EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKA DOKTORI ISKOLA, DIDAKTIKA PROGRAM

A HOSSZÚTÁVÚ TUDÁS SZÜKSÉGES FELTÉTELEINEK VIZSGÁLATA A KOGNITÍV IDEGTUDOMÁNY EREDMÉNYEINEK TÜKRÉBEN

SZERZŐ: SZEIBERT JANKA
TÉMAVEZETŐ: DR. SZABÓ CSABA

EGYETEMI DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS
BUDAPEST, 2023.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Dolgozatomban a magyarországi középiskolás diákok geometria tudásának egy lehetséges mérését és geometria tudásának fejlesztési lehetőségeit mutatom be. Dolgozatom két publikáción alapszik, így szerkezetét tekintve is két részre oszlik. Az első részben a magyarországi középiskolások geometriai megértési szintjeit vizsgálom. A van Hiele elméletre épülő Usiskin féle teszt (1982) segítségével mértem fel budapesti és miskolci középiskolások geometriai megértési szintjeit. A mérés hátterének elméletét általánosan L. S. Vigotszkij dolgozta ki az 1910-es években (Vygotsky, 1978), majd ezen elméletnek 1957-ben Dina van Hiele-Geldof és Pierre van Hiele a geometria területén belül adott egy lehetséges értelmezést (Fuys et al., 1988). Vigotszkij elméletét követve létrehoztak egy lineáris taxonómiát a geometria témakörén belül. A taxonómia a geometriai megértési szinteket öt megértési szintbe sorolja, feltevésük szerint a szintek a geometria elsajátítása során a kezdeti szinttől (vizualizáció) minden esetben egymást követik, és eközben szint kihagyásra nincs lehetőség. Azaz egy felsőbb szint eléréséhez az összes addigi szint elérésére szükség van. Ezek a szintek párhuzamba állíthatóak a 2012-es NAT alapján a diákoktól elvárt geometria tudásnak. A szinteket változó, hogy 0-4-es, vagy 1-5-ös skálán mutatják be, mi most az utóbbi esetet választottuk a legalacsonyabb szint 0-val való jelölésének érdekében. A NAT szerint a diákok hármas szinten érkeznek a középiskolába és tizedik végére négyes szintre kerülnek. A van Hiele elmélet kommunikációs része alapján a negyedik szintet csak olyanok érhetik el, akik már elsajátították a harmadikat, és azoknak akik nem érték el a harmadik szintet, hiába tanítunk a negyedik szinten, fejlődésre nincs lehetőségük. Usiskin elkészített egy tesztet a van Hiele szintek mérésére, melyet világszerte használnak és már többször validálták az első, a második és a harmadik van Hiele szinteken (Burger & Shaughnessy, 1986; Senk, 1989; Zachos, 1995; Jones, 2002; Kospentaris & Spyrou, 2008; Erdogan & Durmus, 2009; Vojkuvkova & Haviger, 2015; Ural, 2016; Astuti et al., 2018)

Az Usiskin-féle tesztet kitöltettük öt iskolában, 342 diákkal: 109 kilencedik osztályos, 120 tizedik osztályos, 42 tizenegyedik osztályos és 71 tizenkettedik osztályos diákkal. **Eredményeik alapján a középiskolások átlaga minden évfolyamon 2,03 és 2,17 között van.** Az iskolák egyike egy zenei konzervatórium volt, a többi iskola normál tantervű, közepesen erős és erős iskola volt. A zeneiskola eredményei messze elmaradtak a többi eredménytől, míg a gimnáziumi eredmények egymáshoz hasonlóak voltak. Megállapítható tehát, hogy a középiskolás diákok átlaga még kimenetelkor sem éri el a NAT által elvárt bemeneti szintet.

Ennek okait vizsgáltuk összevetve Vigotszkij elméletét és a NAT-ot, valamint a magyarországi matematika kerettanterveket és az érettségi vizsga szintjét. **Megállapítható, hogy a NAT és a kerettanterv egybevágnak, és a végzős diákoktól mindkettő elvárja a van Hiele négyes szint elérését a diákoktól, ám az érettségi feladatok még emelt szinten sem követelik meg geometriában a négyes szintet.** Ezt a NAT és a feladatok elemzésével mutatjuk be.

A geometriai fejlődés elmaradása egyrészt összefügghet Vigotszkij elméletével, azaz a nem megfelelő kommunikációval, vagy a nem megfelelő szintfelméréssel. **A kísérletben szereplő tanárokkal folytatott beszélgetések és az érettségi feladatok elemzése alapján azt gondoljuk, hogy a fő indok az az, hogy az iskolák, tanárok és diákok közös célja a legtöbb esetben a diákok érettségire való felkészítése.** Emiatt azt az időt, amit a tananyag továbbvitelére, a gondolkodás fejlesztésére szánhatnák, inkább az érettségire való gyakorlással töltik el.

Dolgozatom második részében egy esettanulmányt mutatok be a tesztelési hatás matematika órai alkalmazásáról. Több területen is kimutatták már, hogy a megtanulandó anyag memóriából való előhívása a hosszútávú tudásnak egy alapfeltétele, azaz a tanulásnak egy hosszútávon megmutatkozó hatékony formája (Donoghue & Hattie, 2021; Roediger & Butler, 2011; Rowland, 2014). A szakirodalom be is vezette az előhívási hatás (vagy tesztelési hatás) és az előhívásos tanulás (vagy teszteléses tanulás) fogalmakat. Az előhívási hatásnak azt a jelenséget nevezzük, amikor a rövidtávú vagy a hosszútávú memóriából történő visszakeresés megváltoztatja, erősíti az egyén emlékezetét az adott visszakeresett információval kapcsolatban. Az előhívásos tanulás elnevezés az előhívást előidéző tanulási módszereket foglalja magában. Az elmúlt évtizedben számos kutatás vizsgálta az előhívásos tanulás előnyeit az újraolvasáshoz képest (Rowland, 2014; Adesope et al., 2017). Eddig viszonylag kevés számú előhívási hatást vizsgáló kísérlet született, amely nem laboratóriumi körülmények között, hanem valódi iskolákban, valós iskolai körülmények között és hosszabb távon vizsgálná az előhívási hatást (McDaniel et. al., 2007, Rawson et al., J. 2018). A teszteléses tanulás hatását a matematika oktatás alkalmazása során nagyon kevesen vizsgálták (May, 2021), ezért is érdekelt minket a kísérletek elvégzése a témában, matematika órákon. Dolgozatomban bemutatom az előhívási hatásról szerzett eddigi gyakorlati tapasztalatokat és középiskolákban, matematika órán végzett esettanulmányunk során szerzett tapasztalatainkat.

Az elvégzett esettanulmányunk újszerűségét a valós körülmények és a matematikai tartalom adják, hiszen az eddig elvégzett kísérleteket a tesztelési hatás vizsgálatára főleg laboratóriumi környezetben végezték (Butler et al. 2007), illetve a memorizálandó részek elsajátítását vizsgálták, főleg szavak tanulásánál (Roediger & Karpicke, 2006; Keresztes et al., 2014). Kérdéses, hogy a folyamatos előhívás valós iskolai környezetben, matematika órán segíti-e a hosszú távú matematika tudás létrejöttét (Buchin & Mulligan, 2019; Dunlosky et al., 2013; Lyle et al., 2020; Peterson & Wissman, 2018). Ha a válasz igen, akkor az is felmerül kérdésként, hogy milyen formában lehetne hatékonyan beépíteni az osztálytermi matematika órák menetébe. Az eddigi ismeretek alapján, ahhoz, hogy létrejöjjön az előhívási hatás, figyelembe kell vennünk a következőket: az első előhívásnak meg kell történnie 24 órán belül; a másolás és csalás nem megengedett; az óra kerete miatt nem vehet igénybe túl sok időt és a diákoknak részt kell venniük benne. Ezen kívül a teszteken szereplő kérdések formáját is figyelembe kell venni.

Magyarországon - az USA-hoz hasonlóan - matematikai teljesítménykülönbség van a magasabb jövedelmű tanulók és az alacsonyabb jövedelmű tanulók között; a magasabb jövedelmű családokból érkező diákok következetesen felülmúlják az alacsonyabb jövedelmű családokból érkezőket. Ezzel összefügg, hogy a középiskolák közötti teljesítményt illetően is óriási a szakadék: a városi gimnáziumok tanulói következetesen felülmúlják a városi szakközépiskolák tanulóit (Auguste & Miller, 2009; Bailey & Dynarski, 2011). Ennek kezelése, a különbség csökkentése mind egyénre vonatkozó, mind társadalmi és gazdasági okokból indokolt (Auguste & Miller, 2009). Kiemelt célunk az előhívási hatás alkalmazásával elérni ezen különbség csökkentését. Ezen esettanulmányunkat magyarországi középiskolákban, kilencedikes diákokkal, matematika órákon végeztük. A kísérleti csoport (N=9) egy hátrányos helyzetű szakgimnáziumi kilencedikes osztály matematika csoportja lett. Kétféle kontrollcsoportot választottunk ki a kísérleti csoport mellé: az egyik kontrollcsoport a szakgimnázium egy másik kilencedikes csoportja lett (N=23), a másik kontrollcsoport egy elit gimnázium két kilencedikes csoportjából állt (N=34). Korábban írt dolgozatok eredményei alapján megállapítottuk, hogy a kísérlet csoport és a szakgimnáziumi kontrollcsoport előzetes tudása nagyon hasonló volt. A felvételin a kísérleti csoport valamivel gyengébben szerepelt, mint szakgimnáziumi társaik.

A kísérlet során mindegyik csoport a geometriai transzformációk témakörét tanulta. Módszerünk a következő volt: minden egyes matematikaóra végén a tanulók tesztet írtak az aznap tanult anyagból. Ezek a kis emlékeztetők két feladatot tartalmaztak: egy elméleti és egy rövid, problémamegoldást tartalmazó feladatot. A diákok visszajelzést kaptak a tesztekről és az eredményeikről, és az eredmények hatással voltak az év végi jegyeikre is. Ezzel a módszerrel a diákok a tanulási fázist követően rögtön elő is hívtak tananyagrészeket, a tanár nyomon követhette a diákok aktuális előhívási-megértési szintjeit és ezen információ segítségével építhette fel a következő órát. Ezzel ez a módszer nem csupán az előhívást segíti, hanem a formatív értékelésnek is egy módja lehet.

A módszer hatását egy közös témazáró dolgozat kvantitatív és kvalitatív eredményei alapján vizsgáltuk. A három csoport előzetes tudását és a kísérlet során létrejött változást is megvizsgáltuk, és eredményeink megfeleltek várakozásainknak: **megállapítottuk, hogy a kísérleti csoport statisztikailag jobban szerepelt, mint évfolyamtársaik és a témazáró dolgozat eredményei alapján statisztikailag megkülönböztethetetlen lett az elit gimnáziumi csoportoktól.** Tehát a kísérleti csoport tanulói kimagaslóan szerepeltek szakgimáziumi társaikhoz képest és képesek voltak felzárkózni az elit gimnáziumi kontrollcsoport diákjaihoz. Ezen eredmények nem csupán a témazáró átlagát tekintve mondhatók el, hanem a különbségek feladatonként is kimutathatóak.

Azért, hogy megtudjuk, esetleg a tanári hatás okozott-e ekkora teljesítménybeli sikert, először érdekességképpen összevetettük a kísérleti csoport diákjainak eredményét a kísérleti csoport tanárnőjének egy korábbi évben tanított csoportjainak eredményeivel. Az összehasonlítást a témazáró dolgozatok hasonló feladatai alapján végeztük el és azt tapasztaltuk, hogy a kísérleti csoport itt is jobban teljesített. Ezt a vizsgálatot egy előtanulmányként fogtuk fel és elvégeztünk egy utókísérletet, melyben a tanári, a korosztályi és témaköri hatásokat szerettük volna kiszűrni. Így ezen utókísérletben a kísérleti csoport tanárnőjének két tizenkettedikes csoportja vett részt, melyek matematikai tudása, háttere azonos volt. A korábban szignifikánsan gyengébben szereplő csoportot választottuk meg a kísérleti (N=12), míg a jobb teljesítményt nyújtó csoportot a kontroll csoportnak (N=13). A kísérlet során mindkét csoport a térgeometria témakörét tanulta és a hat hét alatt két dolgozatot írtak a tanultakból. A módszer teljesen megegyezett a kilencedikeseknél alkalmazott módszerrel, azaz a kísérleti csoport végig előhívással, míg a kontrollcsoport hagyományos módon tanult tovább. A dolgozat eredményei alapján a kísérleti csoport a kísérlet végére felzárkózott a kontrollcsoport szintjére.

Eredményeink azt mutatják, hogy az előhívásos tanulási módszer eredményes: alkalmazásával nem csupán a fogalmak, definíciók tanulása lesz sikeresebb, de hozzásegíti a diákokat a problémamegoldási feladatok sikeresebb megoldásához is.

Középiskolai tanulók geometriai megértési szintjének vizsgálata

A van Hiele szintek

Munkám első fejezetében a magyar középiskolás diákok geometriai megértési szintjének mérését, annak eredményeit és az eredmények okait elemzem. A geometriai megértési szintek egy lehetséges mérése az Usiksin teszttel történik (Usiskin, 1982). A mérés hátterének elméletét általánosan L. S. Vigotszkij dolgozta ki az 1910-es években (Vygotsky, 1978), majd 1957-ben Dina van Hiele-Geldof és Pierre van Hiele a geometria területén belül adott egy lehetséges értelmezést (Fuys et al., 1988). Vigotszkij elmélete két alappilléren áll: az egyik pillér a legközelebbi fejlődési zóna elve, a másik pillér pedig a kommunikációs elmélete. A legközelebbi fejlődési zóna elvében a tanuláshoz, a fejlődéshez a kommunikáció szerepét kulcsfontosságú tényezőnek tartotta. Ezen elv szerint mindig létezik egy szint, ahová a diák magától már nem tud eljutni, viszont segítséggel, megfelelően működő interakció sorozatokkal már igen. Azt a tartományt, ahova csak segítséggel juthat el, a legközelebbi fejlődési zónának nevezzük. A diák az ezen felül elhelyezkedő zónát csak akkor érheti el, ha előbb elérte a legközelebbi fejlődési zónát. Vigotszkij úgy gondolta, hogy ha a megfelelő szociális interakciókat biztosítjuk, akkor azzal létrehozunk egy potenciális fejlődési teret, melybe a tanuló, az „újonc" képes lesz belépni és az egyéni sajátosságok alapján valamennyire előrébb lépni. A legközelebbi fejlődési zóna egy ideális szociális interakcióban keletkező zónának a nagyságát írja le, mely a tanuló aktuális és potenciális fejlődési szintjének a távolsága. Ez azt is jelenti, hogy a fejlődéshez először tanulásra van szükség, és minél ügyesebben hozzák létre az interakciót, annál hatékonyabb lehet a fejlődés mértéke. Minden tanuló más aktuális szinten helyezkedik el és a zónán kívüli tartományba a tanuló nem tud egyedül eljutni. Ez azt jelenti, hogy ha valóban fejleszteni szeretnénk a gyermekeket, elengedhetetlen a tanulók aktuális tudás- és megértési szintjeinek a figyelembe vétele. Ezzel az elvvel függ össze a kommunikációs elmélete, miszerint hogy ha valakit tanítani szeretnénk, akkor őt csak úgy tudjuk tanítani, ha arról a szintről indulunk ki, ahol ő van. Ezt úgy is át lehet fogalmazni, hogy mindenkihez csak a saját nyelvén lehet beszélni. Gondoljunk csak Piaget-nek az üveggolyós kísérletére, amikor a négyéves gyerekek mennyiségi fogalmát vizsgálta. Ahogy Stanislas Dehaee Számérzet c. könyvében is olvashatjuk (Dehaene, 2001), Piaget a kísérletéből arra következtetett, hogy a négyéves gyermekeknek még nem alakult ki mennyiség tudatuk, hiszen rosszul válaszoltak arra a kérdésre, hogy melyik sorban van több üveggolyó. A kísérletet megismételték M&M

