan, mint 6 korongnál– a szomszédos e_i vektorok különbségeként. Az így keletkező vektorok koordinátái az i -edik és az $i + k$ -adik helyen 1-esek, míg a többi helyen 0-k. Az előzőekhez hasonlóan könnyű látni, hogy az e_i vektorok az e_1 és v_i vektorok segítségével előállíthatóak. Így látható, hogy

$$\langle e_1, e_2 \dots e_n \rangle = \langle e_1, v_1, \dots, v_n \rangle$$

Legyen w_i az a vektorok azok, amelynek i -edik és $i + (n, k)$ koordinátája 1, a többi pedig 0. Könnyen látható, és Rebeka dolgozatában is szerepel, hogy a w_i vektorok segítségével kifejezhetőek a v_i vektorok és a v_i vektorok segítségével kifejezhetőek a w_i vektorok.

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle w_1, w_2 \dots w_n \rangle$$

Ez azt jelenti, hogy a w_i és a v_i vektorok ugyanazt az alteret generálják.

Ezt követően határozzuk meg v_1, v_2, \dots, v_n által képzett mátrix rangját. Ugyanúgy, ahogy az $n = 6, k = 4$ esetben látható, hogy a keresett rang az $n - (n, k)$ vagyis:

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = n - (n, k)$$

Ugyanis addig míg az első 1-es koordináták a főátlóban lesznek ezek a vektorok egymástól függetlenek lesznek. Amikor az átforgatás mátrix elejére átcsúszik az 1-es koordináta, azok a vektorok előállnak az őket megelőző független vektorok összegeként.

$$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle = \langle e_1, v_1, \dots, v_n \rangle$$

Ebből az következik, hogy az $\langle e_1, v_1, \dots, v_n \rangle$ dimenziója pontosan akkor lesz $n - (n, k)$, ha e_1 eleme lesz a v_i vektorok generátumának. Ha e_1 nem eleme a v_i vektorok generátumának, akkor a dimenzió eggyel növekszik, tehát $n - (n, k) + 1$.

Meg kell vizsgálnunk tehát, hogy e_1 benne van-e a v_i vektorok által generált altérben. Vegyük a következő vektorösszeget,

$$\sum_1^{(n,k)} v_i = \{1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0\}$$

Ebben az esetben olyan vektort kapok, melyeknek első $2 \cdot (n, k)$ darab koordinátája 1-es, míg a többi 0. Ha ez a $2 \cdot (n, k)$ szorzat osztója k -nak akkor e_1 eleme a v_i vektorok generátumának, vagyis

$$\dim\langle e_1, v_1, \dots, v_n \rangle = \dim\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = n - (n, k)$$

Most megmutatjuk, hogy ha k páratlan többszöröse n és k legnagyobb közös osztójának, akkor e_1 nem eleme a v_i vektorok generátumának, akkor a dimenzió eggyel növekszik, vagyis:

$$\dim\langle e_1, v_1, \dots, v_n \rangle = n - (n, k) + 1$$

Ennek bizonyításához elég mutatunk egy olyan vektort, amely merőleges az összes v_i -re, de nem merőleges e_1 -re, vagyis az e_1 -gyel vett skalárszorzata nem 0. Ekkor e két merőleges nem ugyanaz. Ha kevesebb vektor van a merőleges nagyobb.

$$\langle e_1, v_1, \dots, v_n \rangle^\perp < \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle^\perp$$

Felhasználva a következő alterekre vonatkozó összefüggést:

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$

$$\dim\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = n - (n, k) < \dim\langle e_1, v_1, \dots, v_n \rangle = n - (n, k) + 1$$

Nézzük meg ezt a kiinduló feladatra. Legyen ekkor s vektor az a 6 hosszú vektor melynek első, harmadik és ötödik koordinátája 1, míg a többi 0.

1. $n = 6, k = 4$ esetén:

$e_1 = (1,1,1,1,0,0)$, $s = (1,0,1,0,1,0)$ skaláris szorzatuk a szokásos módon:

$$\langle e_1, s \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2 \qquad 2 \equiv 0 \qquad \text{mod}2$$

2. $n = 6, k = 2$ esetén:

$e_1 = (1,1,0,0,0,0)$, $s = (1,0,1,0,1,0)$ skaláris szorzatuk a szokásos módon:

$$\langle e_1, s \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \qquad 1 \equiv 1 \qquad \text{mod}2$$

Látjuk, hogy a merőlegesek dimenziója nem egyezik meg vagyis:

1. $n = 6, k = 4$ esetén:

$$\dim \langle e_1, v_1, \dots, v_6 \rangle = 4$$

2. $n = 6, k = 2$ esetén:

$$\dim \langle e_1, v_1, \dots, v_6 \rangle = 5$$

Az előző eset leírása is sugallja az általános esetben használandó megfelelő vektor leírását. Legyen

$$s = (1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1)$$

Ahol az első $1 + (n, k)$ -adik, a $1 + 2 \cdot (n, k)$ -adik ... koordináta 1, a többi 0.

Irodalomjegyzék

- [1] Csíkszentmihályi Mihály, *Flow: The Psychology of Optimal Experience*, New York, Harper Collins, 1991
- [2] Csíkszentmihályi Mihály, *Beyond Boredom and Anxiety: The experience of play in Work and Games*, San Francisco, Jossey-Bass, 1985
- [3] Csíkszentmihályi Mihály, *Kreativitás, a flow és felfedezés, avagy a találékonyság pszichológiája*, Budapest, Akadémiai kiadó, 2021
- [4] Dehaene, Stanislas *The number sense: How the mind creates mathematics*, Oxford, The Oxford University Press, 1997
- [5] Dr. Pintéerné Tóth Rebeka, *Egy Arany Dániel Feladat Utóélete*, ELTE TTK szakdolgozat, 2023
- [6] Freud Róbert, *Lineáris Algebra*, Budapest, ELTE Eötvös Kiadó, 2006
- [7] Huotari Kai, Hamari Juho *A definition for gamification: anchoring gamification in the service marketing literature*, *Electronic markets*, 2016
- [8] Kiss Emil, *Bevezetés az algebrába*, Budapest, Typotex eKiadó, 2007
- [9] N. Kollár Katalin, Szabó Éva (szerk.), *Pedagógusok pszichológiai kézikönyve III.*, Budapest, Osiris Kiadó, 2017
- [10] Rock David, *Scarf: a brain-based model for collaborating with and influencing others*, *NeuroLeadership Journal*, 2008
- [11] Szenderák Júlia, Szörényi Sára *A játékosításban rejlő lehetőségek a közoktatásban: miért, mikor, hogyan?*, OTDK dolgozat, 2023

- [12] Szörényi Sára, *Akarsz-e játékosítani mindent, mi számelmélet?*, *ELTE TTK szakdolgozat*, 2023
- [13] Xiao Ya, Hew Khe Foon, *Personalised gamification enhances student participation but produces mixed effects on emotional and cognitive engagements: a systematic review*, *Interactive Learning Environments*, 2023