cukorkákkal, csak a kísérlet során nem azt kérdezték, hogy melyik sorban van több cukorka, hanem a gyerekek elvehették a nekik tetsző sort. A gyerekek itt a több cukorkából álló sort vették el. Ezen újabb kísérleti eredményen fellelkesülve megismételték Piaget eredeti üveggolyós kísérletét, de most nem csak 4 éves gyerekekkel, hanem 2, 4 és 6 évesekkel. Meglepő módon azt kapták eredményül, hogy a 2 és 6 évesek a több golyóból álló sorra mutattak, míg a 4 évesek valóban a kevesebb golyóból álló sort választották ki. Nyilván nem kerülhetett sor arra, hogy 2 és 6 éves kor között mennyiségbeli érzetünk hirtelen eltűnjön, hogy utána 6 éves korunkra újra megjelenjen. További kísérletek arra engednek következtetni, hogy ha a kérdést olyan szituációban tesszük fel, amikor a 4 éves gyerekek nem fognak gyanút arra vonatkozóan, hogy esetleg félreértették a kérdést, vagy hogy direkt átverés történik, hanem egy segítő szituáció során kell megjelölniük a többet, akkor a 4 éves gyerekek is mind képesek a helyes válaszra. A kísérletből azért vonhattak le rossz következtetéseket a gyermekek mennyiségi érzetére vonatkozóan, mert nem vették figyelembe a nyelvi akadályokat, azt, hogy egészen más nyelvi szinten álló gyermekek másképpen érthetik meg a helyzeteket, a konkrét kérdéseket. Amikor sikerült megtalálni az utat a 4 éves gyerekek nyelvi szintjéhez, akkor azt azonnal megértették és jó választ adtak. Vigotszkij ezen kommunikációs elméletét ebben az esetben a tanítás szintjéről vizsgálódva fogalmaztuk meg, azaz, hogy a 4 éves gyerek nem érti meg a felnőtt kommunikációját. Az elmélet igaz a másik oldalról tekintve is, azaz hogy a felnőtt nem mindig érti meg a gyerekek kommunikációját. Az oktatásban a tanár a koordinátor és neki van felelőssége abban, hogy ismeri-e a gyerek nyelvét, hogy használja-e azt, és hogy tudja-e fejleszteni a diákot a diák saját kezdeti szintjéről. Ha a tanár azt szeretné, hogy a gyerek fejlődjön, fel kell mérnie a gyermek szintjét, és arról a szintről kell elkezdenie a tudás fejlesztését, ahol a gyerek van. Hétköznapibb szavakkal megfogalmazva, ha két ember más nyelvet beszél és egymás nyelvét nem értik, akkor nem fogják egymást megérteni. A diák nem érti a fogalmakat, az eljárásokat, az okokat, a dedukciót használó levezetéseket. Míg a tanár vagy nem tudja, hogy a diák hol tart, és nem tud neki segíteni, vagy nem képes megteremteni a megfelelő kommunikációs csatornát. A nem megfelelő kommunikáció visszavezethető például energia-, eszköz-, tudás- vagy időhiányra. Kutatásunkban megmutattuk, hogy bár a matematikai ismeretanyaghoz képest a gimnáziumi évek valóban kevésnek bizonyulnak. A NAT által elvárt fejlődés nem érhető el úgy, ha nem tudunk megfelelő fejlődési csatornákat létrehozni a diákok mindig éppen aktuális tudás és képességi szintjéhez igazodva.

A van Hiele házaspár által kidolgozott lineáris taxonómia öt szintjéből nekünk ebben a dolgozatban az első négyre lesz szükségünk. Az ötödik szint bőven túlmutat a középiskolásoktól elvárt vagy elérhető szinten. Másrészt annak létezésével kapcsolatban már többen is megfogalmazták kételyeiket (Wilson, 1990; Usiskin & Senk, 1990), ezért ezzel a szinttel ebben a dolgozatban egyáltalán nem foglalkozunk. A taxonómia a geometriai megértési szinteket öt megértési szintbe sorolja, feltevésük szerint a szintek a geometria elsajátítása során a kezdeti szinttől (vizualizáció) minden esetben egymást követik és eközben szint kihagyásra nincs lehetőség. Azaz egy felsőbb szint eléréséhez az összes addigi szint elérésére szükség van (Usiskin, 1982).

A szintek általános leírása:

1. szint, a ráismerés szintje: Rajzról, ábráról felismernek alakzatokat: kör, téglalap, négyzet, stb.. Ezeket az alakzatokat egy egységként látják. Az alakzatok részeit és tulajdonságait még nem ismerik fel. Egy négyzetre például nem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy parallelogramma. Nem nevezik meg az alakzat részeit, mint például csúcs, oldal, szög.

2. szint, a vizuális vizsgálódás szintje: A tanuló felismeri az alakzatok egyes részeit és az egyes részek viszonyát. Például egy négy derékszöggel rendelkező alakzatról meg tudják állapítani, hogy téglalap (akkor is, ha nincs szépen lerajzolva). Egy rombuszról tudják, hogy szemben lévő oldalai párhuzamosak, vagy egyenlő hosszúak, de ezeket a tulajdonságokat még nem kötik össze. Egy egyenlő oldalú négyszögről tudják, hogy rombusz. A különböző alakzatok tulajdonságai közti összefüggéseket, hierarchiát még nem látják. Egy négyzetre még most sem mondják rá, hogy téglalap, vagy egy téglalapra, hogy parallelogramma.

3. szint, a fogalmak rendszerezésének szintje: A tanuló az egyes tulajdonságokat már rendszerben látja. A tulajdonságok rendszerezése alapján következtetéseket tud levonni, és ebben a rendszerben fontos szerepe van az ok-okozatiságnak: például egy háromszögben két oldal egyenlőségéből következik két szög egyenlősége. Tudja és érti, hogy minden négyzet téglalap, minden téglalap parallelogramma. Látja, hogy ha egy négyszög egyben téglalap és rombusz is, akkor az négyzet. A szakirodalomban tipikusan emlegetett példa a váltószögek felismerése és az azzal való érvelés. Más típusú matematikai érvelésekre viszont még nem képes. A geometriát még nem látja teljes ok-okozati összefüggésben.

4. szint, a formális következtetések szintje: Ez a szint egy általánosabb matematikai érettségi szint elérése a geometrián belül. Az általános matematikai szint alatt azt értjük, hogy már megkülönbözteti a definíciókat, tételeket, bizonyításokat. Az állításoknál felmerül a bizonyítás iránti igény, ezeket a bizonyításokat értik és maguk is el tudnak végezni egyszerűbb bizonyításokat. A geometrián belül a tanuló megérti az alapfogalmak és az axiómák meglétét,

az utóbbiakat el tudja különíteni a tételektől. Például be tudja bizonyítani, hogy egy háromszögnek van beírt köre. Teljes axiomatikus bizonyításra nem feltétlenül képesek. Például egy négy derékszöggel rendelkező négyszögre rámondja, hogy a szemben lévő oldalak egyenlők, de nem érzi, hogy ezt még be kéne bizonyítani.

Az alábbiakban egy geometria feladatra adott különböző válaszok segítségével szemléltetjük majd mit jelent, amikor különböző szinten lévő emberek másképp beszélnek. Hiszen a különböző válaszok ugyanarra a kérdésre érkeznek az eltérés csupán a korban, tapasztalatban és a képességbeli különbségekben van. Amennyiben a felsőbb szinten lévő személy nem látja át, hogy tudásban és képességekben különbség van közte és az alsóbb szinten lévő tanuló között, és nem képez megfelelő utat az alacsonyabb szinten lévőnek, akkor nem ad lehetőséget neki a fejlődésre. Úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a két szinten lévő ember két különböző geometriai nyelvet beszél és nem értik meg egymást. Ugyanígy például, ha a tanár nem a megfelelő módszerekkel tanít, akkor nem jöhet létre megértés tanár és diák között, ami pedig a diák fejlődésének egyik feltétele lenne. Sok esetben a tanár feltételezi, hogy a diákok maguktól is látják a bizonyítás szükségességét, és hogy ha nem bizonyít be részletesen egy-egy részletet, a diák képes lesz egyedül is elsajátítani, képes lesz egyedül rájönni az indoklásra. Pedig csak a negyedik van Hiele szinten kerül elő a bizonyítás iránti igény. Ez azt jelenti, hogy amíg nem értünk el egy bizonyos szintre, addig hiába lennénk képesek végigkövetni egy indoklást, nem fogjuk tudni valóban elsajátítani, hiszen nem látjuk az értelmét és nem értjük a szükségességét. A tanár nem feltételezheti, hogy a diákokban eleve meg kellene lennie az igénynek és vagy a megfelelő képességeknek, tudásnak arra, hogy mélyebben megvizsgálják a tanultakat. Konkrét példán keresztül is szeretném bemutatni Vigotszkij elméletének megjelenését, a más szinteken megjelenő gondolatokat a geometriában. A kérdés a következő: Hol helyezkednek el a síkon azok a pontok, amelyek egy adott egyenestől d távolságra vannak? Számos válaszlehetőséget megvizsgáltunk, interjúkat készítettünk, ezek alapján néhány típus-vázlatot mutatok meg az egyes pontokban.

Bemutatunk most néhány válaszlehetőséget erre a kérdésre. Ezek a kérdések különböző szintű interjúalanyoktól származnak, és különböző mélységben kezelik a problémát.

a) Az eredeti egyenessel párhuzamos és attól d távolságra lévő egyenesen.
b) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól d távolságra helyezkednek el.
c) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól d távolságra helyezkednek el. Mindkettő megszerkeszthető hasonló módon. Például az egyiket

megadhatjuk, ha az adott egyenesen kijelölök egy tetszőleges A pontot. A-ba merőlegest állítok, és A-ból felmérve egyik irányba a d távolságot megkapom a P pontot, melyből újfent merőlegeseket állítok, de most az AP szakaszra. Ezzel meg is kaptam az egyik keresett egyenest.

d) Két egyenesen, melyek az eredeti egyenessel párhuzamosak és attól d távolságra helyezkednek el. Mindkettő megszerkeszthető hasonló módon. Például az egyiket megadhatjuk, ha az adott egyenesnek kijelölöm két pontját C-t és D-t. Ezekből merőlegest állítok az egyenesemre és az egyenes által határolt két félsík közül az egyik felé felmérem mindkét pontból a d távolságot. Összekötve a két keletkezett pontot megkaphatom az egyik keresett egyenest.

e) Két egyenesen, melyek az eredeti e egyenessel párhuzamosak és attól d távolságra helyezkednek el. Mindkettő megszerkeszthető hasonló módon. Például az egyiket megadhatjuk, ha az adott e egyenesen kijelölök egy tetszőleges A pontot. A-ba merőlegest állítok, és A-ból felmérve egyik irányba a d távolságot megkapom a P pontot, melyből újfent merőlegeseket állítok, de most az AP szakaszra. Legyen ez az f egyenes. Egyrészt be kell még látni, hogy az f egyenesek minden pontja d távolságra lesz az e egyenestől. Másrészt azt is meg kell mutatni, hogy az e egyenes ezen félsíkján más pont nem lesz megfelelő. Kijelölöm az f egy tetszőleges pontját, legyen ez Q, melyből merőlegest szerkesztek az e egyenesre. Legyen B az a pont, ahol ez a merőleges metszi az e egyenest. Az APQB négyszöget egymásra merőleges egyenesek szerkesztésével kaptam, így ez a négyszög téglalap. A téglalap szemközti oldalai egyenlő hosszúak, agy AP=BQ=d. Ezzel már látjuk, hogy az f egyenes minden pontja megfelelő lesz, mert Q tetszőleges volt. A bizonyítás másik részéhez az egyenestől való távolság definícióját használom fel. Felveszem az e egyenes egy tetszőleges X pontját, ebből merőlegest bocsátok e-re. Y-nal jelölöm ennek a merőlegesnek és az f egyenesnek a metszéspontját. Tudjuk, hogy XY=d, amiből az is következik, hogy ha a merőlegesnek ezen a félsíkon egy másik pontját vizsgálom akkor az nem lehet d távolságra X-től. Ezzel megmutattam, hogy a félsík semelyik f-től különböző pontja sem lesz megfelelő.

f) Két egyenesen, melyek az eredeti e egyenessel párhuzamosak és attól d távolságra helyezkednek el. Mindkettő megszerkeszthető hasonló módon. Például az egyiket megadhatjuk, ha az adott e egyenesen kijelölök egy tetszőleges A pontot. A-ba merőlegest állítok, és A-ból felmérve egyik irányba a d távolságot megkapom a P pontot, melyből újfent merőlegeseket állítok, de most az AP szakaszra. Legyen ez az f egyenes. Egyrészt be kell még látni, hogy az f egyenesek minden pontja d távolságra lesz az e egyenestől. Másrészt azt is meg kell mutatni, hogy az e egyenes ezen félsíkján más pont nem lesz megfelelő. Először megmutatom, hogy az f és e egyenesek párhuzamosak. Tudjuk, hogy mindkét egyenes szimmetrikus AP-re, ezért ha lenne metszéspontja a két egyenesnek, akkor a metszéspont AP-re vonatkozó tükörképe is metszéspont lenne. De két (különböző) egyenesnek nem lehet két metszéspontja. Tehát a két egyenes párhuzamos, hiszen nincs metszéspontjuk. Vegyük az f egyenes egy P-től különböző tetszőleges Q pontját, melynek vetülete e-re legyen B. Tükrözöm az e és f egyeneseket az AB szakasz felezőmerőlegesére. Az e egyenes képe önmaga lesz, hiszen A képe B és fordítva. Nevezzük el f képét f'-nek, P képét P'-nek. Így az AP szakasz képe a BP' szakasz lesz. Tudjuk, hogy BAP és ABQ szögek is derékszögek, így a P' rajta lesz a BQ egyenesen és BP'=d. Azt is tudjuk, hogy f és f' metszéspontja az AB felezőmerőlegesén van, és mivel az e és f egyenesek párhuzamosak, f' is párhuzamos e-vel. A párhuzamossági axióma miatt f=f'. Tehát P' az f egyenesen is rajta van, azaz P'=Q, így PQ=d is teljesül. A bizonyítás másik része az e) pontban leírtak szerint folytatódik.

Látható, hogy az egyes pontokban különböző geometriai megértési szinteken lévő emberek bizonyításait olvashatjuk. Például egy ötödikes diák a legtöbb esetben az a) vagy a b) pontokban leírtak valamelyikéhez hasonló választ ad. Egy ötödikes diák már érti a kérdést, nagy valószínűséggel ismeri a benne szereplő fogalmakat, de az indoklás szükségessége nem merül fel benne. Számára a válasz nyilvánvaló és nem látja értelmét a válaszadáshoz semmiféle magyarázatnak. Abban az esetben, ha megkérdezzük miért gondolja így, a tipikus válasz az, hogy „látszik". És ha akarná sem lennének meg az eszközei arra, hogy akár egy kezdetleges bizonyítást mutasson. Ez a példa a van Hiele kettes megértési szintet mutatja be, míg a c) és d) részekben szereplő válaszok a hármas szint megfelelői. Ezekben már megjelenik egy részletezett, ok-okozati összefüggéseken át vezető megoldási út. A negyedik szintet mutatja be az e) pont, melyben egy logikusan végigvezetett gondolatmenetet, sőt, bizonyítást láthatunk. Azonban az axiómák szintjéig ez a megoldás sem vezet le, így az ötös szinten lévő, a geometriát már az axiómák szintjén értelmező embereket ez a megoldás sem elégíti ki. Egy négyes fölötti szintre az f) pontban mutattunk egy lehetséges példát. Emellett a b) válaszadó nem érti miért van szükség erre a „precizitásra", hiszen ismeretek és tapasztalat híján benne még fel sem merült az igény az indoklásra. Nem tud mit kezdeni még az e) és f)-ben szereplő válaszokkal, mert ami „nyilvánvaló" azt nem kell megmagyarázni. Éppen a „nyilvánvaló" kifejezés különböző értelmezési lehetőségeiben rejlik a probléma, hiszen a különböző megértési szinteken ez a kifejezés mást és mást jelent. Ebből láthatjuk, hogy két ember kommunikációja akkor lehet sikeres, ha a „nyilvánvaló” dolgok, amikre visszavezetik bizonyításukat, indoklásukat, számukra ugyanott, vagy legalábbis relatív elég közel vannak egymáshoz. A tanárnak tudnia kell, hogy ha a például ötödikes gyereknek nem igényel bizonyítást a feladat, mert számára ez „nyilvánvaló”, akkor nem a bizonyítás útján tudja fejleszteni a gyereket, hanem először el kell juttatnia arra a szintre, hogy igénye legyen a feladat indoklására. A tanár mindeközben annak is tudatában van, hogy a tanuló válasza nem is minden geometriában igaz, hiszen bizonyításhoz fel kellene használni a párhuzamossági axiómát.

Hasonlóan a van Hiele elmélethez a Magyar Nemzeti Alaptanterv (NAT) és az ez alapján létrejött kerettantervek is egymásra épülő elemekből álló fejlődési folyamatot írnak elő. Olyannyira, hogy a van Hiele szintek párhuzamba állíthatók a NAT-ban leírtakkal. Az általános iskolai 1. osztályos tananyag, mint például a háromszög, négyzet és téglalap felismerése és előállítása rajzzal, vagy egyéb eszközökkel, akár szabad tevékenység, akár egy-egy feltétel megadásával a van Hiele első szinttel feleltethető meg. 5.-6. osztályra a diákoknak már ismerniük kell síkidomok, háromszögek, négyszögek szemléletes fogalmát. Képesnek kell lenniük tárgyak összehasonlítására, azonosítására, osztályokba sorolására tulajdonságaik szerint, és közös tulajdonságaik felismerésére is. Tehát 6. végére a második szintet már mindenképpen el kell érnie a diákoknak, sőt, néhány síkidomot csoportosítaniuk is kell már, ami pedig már a második szint fölé viszi a diákokat. Nyolcadik osztályra várja el a harmadik szint elérését, azaz, hogy a tanulók a sík- és térbeli alakzatok csoportosítására képesek legyenek. A 8. évfolyam végén a tanulóknak már ismerniük kell a tétel fogalmát és tapasztalati úton sejtéseket kell megfogalmazniuk, amelyekből fakadóan megszületik a bizonyítási iránti igényük is – ezzel megközelítve a negyedik szintet. A gimnáziumi évek alatt számos tétellel és bizonyítással találkoznak a diákok, önálló bizonyításokra kell képesnek lenniük, ami a negyedik szint elérésének szükségességét jelenti.

A van Hiele szintek mérésére Usiskin hozott létre a 80-as években egy nemzetközileg elfogadott tesztet (1982). A tesztben 25 kérdés szerepel, mind az öt szinthez öt kérdés tartozik. A kérdéseknél az öt válaszlehetőségből pontosan az egyik helyes, a kitöltésére minden életkorban, minden élethelyzetben 35 perc áll rendelkezésre. A teszt kiértékelésével a diákok besorolhatóak a 0, 1, 2, 3, 4, 5 szintek valamelyikére, ahol a 0 jelenti a kompetenciák olyan mértékű hiányát, hogy az egyes szintet sem éri el a kitöltő (Clements & Battista, 1992). A javítás során két eljárást is szoktak alkalmazni, az ún. szigorú és megengedő javítási módszereket. A megengedő esetében legalább három feladatot kell helyesen megválaszolnia az adott öt kérdés közül, hogy a kitöltőről azt mondjuk, hogy az adott szinthez tartozó kompetencia birtokában van. A szigorú módszer esetében nem három, hanem 4 kérdésre kell jól válaszolnia. A van Hiele elmélet linearitása miatt egy szintet akkor ért el valaki, ha az azt megelőző összes szinten is jól szerepelt. Például, ha valaki a teszt kitöltése során teljesítette az 1-es, 2-es, 3-as és 4-es szintekhez tartozó kritériumot (megengedő vagy szigorú eset közül választhatunk), akkor az ő van Hiele szintje 4-es. Abban az esetben, ha valaki teljesítette például az 1, 2 szinteket, a 3-as szinthez tartozó kérdéseken nem ment ét, de a 4-esen igen, az ő szintjét akkor is kettesnek mondjuk a linearitás szükségessége miatt. Vannak olyan kutatások, amikor ezekre az esetekre azt mondja, hogy „nem besorolható”.

A van Hiele elmélet egyre több országba eljutott, és így a tesztet több mint negyven országban alkalmazták kutatások és különböző oktatási folyamatok során (Burger & Shaughnessy, 1986; Senk, 1989; Zachos, 1995; Jones, 2002; Kospentaris & Spyrou, 2008; Erdogan & Durmus, 2009; Vojkuvkova & Haviger, 2015; Ural, 2016; Astuti et al., 2018; Moyer, 2021). Kutatásunk előtt Magyarországon középiskolában és egyetemen nem, csak az általános iskolai tanulók körében alkalmazták a tesztet. A mi középiskolai érdekeltségünk főként abból fakadt, hogy bár a diákok többsége sikeres az érettségi vizsgán (Csapodi & Koncz, 2016), a mi egyetemen szerzett tapasztalataink és mások korábbi eredményei is azt mutatják, hogy az egyetemi hallgatók tudása és a bemeneti szint között szakadék van (Erdélyi, Dukán, Szabó, 2019; Szilágyi et al., 2021). Így természetesen adódik a kérdés, hogy a magyarországi középiskolások milyen geometria tudással rendelkeznek. Ehhez fölmértük 342 középiskolás diák van Hiele szintjét.

A kísérlet leírása

A geometriai megértés szintjét középiskolások körében mértük fel a 2015/2016-os tanévben. 342 diák vett részt a kísérletben, összesen öt középiskolából, egy budapestiből és négy miskolciból. Az iskolák kiválasztása során figyelembe vettük, hogy melyeknek vannak már régebb óta kapcsolatai az egyetemmel, melyek azok, amelyek nyitottak a felmérésre. A felmérésből kihagytuk a speciális matematika programmal rendelkező és az egyetemhez tartozó gyakorló iskolákat. A négy iskola egyike egy zenei konzervatórium, három pedig normál középiskola volt. A három átlagosnak tekinthető középiskola egyike a Nemzeti Erőforrás Minisztérium által összeállított rangsor szerint a legjobb negyven között szerepelt a kísérlet évében. A négy iskolából egy egyházi, a többi állami fenntartású. A miskolci iskolák adatait két kollégánk: Fehér Ágnes Csenge és Győry Ákos gyűjtötték be. A kísérletben részt vevő diákok közül 62-en zenei tanrend szerint haladtak, 280 diák normál tanterv szerint haladt, és volt 32 diák, akik az Arany János Tehetséggondozó Program (AJTP) tagjai voltak. Az AJTP egy tehetséggondozó program a szociálisan hátrányos helyzetű tanulók számára, akik többnyire kisebb falukból származó családokból érkeznek. A 280 diák közül 91-en 9., 103-n 10., 27-en 11. és 59-en 12. osztályosok voltak. A 62 zenei konzervatórium tanulói közül 18 fő 9-es, 17 fő 10-es, 15 fő 11-es és 59 fő 12-es vett részt a kutatásban. A diákok van Hiele szintjeinek meghatározásához az Usiskin által létrehozott tesztet használtuk. Az egyes osztályok tanárai dönthették el, hogy online vagy papír alapon töltették ki diákjaikkal a tesztet.

Eredmények

A középiskolások által kitöltött Usiskin tesztek eredményeit az 1.-9. táblázatok mutatják. A táblázatokban az A, B, C, D, E betűk jelölik az iskolákat. Az N rövidítés a résztvevők számát jelöli. Szigorú változat alatt azt értjük, hogy a teszt kitöltőjének az öt kérdésből négyet helyesen kellett megválaszolnia ahhoz, hogy az adott van Hiele szintet elérhesse, a megengedő változat alatt pedig azt értjük, hogy az öt kérdésből csak háromra kellett helyesen válaszolnia.

A kísérleti „megengedő” eredmények alapján megállapítható, hogy ezen diákok a gimnáziumba nem érték el az elvárt 3-as szintet, hiszen átlagosan 2,19 szintre írták meg a teszteket, ha a zenei konzervatórium diákjainak eredményét nem vesszük bele. A legerősebb gimnáziumban 2,29 átlagos eredményt értek el a kilencedikes diákok, a leggyengébb eredmény pedig 2,1 volt ezen az évfolyamon. Másrészt azt is láthatjuk, hogy a végzős évfolyamos gimnazisták sem érik el a tőlük elvárt szintet, mert átlagos eredményük 2,28 (a zenei konzervatórium eredménye nélkül), azaz lényegében megegyezik a kilencedikes évfolyam eredményével. Sőt, az is megállapítható, hogy 10. és 11. évfolyamon sem tapasztalható ideiglenes fejlődés. Egy pozitív irányba kiugró érték az „A” gimnázium tizenegyedik osztályosainál volt megfigyelhető, ahol a „szigorú” pontozás alapján 2,46, a „megengedő” alapján 4,00 eredményt értek el a diákok. Ez azt jelenti, hogy ebben a gimnáziumban a NAT szerint elvárt szinten volt a diákok geometriai megértése. Azt gondolhatnánk, hogy ez az eredmény egy erősebb matematika fakultációs csoport eredménye lehetett. Utánajárva kiderült, hogy a csoport nem a matematikát, hanem a biológiát tanulja emelt szinten. A csoport jellegzetességét azonban nem a speciális tanrend, hanem a létszám adta, mert csupán heten voltak a csoportban. A csoport tanárnőjével interjút folytattunk, aki úgy élte meg a kis létszámot, hogy „végre kapott elég időt és energiát a csoportját személyre szabottan és a NAT elvárásai szerint tanítani”.

9.évf. - szigorú változat						
	A	B	C	D	E	össz.
mean	1,42	1,26	1,40	1,00	0,67	1,21
dev.	1,35	1,38	1,16	1,05	0,97	1,23
N	24	27	30	10	18	109

1. táblázat

9.évf. - megengedő változat						
	A	B	C	D	E	össz.
mean	2,29	2,22	2,13	2,10	1,17	2,03
dev.	0,95	1,69	1,22	1,20	1,34	1,35
N	24	27	30	10	18	109

2. táblázat

10.évf. – szigorú változat						
	A	B	C	D	E	össz.
mean	1,18	1,13	1,54	1,80	1,00	1,31
dev.	1,26	1,18	1,14	1,32	1,12	1,19
N	22	32	39	10	17	120

3. táblázat

10.évf. – megengedő változat						
	A	B	C	D	E	össz.
mean	1,18	2,16	2,21	2,40	1,59	2,05
dev.	1,10	1,30	1,10	0,97	1,12	1,16
N	22	32	39	10	17	120

4. táblázat

11.évf. – szigorú változat						
	A	B	C	D	E	össz.
mean	2,89	-	1,38	1,14	0,47	1,26
dev.	1,21	-	1,39	0,90	0,74	1,33
N	7	0	13	7	15	42

5. táblázat

11.évf. – megengedő változat						
	A	B	C	D	E	össz.
mean	4,00	-	2,23	2,43	1,13	2,17
dev.	1,29	-	1,48	1,27	0,92	1,54
N	7	0	13	7	15	42

6. táblázat

12.évf. – szigorú változat

	A	B	C	D	E	össz.
mean	0,70	1,75	2,11	0,87	1,00	1,14
dev.	1,02	1,36	1,05	1,19	1,04	1,21
N	23	12	9	15	12	71

7. táblázat

12.évf. – megengedő változat

	A	B	C	D	E	össz.
mean	2,47	2,75	2,89	1,00	1,17	2,04
dev.	1,04	1,42	0,60	1,95	1,11	1,34
N	23	12	9	15	12	71

8. táblázat

Összesített eredmények

		átlagok	
	N	megengedő	szigorú
9.évf.	109	1,21	2,03
10.évf.	120	1,31	2,05
11.évf.	42	1,26	2,17
12.évf.	71	1,14	2,04

9. táblázat

A kitöltések alapján arra következtethetünk, hogy a magyarországi hagyományos gimnáziumokban a gyerekek geometriai fejlettségi szintje nem a NAT elvárásainak megfelelően alakul. Egyrészt az egyes évfolyamok között szinte nincs eltérés az eredmények átlagában, másrészt a gimnáziumból kikerülők átlaga még a gimnáziumba való elméleti bekerülési szintet sem éri el.

Zenei szakközépiskola eredményei

Évfolyam	Átlag	Fő
9.	1,17	18
10.	1,59	17
11.	1,13	15
12.	1,17	12

10. táblázat

A kiugróan alacsony értékek miatt a zenei konzervatórium eredményeit külön vizsgáltuk (10. táblázat). A 10. táblázatok alapján elmondható, hogy ebben az intézményben nemhogy nincs fejlődés, hanem a tanulók az általános iskola alsó tagozatában elvárható második szintet sem érik el.

Bár az eredmények különböző iskolákból származnak, az iskolák teljesítményei hasonlóak, így ezen eredmények alapján az ország más iskoláiba járó tanulók van Hiele szintje megbecsülhető. Eszerint a magyar középiskolások nagy része az általános iskolás diákoktól elvárt szinten vannak geometriából.

Felvetődik a kérdés, hogy ezek a diákok mégis hogyan lehetnek sikeresek az érettségi vizsgán. Ennek megválaszolásához az érettségi vizsgán szereplő geometria feladatok kielemzése során kapott tapasztalatok adhatnak egy kielégítő választ.

Az érettségi vizsga és a hozzá szükséges geometria tudás vizsgálata

Az egyetemen elvárt bemeneti szintet a NAT alapján hozták létre, amelyben a gimnáziumi évek során már megjelenik a bizonyítás iránti igény szükségessége, míg az egyetemekre a felvételit az érettségi vizsga jelenti. Az emelt szintű érettségin több bizonyítás is megjelenik, de ezek általában nem a bizonyítási iránti igényen, a fogalmak és problémamegoldási utak mélyebb megértésén alapulnak, hanem visszavezethetőek egy bejáratott, sokszor megjelenő gondolatsorra (Rékasi & Szabó, 2021). Munkájukban a 2018, 2019-es geometriai emeltszintű érettségi feladatokat elemzik a geometriai megértés szempontjából. A következőkben kiterjesztjük az elemzésüket arra összpontosítva, hogy mely feladatmegoldásokban jelenik meg a van Hiele négyes szintje. Elsősorban a bizonyítás iránt igény szükségességét vizsgáljuk.

Elsőként a 2018. májusi érettségi geometria feladatait vizsgálták meg. Ezen érettségi elsőn feladatát és annak hivatalos megoldásait az 1., 2., 3. és 4. ábrákon olvashatjuk.

A hivatalos megoldókulcs a szögek koszinuszával kiszámításával és a koszinusz-tételbe való behelyettesítéssel oldja meg az 1.a) feladatot. Amennyiben a diák már oldott meg ehhez hasonló feladatot, eszébe jut a tétel és ismeri legalább olyan szinten, hogy a függvénytáblázat segítségével alkalmazni tudja, akkor a feladat egy egyszerű behelyettesítés segítségével megoldható volt. Ezzel a megoldási úttal elég, ha a diák elérte a harmadik van Hiele szintet, nincs szükség bizonyításra, összetetteb logikai következtetéssorozatokra, tételek, definíciók és axiómák bonyolult alkalmazására.

1. Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm.

a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű!

Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.

b) Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya 3:4:5.

c) Ennek a derékszögű háromszögnek a területe $121{,}5\ \text{cm}^2$. Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát!

(2018. emelt szint, 1. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

1. ábra: 2018.májusi emelt matematika érettségi 1. feladata

1. a)		
(Elegendő megmutatni, hogy a háromszög legnagyobb szöge hegyesszög.) A legnagyobb szög a legnagyobb (11 cm hosszú) oldallal szemben van.	2 pont	*Ez a 2 pont akkor is jár, ha a vizsgázó a háromszög mindhárom szögét helyesen kiszámolja. (A két kisebb szög* 54,7°, *illetve* 39,4°.)
Jelölje ezt a szöget α. A koszinusztétellel: $\cos\alpha = \frac{7^2+9^2-11^2}{2\cdot 7\cdot 9} = \frac{1}{14}$ ($\approx 0{,}0714$).	2 pont	
$\alpha \approx 85{,}9°$, tehát a háromszög valóban hegyesszögű.	1 pont	*Mivel* $0 < \cos\alpha$ (< 1), *ezért α hegyesszög.*
Összesen:	**5 pont**	

2. ábra: 2018.májusi emelt matematika érettségi 1.a részfeladatának hivatalos megoldása

Az 1.b) feladatrész megoldásához elegendő a Pitagorasz-tétel alkalmazni tudásának képessége, ezen felül más geometria tudás nem szükséges a feladat megoldásához. Ezt alapvetően nem tartjuk problémának, de a 4. szint elérése ezen feladatrész esetén biztosan nem szükséges.

1. b)		
Jelölje a háromszög oldalainak hosszát $a-d$, a és $a+d$ ($0<d<a$).	1 pont	b, $b+d$, $b+2d$ (b, $d>0$)
A Pitagorasz-tétel alapján $(a-d)^2+a^2=(a+d)^2$.	1 pont	$b^2+(b+d)^2=(b+2d)^2$
A négyzetre emeléseket elvégezve és rendezve: $a^2=4ad$.	1 pont	$b^2-2db-3d^2=0$
($a\neq 0$-val osztva) $a=4d$.	1 pont	*A b-ben másodfokú egyenletet megoldva* $b=3d$ ($b=-d$ *nem megoldás*).
A háromszög oldalai tehát $3d$, $4d$ és $5d$, az oldalak aránya ezért valóban $3:4:5$.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

3. ábra: 2018.májusi emelt matematika érettségi 1.b részfeladatának hivatalos megoldása

Az 1.c) feladatrész megoldásához a derékszögű háromszög területképletének alkalmazása után a feladat megoldása algebra jellegűvé válik, az ehhez a feladathoz szükséges geometria tudás hatodikos tananyag.

1. c)		
A háromszög területe: $\frac{3d \cdot 4d}{2} = 121,5$.	1 pont	
Innen $12d^2 = 243$, azaz ($d > 0$ miatt) $d = 4,5$.	1 pont	
A háromszög oldalainak hossza tehát 13,5 cm, 18 cm és 22,5 cm.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

4. ábra: 2018.májusi emelt matematika érettségi 1.c részfeladatának hivatalos megoldása

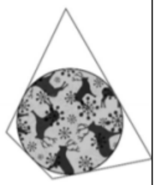
A következő elemi geometria témakörébe tartozó feladat az érettségi 7. feladatának c) részfeladata volt. A feladatot és hivatalos megoldásait az 5. és 6. ábrákon olvashatjuk.

A 7. feladathoz tartozó megoldókulcs alig tartalmaz geometriai gondolatokat, lépéseket. Úgy gondoljuk, hogy a feladat megoldásának elkezdéséhez elegendő ismerni a konvex négyszögek, szakaszhossz fogalmakat. Az érintőnégyszögek fogalmának ismerete nem árt, de az érintőnégyszögek tételének teljes ismerete nem elvárás a feladat megoldáshoz. Az utolsó lépés igényel még geometriai gondolatot, amikor ellenőrizni kell az érintőnégyszögek szemközti oldalhosszaira vonatkozó összegek egyenlőségét, de enélkül az ismeret vagy az ellenőrzés igénye nélkül is szinte teljes pontszámmal megoldható a feladat. Azaz ez az elsőre geometriának tűnő feladat lényegében 1 pontnyi geometria részt tartalmaz a feladatrész összesen 7 pontjához képest.

A 2019. év geometria feladatait és azok megoldásait a 7.-14. ábrákon olvashatjuk. A 2019. év 1. a) részfeladatánál ábraelemzés során és a paralelogramma definíciója alapján elsőként derékszögű háromszögeket és párhuzamos egyeneseket kell felismerni. A terület megadásához látni kell, hogy a paralelogramma területének direkt megadása felé nem biztos, hogy érdemes elmenni. Ehhez át kell gondolni, milyen módokon lehetne közvetlenül megadni a paralelogramma területét. Kivéve, ha valaki a közvetett utat, azaz egy fajta komplementer módszert gyorsabban észreveszi, mint hogy átgondolna egyéb lehetőségeket. Az látható, hogy a bizonyítás iránti igényt nem követeli meg a feladat. Az 1.b) feladatrész az analízis témakörébe esik. Az 1.c) feladatrész megoldását nem tüntettük fel külön ábrán, mert megoldásához szögek tangensének használata és a kiegészítő szögek ismerete elegendő tudás. A trigonometria ismerete megkíván sok előzetes tudást, lexikai ismeretet és feladatmegoldó rutint, de kevésbé kerülnek porondra a különféle bizonyítási módok és azok egyre mélyebb megértése.

7. Az iskolai karácsonyi vásárra készülődve a diákok különböző díszeket készítettek.

A gyerekek másfajta díszeket is készítettek úgy, hogy színes kartonlapra nyomtatott kör alakú képeket négy-négy egyenes vágással vágtak körül. Az egyik ilyen módon kapott érintőnégyszög alakú függődísz oldalainak hossza (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat négy szomszédos tagja. A négyszög egyik oldala 23 cm, a kerülete pedig 80 cm.



c) Mekkora lehet a négyszög másik három oldalának hossza?

Megjegyzés: A 7. feladat a) és b) kérdései nem geometria feladatok.
(2018. emelt szint, 7. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

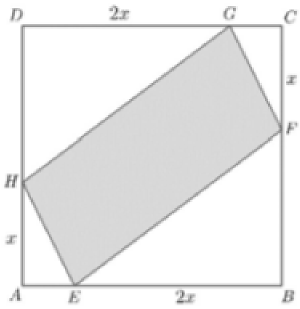
5. ábra: 2018.májusi emelt matematika érettségi 7.c részfeladata

7. c) első megoldás		
A négyszög oldalainak cm-ben mért hosszát valamely körüljárási irányban jelölje e, f, g, h. Az érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, ezért $e + g = f + h = 40$.	1 pont	
Feltehetjük, hogy $e = 23$, ekkor $g = 17$; valamint hogy $f > h$ (mert a számtani sorozat különbsége $d \neq 0$).	1 pont	
(Esetszétválasztást végzünk e és f nagyságviszonya alapján.) Ha $f > e$, akkor ($h < g$, és) a sorozat különbsége $d = e - g = 6$;	1 pont	
így $f\,(= e + 6) = 29$ és $h\,(= g - 6) = 11$.	1 pont	
Ha $f < e$, akkor ($g < h < f < e$, és) a sorozat különbségére $3d = e - g = 6$, innen $d = 2$.	1 pont	
$h\,(= g + 2) = 19$ és $f\,(= h + 2) = 21$.	1 pont	
A négyszög másik három oldala tehát 11, 17 és 29, illetve 17, 19 és 21 (cm) lehet. (Mindkét esetben létezik konvex négyszög.)	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. c) második megoldás		
Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a számtani sorozat növekvő. Ebben az esetben a 23 a sorozatnak a harmadik vagy negyedik tagja lehet (mert a sorozatnak biztosan két-két 20-nál kisebb, illetve nagyobb tagja van).	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó azokat az eseteket is megvizsgálja, amikor a 23 a sorozat első, illetve második tagja.*
Ha a 23 a sorozatnak a harmadik tagja, akkor (a sorozat differenciáját d-vel jelölve) $(23 - 2d) + (23 - d) + 23 + (23 + d) = 80$.	1 pont	
Innen $92 - 2d = 80$, azaz $d = 6$.	1 pont	
Ha a 23 a sorozatnak a negyedik tagja, akkor $(23 - 3d) + (23 - 2d) + (23 - d) + 23 = 80$.	1 pont	
Innen $92 - 6d = 80$, azaz $d = 2$.	1 pont	
A négyszög másik három oldala tehát 11, 17 és 29, illetve 17, 19 és 21 (cm) lehet. (Mindkét esetben létezik konvex négyszög.)	1 pont	
Mivel $11 + 29 = 17 + 23$, illetve $17 + 23 = 19 + 21$, mindkét kapott négyszög valóban érintőnégyszög.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

6. ábra: 2018.májusi emelt matematika érettségi 7.c részfeladatának hivatalos megoldásai

1. Az $ABCD$ négyzet oldalai 4 méter hosszúak. A négyzetbe az *ábrán* látható módon az $EFGH$ paralelogrammát írjuk. Az AH és a CF szakasz hossza x méter, a BE és a DB szakasz hossza $2x$ méter ($0 < x < 2$).



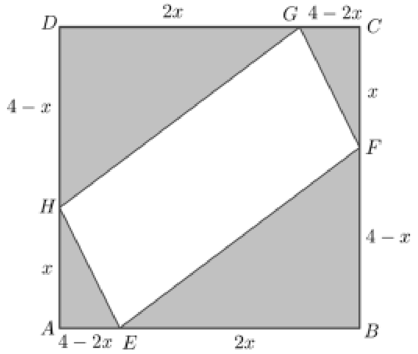
a) Igazolja, hogy a beírt paralelogramma területe (m^2-ben mérve): $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$.

b) Határozza meg az x értékét úgy, hogy a beírt paralelogramma területe a lehető legkisebb legyen!

c) Számítsa ki a beírt paralelogramma szögeit, ha $x = 1{,}25$.

(2019. emelt szint, 1. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

7. ábra: 2019.májusi emelt matematika érettségi 1.a részfeladata

1. a)		
(A paralelogramma területét megkapjuk, ha az $ABCD$ négyzet területéből levonjuk a négy derékszögű háromszög területét.)  $BF = DH = 4 - x$ és $AE = CG = 4 - 2x$.	1 pont	
$T(x) = 16 - 2\cdot\dfrac{x(4-2x)}{2} - 2\cdot\dfrac{2x(4-x)}{2}$	1 pont	
$T(x) = 16 - 4x + 2x^2 - 8x + 2x^2$	1 pont	
Összevonás után: $T(x) = 4x^2 - 12x + 16$, ami a bizonyítandó állítás volt.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. ábra: 2019.májusi emelt matematika érettségi 1.a részfeladatának hivatalos megoldása

A 9. ábrán látható 4.a) feladatrészben a tetraéder térfogatának kiszámításához először fel kell tudni írni a tetraéder térfogatának képletét. Ekkor tapasztaljuk azt, hogy a tetraéder magasságának meghatározására szükségünk lesz. Ahhoz, hogy erre képesek legyünk, látni kell, hogyan néz ki egy tetraéder, a diákok legnagyobb részének szüksége van ábrára a feladat megoldásához, azaz le is kell tudniuk rajzolni egy vázlatot. Ezek után, ha nem is kell ismerni az egyenesek és síkok konkrét definícióját, találkozni kellett már olyan feladattal, amiben szerepelt az alaplap és oldalélek hajlásszöge. Ennek ismeretében megtalálható az a síkmetszet, amelyből kiszámítható a piramis magassága. A síkmetszettel való további megoldás során szabályos és félszabályos háromszögekre vonatkozó ismeretekre, és a súlypontra vonatkozó ismeretekre van szükség. Tapasztalatom szerint ez a feladat a térlátás szempontjából tud problémát okozni egészen addig, amíg nem találkoznak a diákok ehhez néhány hasonló feladattal. A feladat lehet, hogy sokaknak nehezebb egy ideig, mint az eddig felsorolt feladatok, a megoldásához szükség van rutinra, fogalmi ismeretekre és képesség a vázlat rajzolásra, de a van Hiele negyedik szintjének elérésére nincsen.

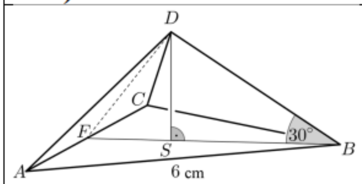
4. Egy bűvész két egyforma „dobótetraédert" használ az egyik mutatványához. A dobótetraéder alakja olyan szabályos háromoldalú gúla, amelynek alapéle 6 cm hosszú, az oldalélei pedig 30°-os szöget zárnak be az alaplap síkjával.

a) Határozza meg a tetraéder térfogatát!

Megjegyzés: A 4. feladat b) kérdése nem geometria feladat.

(2019. emelt szint, 4. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

9. ábra: 2019.májusi emelt matematika érettségi 4.a részfeladata

4. a)		
 Az ábra jelöléseit használjuk. A gúla ABC alaplapjának középpontja (súlypontja) S. DS merőleges az alaplapra, a feltétel szerint pedig $SBD\angle = 30°$.	1 pont	
BS az ABC szabályos háromszög magasságának (súlyvonalának) kétharmada: $BS = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 2\sqrt{3}$ ($\approx$ 3,46) (cm).	2 pont	
A gúla testmagassága $DS = BS \cdot \mathrm{tg}30° = 2$ (cm).	1 pont	
Az ABC háromszög területe: $T = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ ($\approx$ 15,59) (cm^2).	1 pont	
A gúla térfogata: $V = \frac{T \cdot DS}{3} = 6\sqrt{3}$ ($\approx$ 10,4) cm^3.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

10. ábra: 2019.májusi emelt matematika érettségi 4.a részfeladatának hivatalos megoldása

Az érettségi 5. feladatát és annak megoldását a 11., 12. és 13. ábrák mutatják. Az 5.a) feladatrészhez téglatestek testhálóit kell alkalmazásszerűen ismerniük a diákoknak, majd egy egyszerű térfogatképlet segítségével megoldható a feladat. A testháló ismerete alsós, a téglatest térfogatának ismerete felsős tananyag, azaz legfeljebb a 3. szint legalsó szintjére van szükség a feladat megoldásához. Az 5.b) feladatrészben nincs szükség további geometriai ismeretekre, a feladat az analízis témakörébe esik. Az 5.c) feladatrészben a kollineáris ponthármasok látására és megszámolására van szükség. A feladathoz szükség van térlátásra, de alapvetően inkább kombinatorikai eszközök kellenek a megoldáshoz.

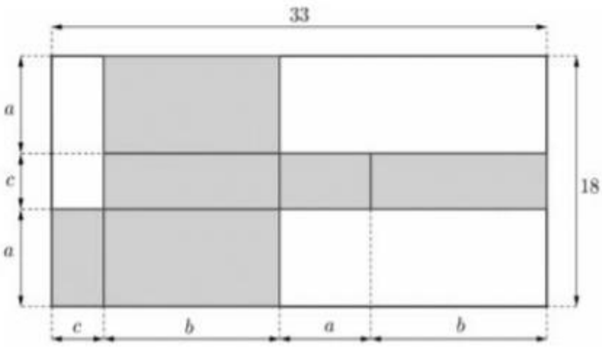
5. Egy 33 x 18 cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.

a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7\ cm$!

b) Hogyan kell megválasztani az *a, b, c* élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg.

c) A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van, amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem?



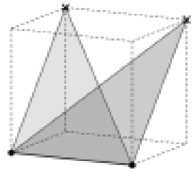
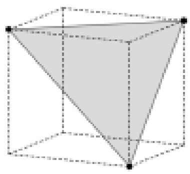
(2019. emelt szint, 5. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

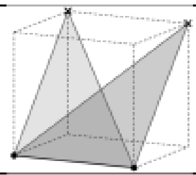
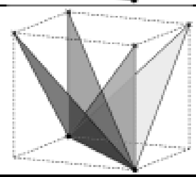
11. ábra: 2019.májusi emelt matematika érettségi 5. feladata

5. a)		
(A szakaszok hosszát cm-ben mérve) $2a + c = 18$ miatt $c = 18 - 2\cdot 7 = 4$.	1 pont	
$a + 2b + c = 33$ miatt $b = \dfrac{33-7-4}{2} = 11$.	1 pont	
A téglatest térfogata: $abc = 7\cdot 11\cdot 4 = 308\ \text{cm}^3$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12. ábra: 2019.májusi emelt matematika érettségi 5.a részfeladatának hivatalos megoldása

5. c) első megoldás		
A téglatest 8 csúcsa összesen $\binom{8}{3} = 56$ háromszöget határoz meg.	1 pont	
Ezek közül le kell vonni azokat, melyeknek síkja egybeesik a téglatest valamelyik lapjának síkjával. Mind a hat lapon négy ilyen háromszög van, összesen tehát 24.	2 pont	
A megfelelő háromszögek száma (56 – 24 =) 32.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. c) második megoldás		
(A feladat szerint nem választható olyan háromszög, amelynek két oldala a téglatest két élével azonos.) Ha a háromszög egyik oldala a téglatest egy éle, akkor ennek két végpontjához kétféleképpen választhatjuk a háromszög harmadik csúcsát (mert a kiválasztott élben csatlakozó két lap egyik csúcsa sem választható a háromszög harmadik csúcsaként).	1 pont	
(A téglatestnek 12 éle van, ezért) ilyen háromszögből összesen $12 \cdot 2 = 24$ darab van.	1 pont	
Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik élével azonos, akkor mindhárom oldala a téglatest egy-egy lapjának átlója. A téglatest egy adott csúcsából kiinduló három él nem közös végpontjai egy megfelelő háromszöget határoznak meg. (A téglatestnek 8 csúcsa van, ezért) ilyen háromszögből 8 darab van.	1 pont	
A megfelelő háromszögek száma $24 + 8 = 32$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

5. c) harmadik megoldás		
A téglatest „alsó” lapjáról két szomszédos csúcsot 4-féleképpen választhatunk, ezekhez a feltételnek megfelelően a „felső” lapjáról 2-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot.	1 pont	
Az alsó lapról két átellenes csúcsot 2-féleképpen választhatunk, ezekhez a felső lapról 4-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot.	1 pont	

13. ábra: 2019.májusi emelt matematika érettségi 5.c részfeladatának hivatalos megoldása

A 2019. év 6. feladatát a 14. ábrán láthatjuk. Ennek megoldása során az egyenlőszárú háromszögek ismeretére és statisztikai, algebrai ismeretekre van szükség. A feladat megoldásának geometriai tartalmához elegendő a 2. van Hiele szint megléte.

6. Egy egyenlő szárú háromszög oldalai hosszúságának átlaga 10, szórása $3\sqrt{2}$.

a) Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát!

(2019. emelt szint, 6. feladat, e_mat_18maj_fl.pdf)

14. ábra: 2019.májusi emelt matematika érettségi 6. feladata

A kielemzés és tapasztalatszerzés során úgy állapítottuk meg, hogy a 2018., 2019. évi emeltszintű érettségi feladatai nem követelték meg a negyedik szintet. Középiskolai matematika tanárként úgy gondolom, hogy az emeltszintű érettségin az elmúlt majdnem 20 év során egy-két olyan geometria feladat szerepelt, melyben a feladat teljes megoldásához szükség volt a bizonyítás iránti igényre. Ezen észrevételeink magyarázatot szolgálhatnak a magyarországi középiskolai tanulók Usiskin-féle teszten elért gyenge eredményeire.

Az érettségi vizsga és a Nemzeti Alaptanterv közötti eltérés feltevésünk szerint azt eredményezi, hogy a diákok megírhatják jól a matematika érettségit akár akkor is, ha csak a 3. van Hiele szinten vannak. Ezzel magyarázható lenne az egyetemekre bemenő diákoktól elvárt és valós tudásuk közötti szakadék. Hiszen az egyetemi geometria kurzusokon már elvárnák a bizonyítás iránti igény meglétét, azaz a van Hiele 4. szintjét. Az érettségi vizsga erős külső befolyása elnyomhatja a NAT-ban leírt elképzeléseket, követelményeket. Ennek oka, hogy a tanárok többségének elsődleges célja a minél sikeresebb érettségi felkészítés és nem a matematikai szemlélet általános fejlesztése, hiszen az érettségi vizsga nem „csupán" a diákok továbbmenetelét szolgálja, hanem a középiskolák rangsorát részben ezen eredmények alapján határozzák meg. Így a tanórák során a tanárok az érettségin előforduló témakörökre fókuszálnak és az azokhoz kapcsolódó feladatokat gyakoroltatják be a gyerekekkel akkor is, ha ezzel kihagynak részeket és fejlesztendő területeket a NAT-ban és a kerettantervekben megfogalmazottakhoz képest (Kovács, 2017). A német egyetemek küzdöttek hasonló problémával (Braun & Schröder, 2014): nagy volt a különbség a tudásszintű az egyetemre belépő hallgatók és az egyetem által megkövetelt tudás között. Az egyetemek és az egyes tartományok középiskolái közötti többszöri egyeztetést követően a probléma Németországban megoldódni látszik. A probléma megoldása Magyarországon is fontos lenne, hiszen a geometria központi szerepet tölt be a természettudományokban, számos alkalmazása van a mindennapi életben és a művészetekben is (Bursill-Hall, 2002, Mammana, 1998).

Összegzés

Dolgozatom első részében a magyarországi középiskolás diákok van Hiele-féle geometriai megértési szintjét vizsgáltam. A van Hiele szintek mérésére Usiskin által kidolgozott tesztet használtuk. A kísérletben 1 budapesti és 4 miskolci középiskola 342 diákjával töltettük ki a tesztet. Az eredmények alapján megállapítottuk, hogy a kísérletben résztvevő diákok tudása és fejlődésének mértéke semelyik évfolyamon sem teljesítik a NAT-ban megfogalmazott elvárásokat. A NAT alapján az általános iskola végére a tanulóknak a 3-as, középiskola végére a 4-es van Hiele szintet kellene elérniük. Ezzel szemben az eredmények azt mutatják, hogy kilencediktől tizenkettedik osztályig a diákok kettes és 3-as szint között vannak. Ez azt jelenti, hogy a diákok már kilencedikben sem érik el a bemenő elméleti szintet és ezt a lemaradást a további négy év során sem tudják behozni, sőt, semmiféle fejlődés nem tapasztalható. Két irányt is találtunk a várt fejlődés hiányának magyarázatára. Az egyik irány a tanár és diákok közötti, nem megfelelő kommunikációval kapcsolatos, a másik irány pedig az érettségiben szereplő feladatokkal.

Kivétel nélkül minden helyzetben, a diákok fejlődése érdekében, nagyobb figyelmet kéne fordítani a tanár és diák közötti kommunikációra. Vigotszkij legközelebbi fejlődési zóna elméletét alapul véve leírt példán szemléltettem, hogy ha nem a megfelelő kommunikációs és fogalmi szinten közelítjük meg a tanulót, akkor esély sincs arra, hogy magasabb megértési szintre jusson. Kísérleti eredményeink megerősítik, hogy az egyetlen járható út a diákok megértési szintjének és fejlődési lehetőségei mértékének megismerése. Ennek segítségével tudjuk elindítani a tanítási folyamatot és időközben a tanítási módszereket folyamatosan a tanulók aktuális szintjéhez kell igazítanunk. Amíg ez nem történik meg, addig nem jön létre a valódi gondolkodás és problémamegoldási képesség fejlesztése, legfeljebb a begyakorlással és bemagolással is elsajátítható feladatmegoldás rutint szerzik meg a diákok.

Másrészt, ahogy azt megállapítottuk, az érettségi vizsga nem követel meg hármasnál magasabb van Hiele szintet ellentétben a NAT-ban megfogalmazottakkal. Az érettségi vizsgaeredményeken nem kizárólag a diákok továbbtanulása múlik, hanem az iskolák minősítésének is ez az egyik szempontja. Így a középiskolákban általában nem a NAT által meghatározott képességek fejlesztésére koncentrálnak, hanem begyakoroltatják az érettségin szereplő típusfeladatokat. A típusfeladatok begyakorlása típushibákhoz vezet (Dunlosky et al., 2013). Hiszen ha számonkérés során a rutinfeladatok elvégzése a hangsúlyos a valódi problémamegoldási képességek fejlesztése helyett, akkor a legtöbb helyen az oktatás során is a rutinfeladatokra koncentrálnak. Ez következménye lehet annak, hogy a NAT elvárásaival nincs összhangban se a középszintű, se az emeltszintű érettségin szereplő feladatok típusa, összetettségi mértéke és nehézsége.

Levelezés Zalman Usiskinnel

Az ezzel kapcsolatos cikkünk 2020-ban jelent meg az Annales Mathematicae et Informaticae c. folyóiratban, „Students' non-development in high school geometry" címmel. Nagyon örömünkre nem sokkal a megjelenés után kaptunk egy levelet Usiskintől, aki a cikkben szereplő eredményekre reagálva osztotta meg gondolatait. A levélben szereplő gondolatok és elmélkedések szorosan kapcsolódnak a dolgozat témájához, ezért az alábbiakban Usiskin levele és az arra írt válaszunk olvasható.

Usiskin levele

„Dear Csaba, Janka, Csilla, and Anna:

I have gazed over your paper with obvious interest and would like to comment on what is in the paragraph below Table 9 on page 8.

"Although the results are from different schools, the performances of the schools are similar and based on these results we can estimate the Van Hiele levels of students attending to other schools in the country. Based on this estimation most of the Hungarian high-school students are on the level of a primary school student in geometry. This raises the question how students can be successful on the final exam. This question requires a deeper investigation, a part of it could be the analysis of the geometry problems and their sample solutions in the final test. Reading through the past fifteen years' final exams it is reasonable to question the amount of geometrical proving skills needed to solve the tasks."

While Sharon Senk and I were developing the van Hiele test in the CDASSG project 40 years ago, Pierre van Hiele visited us. We showed him a draft of the test of van Hiele levels that we had devised. We were surprised that Pierre responded to many of the items we had created as "No level", by which he meant that the thinking needed to do the item was outside the realm of the theory of development that he and his wife had created. Often these items had to do with problems involving lengths and angle measures that required the application of theorems or formulas. Even though deduction from theorems was required to do the problems, they did not - in Pierre's vision - fit into the hierarchy of levels to which his name is attached.

It seems to me that your paper supports the idea that there is more to the understanding of geometry than just nesting geometry in the domain of careful mathematical language, mathematical systems, and proof. As your study shows, people (i.e., students in Hungary) can learn to solve even difficult problems without necessarily being able to distinguish a statement from its converse, or realize the importance of careful definitions, etc. The van Hiele theory at its best does not cover all of geometrical thinking.

So I think your collective intuition is correct! It is "reasonable to question..."

Sincerely,
Zalman Usiskin

Professor Emeritus of Education

The University of Chicago”

Válaszunk Usiskin levelére

„Dear Professor Usiskin, dear Zalman,

Thank you for your message, we are very pleased that you were interested in our article. We found your insight — that you provided about your and Pierre van Hiele’s thoughts/considerations about the relations among the test, the Van Hiele levels, and geometrical understanding in general — very interesting.

The topic is one of the interests of the research group led by Csaba Szabó in which Janka, Csilla, and Anna participate as Ph.D. students. As a follow-up to the paper, we investigated the Van Hiele levels of university students. (You can find the manuscript attached.) The results were very thought-provoking. A main result is that one can be on level 3, pass a (rather difficult) oral exam in geometry and two weeks later be (always) back to level 3.

Our results also show that those who reached level 4 also reached level 5 on the test, and a lot of students who were on level 3 filled correctly level 5 as well. No student completed the test on level 4. The interviews showed that many of those students who reached level 5 on the test were actually on level 4. All these lead us to believe that the last part of the test, which would measure level 5 is measuring some kind of formal logical skills and a kind of comfortability with formal thinking in relational systems. We think that it requires rather combinatorial- and/or algebraic-type skills, anyway it requires thinking in simple abstract structures. Originally, level 5 was planned as the level of axioms, which means that a person on level 5 could think and prove in different kinds of geometry axiom systems. This level can exist. However, based on our findings, we suggest the following: either this level cannot be measured by the VHGT, or the fifth level is not the sequel of the fourth level. We can imagine that someone is able to think formally, but not very well acquainted with geometry. We think that further studies would be needed to determine how one develops after the fourth level and when and how geometric formal thinking evolves.

We think that the fourth level should be more refined. We also think that you are right in the sense that van Hiele's approach to geometry is just one aspect, and avoiding measure and lexical knowledge, the understanding of geometry cannot be complete. We ourselves arrived at this idea, as well. At the same time, we carried out interviews and found that up to level 3 and basic level 4, Your test measures properly in case of Hungarian pupils, even without measures (length, angle) and using only basic facts. Note, though, that the notion of square and rectangle uses the notion of measure, as opposite sides have the same lengths, we are using equal angles, etc. There, the notion of length is hidden in the notion of symmetry, but a 6-to-12-year-old pupil does not know it. On level 4 we believe that with the same range of knowledge several levels of thinking may exist. Making simpler statements, using theorems properly may be different, from what you suggest, applying theorems and formulas in different situations. See attached another study made by Anna Rékasi and Csaba Szabó about the Hungarian final exam problems and van Hiele levels. As you see, these are questions, where no real geometry knowledge is needed in the sense of the van Hieles. After a small step of geometry, you apply formulas and proceed with some calculations. According to us, for the final exam problems in the paper, it is really enough to have van Hiele level 3, but the majority of grade 10-12 Hungarian high school problems require much more than this.

On the other side, we can imagine situations, where, for example, you need to select which theorem and which formula, or a sequence of theorems formulas is to apply. If you want to measure levels of geometry knowledge there, we are back to the question: what lexical knowledge can be assumed when measuring such a level?

We would be happy to hear about your opinion on our ideas.

Sincerely,
Csaba, Anna, Janka and Csilla"

Az előhívási hatás szerepe a középiskolai geometria tanulásában

Az előhívási hatás

A kilencvenes évek óta egyre növekvő számban születnek olyan kognitív idegtudományi eredmények, amelyek felülírják, pontosítják a gondolkodásról és a tanítási-tanulási folyamatról alkotott korábbi elképzeléseket. Ezen tanulmányok a memóriáról agykutatással kapott legfrissebb ismereteinkre épülnek. A memóriának három fő funkciója a kódolás, a tárolás és az előhívás (McDermott & Roediger, 2023). Kódolásnak nevezzük a memóriába rögzítés folyamatát, tárolásnak ezen rögzített információk valamilyen formában való „fejben tartását” (McDermott & Roediger, 2023). Általánosságban az előhívás az a folyamat, amikor a tárolt információkat felidézzük és bizonyos formában felhasználjuk. A fő funkciókkal kapcsolatos újabb és újabb elméleti ismeretek új lehetőségeket nyitnak meg az iskolai környezetben való alkalmazásukhoz. A szakirodalom be is vezette az előhívási hatás (vagy tesztelési hatás) és az előhívásos tanulás (vagy teszteléses tanulás) fogalmakat. Az előhívási hatásnak azt a jelenséget nevezzük, amikor a rövidtávú vagy a hosszútávú memóriából történő visszakeresés megváltoztatja, erősíti az egyén emlékezetét az adott visszakeresett információval kapcsolatban (Donoghue & Hattie, 2021; Roediger & Butler, 2011; Rowland, 2014). Az előhívásos tanulás elnevezés az előhívást előidéző tanulási módszereket foglalja magában.

Iskolai környezetben a memória három fő funkcióját, a kódolást, a tárolást és az előhívást a tanulási-tanítási módszerek tükrében vizsgáljuk. Sok helyen még ma is általánosan elfogadott az az elképzelés, hogy a tanulási folyamat az információ memóriába történő bevitelét jelenti, előhívásra azért van szükség, hogy ezen bevitel eredményességét leellenőrizzük. Középiskolai tanárként nap mint nap találkozom azzal a felfogással, hogy a dolgozat és a feleltetés fölösleges tevékenység, amelyet csak az osztályzási rendszer fenntartásáért kell elvégezni vagy azért, hogy a diákok megfelelőképpen motiváltak legyenek az információk bevitelére (Martínez-Sierra et al., 2020). Kutatásunkban az előhívás szerepére fókuszáltunk, mert több területen is kimutatták már, hogy a megtanulandó anyag memóriából való előhívása a hosszútávú tudásnak egy alapfeltétele, azaz a tanulásnak egy hosszútávon megmutatkozó hatékony formája lehet. Lefolytattunk egy középiskolai kísérletet, ami az előhívás szerepét vizsgálta matematika órai környezetben.

Irodalmi áttekintés

Az elmúlt évtizedben számos kutatás vizsgálta az előhívásos tanulás előnyeit az újraolvasáshoz képest (Rowland, 2014; Adesope et al., 2017). Azt, hogy az információ előhívása a memóriából egy kezdeti tanulási fázis után jobban elősegíti a tanultak hosszú távú megmaradását, mint az ismételt elolvasás – kimutatták szövegtanulás esetén, idegen szavak tanulásánál (i.e. Keresztes et al., 2014), páros asszociációs helyzetben, tankönyvi szövegeknél (Rawson & Pyc, 2010) és téri-vizuális készségek tanulása esetén is (Carpenter & Pashler, 2007). Az előhívási hatással kapcsolatos kísérleteteket laboratóriumi körülmények között kezdték el vizsgálni (Butler et al. 2007). Majd ezen kísérleteket követte a szimulált iskolai környezet és a valós iskolai körülmények során szerzett tapasztalatok (McDaniel et al., 2013). Eddig viszonylag kevés számú előhívási hatást vizsgáló kísérlet született, amely nem laboratóriumi körülmények között, hanem valódi iskolákban, valós iskolai körülmények között és hosszabb távon vizsgálná az előhívási hatást (McDaniel et al., 2007, Rawson et al., 2018; Lyle et al., 2020). Ráadásul a legtöbb kezdeti eredmény memorizálással kapcsolatos témában jelent meg, így a matamatika oktatás során mutatott hatását és alkalmazhatóságának formáit még több szempontból is vizsgálni kell (Buchin & Mulligan, 2019; Dunlosky et al., 2013; Lyle et al., 2020; Peterson & Wissman, 2018).

Tekintsük át most azokat az előhívási hatással kapcsolatos kutatási eredményeket, amelyek közvetlen támpontul szolgáltak kísérletünkhöz. Az egyik legismertebb alapkísérletet Roediger és Karpicke (Roediger & Karpicke, 2006) végezték el a témában. Célként egyetemisták körében hasonlították össze a teszteléses és az ismétléses tanulási módok hatékonyságát. Ehhez kísérletükben a kísérlet alanyait két csoportra bontották és mindkét csoportnak egy 250 szavas szöveget adtak ki. Először mindkét csoport elolvasta a szöveget, majd egy kis pihenés után a kontroll csoport még háromszor olvashatta el, ezzel szemben a kísérleti csoport többször nem nézhetett bele a szövegbe. Őket a háromszori ismétlés helyett három alkalommal tesztelték az olvasott szöveg tartalmából. A tanulási eredményességeket rögtön az utolsó fázis után 5 perccel, majd 2 nappal és 1 héttel később vizsgálták, azaz tesztelték a résztvevőket az olvasott szöveg tartalmából. Nem meglepő módon, az azonnali vizsgálat során a kontroll csoport, akik összesen négyszer olvasták el a szöveget, jobban teljesített a kísérleti csoportnál. Ez az eredmény a későbbi teszteléseknél megfordult a kísérleti csoport javára, azaz azok, akik csak egyszer olvasták el a szöveget, és az újraolvasások helyett tesztelve lettek az olvasottak tartalmából, több mindenre emlékeztek 2 nappal és 1 héttel később, mint a több alkalommal újraolvasó társaik.

	Négyszer olvas	1-szer olvas, 3-szor tesztelik
5 perc múlva	80%	75%
2 nap múlva	55%	70%
1 hét múlva	40%	55%

11. táblázat: Roediger és Karpicke kísérletének eredménye

Smith és Karpicke azt is vizsgálták, hogy függ-e a tesztelés hatékonysága a tesztelés módjától (Smith; Karpicke, 2014). Kísérletük alapja hasonló volt az előzőkben leírt kísérlethez, itt is szöveg olvasása volt a feladat, de ők a kísérlet alanyait öt csoportra bontották. Az öt csoport egyike volt a hagyományosnak is nevezhető kontrollcsoport, ahol a hallgatók újraolvasással tanultak, míg a többi négy csoportot különböző módokon tesztelték: feleletválasztós teszttel, kifejtős teszttel, felidézéses teszttel, vegyes típusú teszttel (azaz az előző három típus vegyesen szerepelt a feladatai között). A tanulási folyamat után egy héttel mind az öt csoportot újratesztelték kétféle tesztet alkalmazva. Az egyikben a tanult szövegben szereplő ismeretekre kérdeztek rá, míg a másikban az új ismeretek alkalmazni tudását mérték fel. Eredményeik alapján megállapítható, hogy a tesztelés módjai között nem tapasztaltak szignifikáns különbséget. Az egyedül megmutatkozó különbség abban állt, hogy a tanulókat tesztelték-e vagy sem. Minden teszteléses csoport jobban szerepelt az ismétlős csoporthoz képest. Ezek alapján a hangsúly azon van, hogy már az első tanulási fázis során megtörténjen az aktív előhívás. Kísérletükben ezek mellett azt is megmutatták, hogy az előhívás nem csak a tanultak előhívását, de alkalmazásukat is hatékonyabbá teszi.

Számos tanulmány arra utal, hogy az oktatási szempontból releváns előhívási folymatok javítják a tananyag elsajátítását (pl. Agarwal et al., 2012; Butler et al., 2014; Dobson & Linderholm, 2015; Jensen et al., 2014; Lyle & Crawford, 2011; McDaniel et al., 2013; McDermott et al., 2014; Roediger et al., 2011). Sok tanulmányban az előhívási hatást hasonlítják össze a hagyományos újraolvasással és egyéb hasonló tanulási módszerekkel (Rowland, 2014; Adesope et al., 2017). Az eddig elvégzett kísérletek legnagyobb részét laboratóriumi körülmények között végezték el (Butler et al., 2007; Lyle, 2020), és azt a kérdést is vizsgálják, hogy szövegtanulásos helyzetben melyik tanulási forma a leghatékonyabb hosszú távon. A helyzetek kisebb és nagyobb módosításával is végeztek már vizsgálatokat, például kulcsszavak segítségével való tanulásnál (Rawson & Pyc, 2010), tankönyvi szövegeknél (Roediger és Karpicke, 2006; Butler, 2010), térképen való tájékozódásnál (Carpenter & Pashler, 2007), orvostanhallgatóknál az újraélesztés technikáinak tanulásánál és gyakorlásánál (Kromann et al., 2009).

Bár a fentebb leírt két kísérletben szereplő alanyok egyetemisták voltak, ám az előhvási hatást már több korosztályban is megvizsgáltak (Dunlosky et al, 2013). Vizsgálták óvodás és iskolaelőkészítős gyerekeknél (Fritz et al., 2007; Kratochwill, 1977), általános iskolák alsó tagozatán (Atkinson & Paulson, 1972; Bouwmeester & Verkoeijen, 2011; Metcalfe & Kornell, 2007; Metcalfe & Kornell, 2009; Myers, 1914; Rea &Modigliani, 1985; Rohrer, Taylor, & Sholar, 2010; Spitzer, 1939), általános iskolák felső tagozatán (Carpenter 2009; Fritz et al., 2007; McDaniel et al., 2011; Metcalfe & Kornell, 2007), gimnáziumokban (Carpenter et al., 2009; Fritz et al., 2007; McDaniel et al., 2011; Metcalfe & Kornell 2007; Dirkx et al., 2014), egyetemista korosztály esetén (Kromann et al., 2009; Schmidmaier et al., 2011, Butler, 2010, Little et al., 2011), és középkorúak és annál idősebbek körében is (Bishara & Jacoby, 2008; Logan; Balota, 2008; Maddox et al., 2011; Sumowski et al., 2010; Tse et al., 2010).

A tesztelés módja és a korosztály vizsgálata mellett az is fontos szempontja lehet az előhívás sikerességének, hogy a tesztalanyok kapnak-e visszajelzést a tanulási szakaszban válaszaik helyességéről. Kang, McDermott és Roediger (Kang et al., 2007) ezt vizsgáló kísérletében a felidézés eredményességét rövid kifejtős kérdésekkel és feleletválasztós tesztekkel vizsgálták a tanulási fázist követően három nappal. Összevetették az eredményeket azzal, hogy a tanulási fázisban milyen módon, rövid kifejtős kérdésekkel vagy feleletválasztós tesztekkel tanultak. Emellett a kísérleti alanyok egy része kapott, másik része nem kapott visszajelzést válaszaik helyességéről. Kang és társai eredményei szerint visszajelzés esetén kis mértékben a rövid kifejtős kérdésekre válaszolás hatékonyabb, ha pedig nem kapnak a tanulók visszajelzést, akkor a feleletválasztós teszt a hatékonyabb.

A matematikai teljesítmény és az előhívás kapcsolata

A matematika tanulásához, a problémamegoldáshoz elengedhetetlen a következtetési képességek használata. A matematika alap építőkövei az axiómarendszerek, melyek axiómákból épülnek fel. Ezt követi a fogalomalkotás folyamata, mely során olyan fogalmakat határozunk meg, amikkel dolgozni szeretnénk, azaz definíciókat alkotunk az axiómák segítségével. A létrehozott fogalmakkal kapcsolatban problémák vetődnek fel, melyet a problémamegoldási folyamat követ, hogy eljussunk bizonyítások segítségével tételek kimondásához. A középiskolában nagyon ritkán megyünk le az axiómák szintjéig, ehelyett a tanulókkal fogalmakat és állításokat ismertetünk meg. A megismertetés folyamata sokszor sejtéseken keresztül viszi el a diákokat az állítások megfogalmazásáig, például a fogalmakat használó illusztrációk segítségével megsejthetünk szögek nagyságát, vagy oldalak egyenlőségét. Sokszor itt vége is van a folyamatnak, de a kor és vagy a képességek előrehaladtával az állításokat részben van teljesen indoklások, bizonyítások követik. Ezek során szükségünk van a definíciók, fogalmak és az addig tanult állítások, tételek ismeretére és használatára. A gyakorlatban a matematika órákon a feladatmegoldás kap főszerepet. Feladatmegoldás során többfajta megoldáshoz vezető stratégia vezethet minket. Sokszor a feladatok procedurális megoldását tapasztalhatjuk, azaz olyan megoldási eljárásokat, melyek során már speciális algoritmusokat begyakoroltunk és azokat már rutinból alkalmazzuk. Ilyen lehet például sok esetben a hatványozási szabályok alkalmazása. Másik fő eljárás az ún. konceptuális tudásra épül, amikor az állítások bizonyításához hasonlóan, egy még számunkra ismeretlen irányba kell haladnunk az addig tanult fogalmak és tételek ismeretének és jobb esetben azok valódi (és egyre mélyülő) megértésének segítségével.

A teszteléses tanulás hatását a matematika oktatás alkalmazása során nagyon kevesen vizsgálták (May, 2021). Alkalmazásának sikere több szempontból is kérdéses, hiszen a matematikában nem csak memorizálásra, a lexikális tudás visszaadására, hanem a tananyag megértésére is szükség van. A megértés szükségessége megjelenik a feladatmegoldások, bizonyítások, de még a definíciók és fogalmak elsajátítás esetén is.

Avvisati és Borgonovi (2020) nagymintás vizsgálata a tesztelési hatás és a matematikai problémamegoldás közötti kapcsolatot vizsgálja. Kimutatták, hogy az első tesztben szereplő matematikai problémák mennyisége kis mértékben pozitívan befolyásolta a második tesztben nyújtott átlagos matematikai teljesítményt a tizenéves diákok körében. Kísérletük azonban nem mondható valódi oktatási környezetnek abban az értelemben, hogy egyetlen tesztelés hatását mérték. Így amikor azt szeretnénk megmutatni, hogy hatékony módja a matematika tanulásnak a teszteléses tanulás, nem támaszkodhatunk közvetlenül az ő kísérletükre. A tesztelési hatás megléte nem mindenhol nyilvánvaló, ezért a következőkben ismertetünk néhány okot, amik arra mutatnak, hogy ez a jelenség további kutatásokat igényel.

Az előhívásnak a matematikaoktatásban megmutatkozó hatásáról még Yeo és Fazio (2019) is készítettek egy tanulmányt, melyben a teszteléses tanulást hasonlította össze kidolgozott példák tanulmányozásával, olvasásával. A két stratégia különböző kognitív folyamatokra támaszkodik, így különböző módon erősítheti a tanulási folyamatot. Yeo és Fazio (2019) három kísérletben vizsgálta az előhívásos tanulás és a kidolgozott példáknak a hatékonyságát. 160 felnőtt vett részt a kísérletben kreditekért vagy pénzbeli ösztönzésért cserébe. A résztvevők választhattak, hogy az egy alkalmas vagy a két alkalmas kísérletre jelentkeznek. Az egy alkalmas kísérlet során a résztvevőket öt perc késleltetéssel tesztelték, a két alkalmasra jelentkezők esetében a tesztelés egy héttel később történt. Ezt követően a kutatók véletlenszerűen osztották be a résztvevőket az előhívásos és kidolgozott példákat tanulmányozó csoportokba. Az előzetes ismeretekben nem volt különbség a csoportok között. Kísérletükben azt találták, hogy az optimális stratégia függ a megtanulandó tudás fajtájától (tények vs. rugalmas eljárások), a feladatok jellegétől és az előhívás idejétől is.

A matematikában egyik alapkompetencia a következtetési képesség, ezért kelthette fel többek érdeklődését, hogy a tesztelési hatás működik-e a következtetéses gondolkodást igénylő feladatok esetén. Tran és társai (2015) kísérlete és annak Wissman és társai (2018) által végzett megismétlése során a résztvevőknek egy forgatókönyv mondatai alapján következtetéseket kellett levonniuk. Tranék kísérletében a kísérleti csoport eredményei nem voltak jobbak, mint az újraolvasó csoporténál. Wissman és társai (2018) azzal magyarázták az eredményeket, hogy a tesztelt csoportot csak kétszer tesztelték, míg a kontrollcsoportban tíz alkalommal olvasták újra a forgatókönyvet. Egy másik lehetséges magyarázat az lehet, hogy az előhívásos tanulás csak akkor lehet hatékony, ha az előhívás sikeres a tesztelés során (Karpicke & Roediger, 2007), és Wissman és társai esetében az előhívás a tesztelés során csak 50%-ban volt sikeres. Egy második kísérletben mind a tesztelés, mind az újraolvasás négyszer történt a tanulási fázis alatt, és a végső tesztet késleltették. Ebben az esetben a tesztelési hatás kimutatható volt. Hasonló eredményeket kapott Eglington és Kang (2018) is.

Ezen eredmények fényében láthatjuk, hogy az eddigi eredmények inkább az előhívási hatás sikerességét mutatják be a következtetést igénylő feladatok esetén, de a megfelelő körülmények létrehozásának kulcsfontosságú szerepe van. Ahhoz, hogy a tesztelés beépíthető legyen a matematika órákba és hogy érezhető legyen a pozitív hatása, szintén kellő körültekintésre van szükségünk.

Calderón és Caterino (2016) középiskolás diákok körében végzett kísérletei azt mutatják, hogy a matematikai teljesítmény és a hosszútávú előhívási készségek között szoros összefüggés van. Eredményeik alapján arra hívják fel a figyelmet, hogy érdemes lenne minél több előhívási hatást alkalmazó kísérletet végezni középiskolások körében. Összpontosítva egyrészt az általános előhívási készségek fejlesztésére, másrészt pedig konkrétabban a számtani ismeretek és problémamegoldási folyamatok előhívásának fejlesztésére.

Felmerül a kérdés, hogy a folyamatos előhívás segíti-e a hosszú távú matematika tudás létrejöttét. Ha a válasz igen, akkor milyen formában lehet hatékonyan beépíteni az osztálytermi matematika órák menetébe? Az eddigi ismeretek alapján ahhoz, hogy létrejöjjön az előhívási hatás, figyelembe kell vennünk a következőket: az első előhívásnak meg kell történnie 24 órán belül; a másolás és csalás nem megengedett; az órai kerete miatt nem vehet igénybe túl sok időt és a diákoknak részt kell venniük benne. A tesztelés formáját és a kérdések formáját is figyelembe kell venni.

A kísérlet

A matematika feladatok összetettsége sokféleképpen mérhető, de az bizonyos, hogy az alább felsorolt irányokhoz, megoldási utakhoz mind szükséges a következtetési képességek használata:

- ismerjük az alkalmazandó módszert, szükség van egy ötletre;
- ki kell választani az alkalmazandó módszert a sokféle módszer közül;
- ki kell választani az alkalmazandó módszert a sokféle módszer közül és utána szükség van egy ötletre;
- módszerek és ötletek sorozatát kell alkalmazni, a feladat átlátása nélkül.

Kísérletünk célja volt a matematika óra kereteibe beépíteni az előhívásos tanulás módszerét, és megvizsgálni ennek hatásait, eredményességét a diákok hosszabb távú tudásának szempontjából. A kísérlet egy esettanulmány, melyben az előhívásos tanulás módszerét alkalmaztuk egy hátrányos helyzetű szakgimnáziumi csoportban. Megvizsgálom ennek a csoportnak a matematika tudását és annak változását elemezem. A fejlődés mértékének meghatározásához eredményeiket saját iskolatársaikkal egy elit iskola gimnáziumi tanulóival hasonlítom össze.

Feltételezésünk alapján a teszteléses tanulásnak megfelelő körülmények létrehozásával, matematika órán, nem laboratóriumi körülmények között is kimutatható a hatása. A kísérlet kitervezésénél és az eredmények vizsgálatánál is figyelni kell arra, hogy osztálytermi körülmények között milyen folyamatok térhetnek el a laboratóriumi körülményekhez képest.

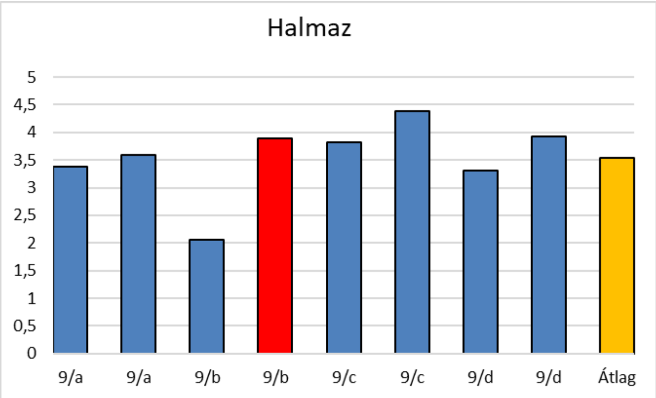
Résztvevők

Magyarországon az a tapasztalat, hogy matematikai teljesítménykülönbség van a magasabb jövedelmű tanulók és az alacsonyabb jövedelmű tanulók között; a magasabb jövedelmű családokból érkező diákok következetesen felülmúlják az alacsonyabb jövedelmű családokból érkezőket. Ezzel összefügg, hogy a középiskolák közötti teljesítményt illetően is óriási a szakadék: a városi gimnáziumok tanulói következetesen felülmúlják a városi szakközépiskolák tanulóit (Auguste & Miller, 2009; Bailey & Dynarski, 2011). Ennek kezelése, a különbség csökkentése mind egyénre vonatkozó, mind társadalmi és gazdasági okokból indokolt (Auguste & Miller, 2009). Kiemelt célunk az előhívási hatás alkalmazásával elérni ezen különbség csökkentését.

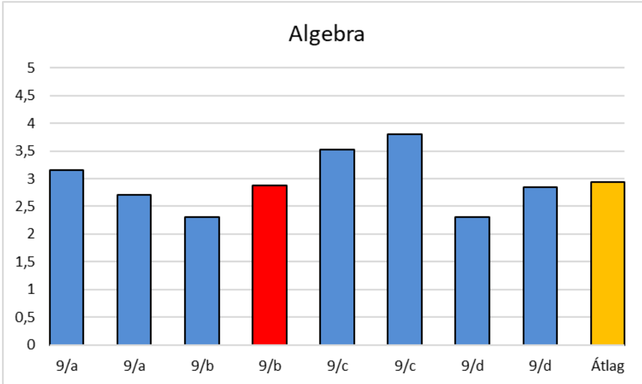
Ebben a kísérletben egy budapesti szakgimnázium és elit gimnázium kilencedikes diákjai vettek részt. Az elit gimnázium az elmúlt évek során a budapesti középiskolák rangsorában első tíz között szerepel, míg a szakgimnázium az elmúlt évek kompetenciamérései alapján a hátrányos helyzetű kategóriába esik. A kísérletben résztvevő diákok előzetes tudásuk vizsgálata mellett először megkértük tanáraikat, hogy adjanak leírást a diákok (szociális) hátteréről és motivációjáról. Az elit gimnáziumban tanító kolléga diákjainak legnagyobb része tehetős, jól szervezett, támogató családból jön, motiváltságukkal nincsen probléma, érdekli őket az iskolai tananyag, az egyetemre való felvételi arányuk közel 100%-os, és az iskolán kívül szinte minden nap különórákon vesznek részt. A szakgimnáziumban tanuló diákok helyzete az előbb leírtak ellentéte: a diákoknak otthoni problémákkal kell megküzdeniük (csonka család, kisebb testvérekről való gondoskodási kötelezettség, szegénység), ebből is kifolyólag a diákok motiválatlanok, felvételi pontszámok nagyon alacsony és felsőfokú felvételi arányuk alacsony. A kísérletben résztvevő osztályok szociális hátteréről bővebben a függelékben olvashatunk. Mindkét iskolában csoportbontásban tanulják a diákok a matematikát. A szakgimnáziumban a csoportba sorolás a matematika felvételi pontszám alapján történik. A kísérleti csoport 9 diákja a szakgimnázium egyik kilencedikes matematika csoportja lett, éppen az a csoport, ahova a diákok a leggyengébb matematika felvételi eredményekkel kerültek be. A kontrollcsoport három osztály 1-1 csoportjából áll, egyrészt egy 23 fős csoportot választottunk ugyanebből a szakgimnáziumból, és két csoportot pedig az elit gimnázium kilencedik évfolyamáról, csoportonként 16 és 18, összesen 34 fővel. Szakgimnáziumi kontrollcsoportnak azt a csoportot választottuk, akiknek előzetes teljesítménye leginkább hasonlított a kísérleti csoport előzetes eredményeihez.

Ehhez ellenőrizni kellett a szakgimnázium kilencedik évfolyamának mind a nyolc csoportjának előzetes matematika eredményeit, hogy mennyiben tér el egymástól az egyes csoportok matematika teljesítménye. A vizsgált témakörök az abban az évben vett tananyagok voltak, amikből már a diákok minden csoportban írtak dolgozatot. Összegyűjtöttük minden évfolyamról a dolgozatok eredményét, a halmazok, algebra, egyenletek és függvények témakörökben. Az ezen témakörökből szerzett jegyeket az 15.-18. ábrák mutatják. Az egyes oszlopok egy-egy csoporthoz tartoznak, a piros oszlop 9b felirattal jelzi a választott kísérleti csoportot, míg az utolsó narancssárga oszlop mutatja a csoportok átlageredményét.

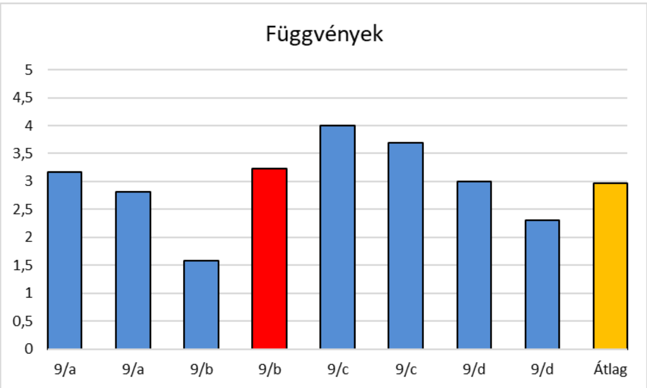
A diagramokról is leolvasható átlagos eredmények alapján megállapítottuk, hogy a kísérlet előtt a kísérleti csoport átlagos eredményei az abban az évben vett témakörökben a kilencedikesek átlageredményei körül ingadoztak. A kísérleti csoport átlagtól vett eltérésének mértéke minden témakör esetén fél jegynél kisebb volt.



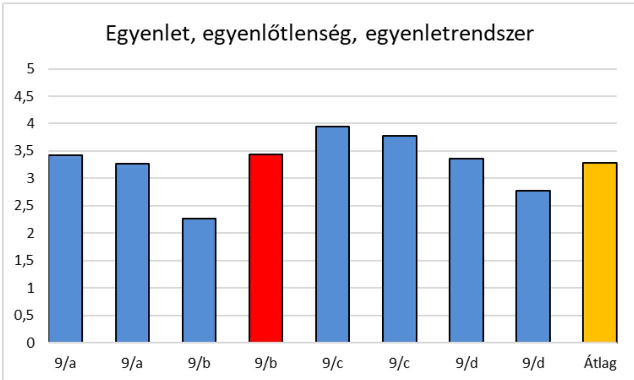
15. ábra



16. ábra



17. ábra



18. ábra

A módszer leírása

A cél az volt, hogy a kísérleti csoport a kísérlet ideje alatt folyamatosan előhívja az adott témakört. Figyelni kellett arra, hogy az előhívás 24 órán belül legyen, hogy ne legyen se csalás, se másolás és hogy a gyerekek valóban előívják a tananyagot, azaz érdekeltek legyenek és valóban részt vegyenek a kísérletben. Ezt úgy értük el, hogy a kísérlet ideje alatt a kísérleti csoport minden óra végén írt egy 5 perces kis emlékeztetőt az adott órai tananyaggal kapcsolatban. Minden kis teszt során egy elméleti kérdésre kellett válaszolniuk és egy feladatot kellett megoldaniuk. Magukra a tesztekre 0, 1 vagy 2 pontot kaptak a diákok annak függvényében, hogy mennyire indultak el jó irányba és mennyire precíz, teljes megoldást adtak be. A diákok a következő órán kijavítva visszakapták a kis tesztet. Azért, hogy érdekeltek legyenek abban, hogy minél jobb pontokat szerezzenek, a pontokra a kísérlet végén egy jegyet kaptak. Ezzel a kísérleti elrendezéssel nem csak a folyamatos előhívást értük el, hanem azt is, hogy a diák minden óra után kapott visszajelzést a teljesítményéről. Ezt az információt a kísérleti csoport tanárnője felhasználhatta a következő órák megtervezéséhez. Ezzel a két szemponttal megvalósultak a formatív értékelés feltételei. A kísérleti csoport diákjai is tudatosabban készülhettek volna a következő órákra, ami szintén segítséget jelentene nekik, de a diákok már említett szociális háttere miatt ez a tényező valószínűleg elhanyagolható volt a kísérlet során. Az óra végi tesztekre az 12. táblázat mutat példákat.

Példák az óra végi tesztekre

1. példa	1.	Mi a tükrözés definíciója?
	2.	Rajzold meg az ABCD négyzet B pontra vonatkozó tükörképét. (A gyerekeknek lerajzolták az ABCD négyzetet.)
2. példa	1.	Mi a geometriai transzformáció definíciója?
	2.	Adott a P pont és tengelyesen tükrözött képe, P'. Keresd meg és rajzold le a tükrözés tengelyét.
3. példa	1.	Mi a súlyvonal?
	2.	Egy háromszög oldalhosszai 6 cm, 8 cm és 10 cm. Milyen hosszúak a háromszög középvonalai?
4. példa	1.	Add meg a 45° radiánban vett értékét.
	2.	Hány fokos a 2π/7 ívmértékű szög?
5. példa	1.	Adott egy kör 120°-os középponti szöge. Rajzold le a hozzá tartozó körszeletet és körcikket.
	2.	Számítsd ki egy 5 cm sugarú kör 180°-os középponti szögéhez tartozó körcikk területét!

12. táblázat

A kísérleti és kontroll csoport diákjai a kerettantervnek megfelelő tananyagot tanulta, a geometriai transzformációk témakörét. Összehasonlítottuk a gimnáziumi és a szakgimnáziumi kerettanterveket és a helyi tanterveket és megállapítottuk, hogy a tananyag ezen része a két iskolatípusban megegyezik. Azaz, minden vizsgált csoportunknak ugyanazokat a fogalmakat kellett elsajátítaniuk és nagyon hasonló feladatokkal találkoztak a kísérlet ideje alatt. A kerettanterv ehhez az anyagrészhez sorolja a következőket: körív hossza, egyenes arányosság a középponti szög és a hozzá tartozó körív hossza között, körcikk területe, egyenes arányosság a középponti szög és a hozzá tartozó körcikk területe között, a szög ívmértéke, tengelyes és középpontos tükrözés, az eltolás, a pont körüli elforgatás, a transzformációk tulajdonságai, geometriai vektorfogalom, szimmetrikus négyszögek, szabályos sokszögek, vektorok összege, két vektor különbsége, vektor szorzása valós számmal, vektorok felbontása összetevőkre.

Ezen fogalmak és az ezekkel kapcsolatos feladatok elsajátítására a szakgimnáziumi tanulóknak 4 hét állt rendelkezésére heti 3 matematika órával, így összesen 11 matematika órájuk volt. A gimnáziumban hat héten át vették a témakört, heti 4 matematika órával, így összesen 24 matematika órájuk volt. Az óra végi teszteken kívül a matematika órák menete hagyományos modellt követett, azaz az óra elején házi feladatot ellenőriztek, majd ezt követte az új tananyag tanulása, majd az azzal és régebbi tananyaggal kapcsolatos feladatmegoldás következett. Azért, hogy a kísérlet zökkenőmentesen menjen, és valóban ne legyen ismeretbeli különbség a csoportok között, és azonos feladattípusokkal ismerkedjenek meg a diákok, folyamatosan konzultáltunk a tanárokkal és ők is egyeztettek egymással. A 13 extra gimnáziumi órában a diákok főleg számolásos feladatokkal foglalkoztak, nem tanultak ezalatt az időszak alatt új tananyagrészt. A téma befejeztével a csoportok témazárót írtak, a témazáró feladatai ugyanazok voltak, a témazáró összeállítását a csoportokban tanító kollégáinkkal közösen állítottuk össze, a javítási koncepciót előre és a közben felmerülő kérdések során is egyeztettük. A közös témzáró dolgozat segítségével mértük fel az előhívásos tanulás hosszútávú hatását. A dolgozat feladatait a 13. táblázatban láthatjuk.

1. feladat: Az alábbi állításokról döntsd el, hogy igaz, vagy hamis! Válaszodat indokold! a) Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus.____ Indoklás:____________________ b) A szabályos sokszög bármely szimmetriatengelye tartalmazza a sokszög legalább egy csúcsát. ____ Indoklás:____________________ c) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor középpontosan szimmetrikus. ________ Indoklás:____________________ d) Nincs olyan trapéz, amely középpontosan szimmetrikus._ Indoklás:____________________ e) Van olyan konkáv négyszög, amely forgásszimmetrikus._ Indoklás:____________________ f) Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor minden szöge egyenlő._______ Indoklás:____________________
2. feladat: Add meg a következő, fokokban megadott szögek mértékét radiánban! a) 60° = b) 210° = c) 22°30’ =
3. feladat: Add meg a következő, radiánban megadott szögek mértékét fokban! a) $2 =$ b) $\frac{2\pi}{9} =$ c) $\frac{-\pi}{6} =$
4. feladat:

	A derékszögű koordináta-rendszerben $\vec{a}$ az A $(-2;\ 5)$ pont helyvektora. Add meg azon $\vec{a}$ -ral egyenlő vektor kezdőpontjának koordinátáit, amelynek végpontja $(-3;\ 3)$!
5.	feladat: Határozd meg a 15 cm sugarú kör 90°-os középponti szögéhez tartozó kisebb körszelet területét és kerületét!

13. táblázat

Kutatási kérdések és hipotézis

Általános célunk az előhívási hatás alkalmazásának megteremtése matematika órai környezetben, és az alkalmazás hatékonyságának vizsgálata. Ehhez kétféle csoporttal is összeszeretnénk hasonlítani a kísérleti csoport tanulóinak az eredményét: saját, szakgimnáziumi társaikkal és egy budapesti elit iskola diákjainak eredményeivel.

Kérdéseink a következők:

1. kérdés: Jobban teljesítenek-e és magasabb szintű geometria megértést érnek-e el azok a szakgimnáziumi diákok, akiket az előhívásos tanulás módszerével tanítanak saját szakgimnáziumi iskolatársaikhoz képest, akiket nem tesztelnek minden óra végén az aznap tanult anyagból?
2. kérdés: Ha egy szakgimnáziumi csoportot a geometria témakör alatt végig az előhívásos tanulás módszerével tanítják, mennyire képesek felzárkózni geometriai megértésben és tudásban egy elit iskola tanulóihoz, akiket nem tesztelnek minden óra végén az aznap tanult anyagból?

Az eddig ismert kutatási eredmények alapján azt gondoljuk, hogy az előhívásos tanulás módszere valós tantermi környezetben, a matematika tárgy esetében is hatékonyan alkalmazható. A valós, iskolai körülmények miatt sok tényezőt figyelembe kellett venni a kísérlet megtervezésekor és eredmények kiértékelésekor, de úgy véltük, hogy mind a szakgminázium tanulókkal, mind az elit gimnáziumban tanulókkal összehasonlított eredmények tükrözni fogják az előhívásos tanulás pozitív hatásait.

Előzetes adatgyűjtés

A kísérlethez kapcsolódó intenzívebb előmunkálatok 2016 márciusában kezdődtek el és az adatgyűjtés 2016 júniusáig tartott. Ekkor Magyarországon összesen 1401 középiskola működött, ebből 260 budapesti. Az elit gimnázium ebben az évben Magyarország 14. helyét, Budapest 5. helyét érte el, míg a szakgimnázium Magyarország 506., míg Budapest 125. iskolájaként szerepelt az érettségi vizsgák és kompetenciamérések alapján. Továbbá a kilencedik osztályos felvételi vizsgán szerzett pontszámok alapján a kísérleti csoport pontszáma volt a leggyengébb, sőt, a szakgimnázium összes csoportja közül ez a csoport kapta a legkevesebb pontszámot. A felvételi vizsgán szerzett pontszám összefügg a diákok előzetes geometria tudásával, hiszen a felvételi vizsga tíz feladatából három geometria feladat volt és egy további megoldása pedig vizuális képességeket igényelt. Az elit gimnáziumi csoportok tanulóinak közel maximális pontszámot kellet elérniük ahhoz, hogy felvételt nyerjenek az iskolába, ami azt jelenti, hogy ezeken a geometria feladatokon is közel maximum pontszámokat kellett szerezniük. Tehát ez alapján a gimnáziumi csoportok előzetes tudása stabilnak mondható, ellentétben a hátrányos helyzetű iskola tanulóival, akiknek a kísérlet kezdetén fogalmi lemaradásuk volt az elit gimnáziumi csoportoktanulóihoz képest.

Eredmények

A kísérleti csoport tagjai jól teljesített az óra végi emlékeztetőkön, eredményeik 78% és 96% között volt. Ez azt jelenti, hogy sikerült bevonni a diákokat az előhívásos tanulás módszerébe, mert az óra végi teszteken az előhívások nagyrészt sikeresek voltak.

A kísérleti és kontrollcsoport közös témazáró dolgozata a függelékben is megtalálható. A dolgozathoz szükséges tudás felölelte az elit gimnázium ismeretanyagát is. Az alábbiakban a feladatok és az eredmények elemzése következik. A témazáró öt feladatból állt, az első feladat elméleti kérdéseket tartalmazott, a többi négy feladatmegoldás volt.

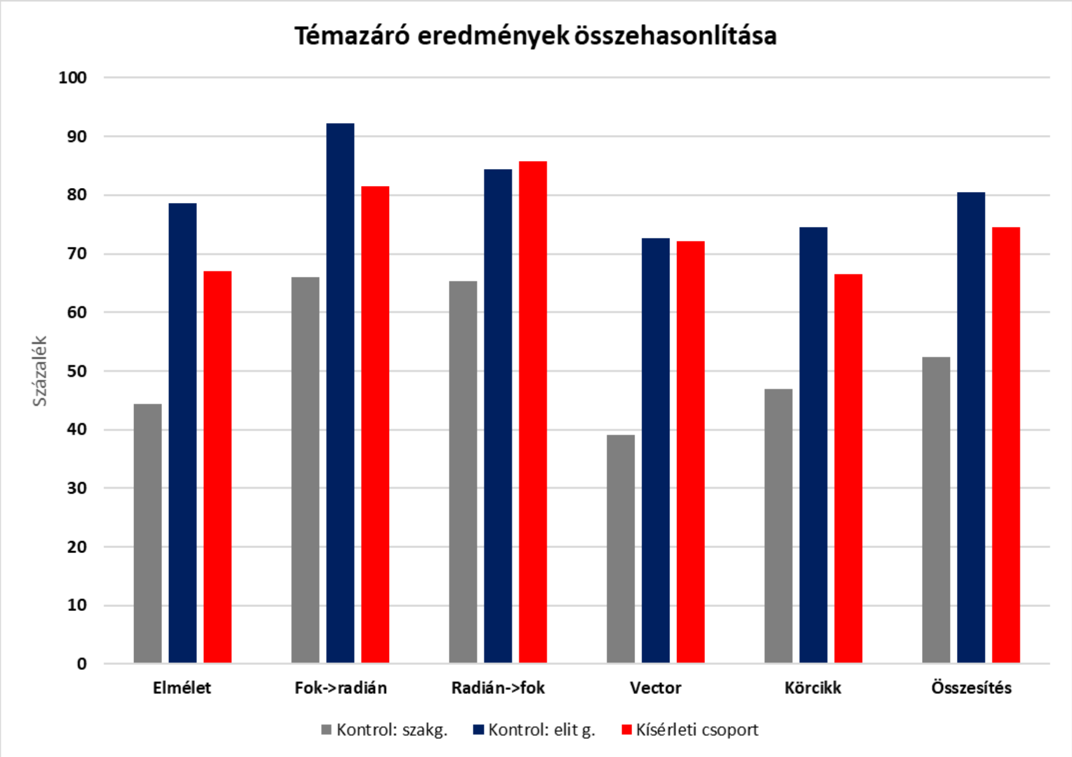
Kvantitatív eredmények

A kvantitatív eredményeket a 14. táblázat és a 19. ábra mutatja. Ebben a témazáró dolgozat eredményeit mutatjuk be feladatonként a három csoportban. A táblázatban látható az első, elméleti feladat majd a további négy feladat. A feladatok sorszámai helyett, a feladatok típusát, fő témáját tüntettük fel. A témazáró dolgozateredmények kiértékeléshez az „anova” módszert használtuk, és azt kaptuk, hogy a kísérleti és a gimnáziumi csoportok teljesítménye között nincs szignifikáns különbség, míg a gimnáziumi csoportok és a kísérleti csoport szignifikánsan sokkal jobban teljesítettek a kontrollcsoportbeli szakgimnáziumi diákoknál.

Első kísérlet témazáró dolgozatainak eredményei

	Elméleti feladat		Fok → rad		Rad → fok		Vektor		Körcikk		Össz.	
Csoport	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás
Kísérleti	,670	,246	,815	,337	,857	,242	,722	,291	,666	,416	,745	,236
Kontrol: szakg.	,443	,192	,660	,312	,653	,369	,391	,360	,470	,350	,523	,234
Kontrol: elit g.	,786	,160	,922	,201	,844	,234	,727	,409	,745	,367	,805	,214
Átlagos eredm.	,651	,240	,816	,286	,778	,299	,609	,406	,638	,384	,698	,256

14. táblázat



19. ábra

Kvalitatív eredmények

A 4. táblázatban látható, hogy a legnagyobb (bár statisztikailag jelentéktelen) különbség a kísérleti csoport és a kontrollcsoport átlagos pontszámai között az első feladatban volt. Ezért a következőkben részletezzük és elemezzük a diákok első feladatra adott válaszait.

Tanulók kiválasztása

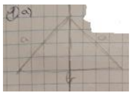
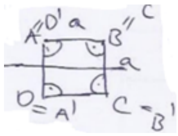
Kísérleti csoport	T1
	T2
Kontroll: szakgimnázium	T3
	T4
Kontroll: elit gimnázium	T5
	T6

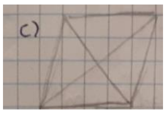
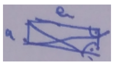
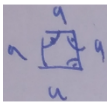
15. táblázat

A diákok, bár mind egyénileg dolgoztak, mind eltérő utakat jártak be, mégis megjelent néhány tipikus megoldási út, tipikus hibás gondolatmenet az adott csoportokban. Így minden csoportból kiválasztottunk néhány tanulót (15. táblázat), akiknek megoldásain, gondolatmenetein keresztül egy átfogó képet kaphatunk az adott csoport tanulóinak megoldási útjairól.

A dolgozat első feladatában feltett kérdések inkább az elméleti tudásra kérdeztek rá, de megoldásához nem feltétlenül volt elegendő a fogalmak ismerete. A feladat hat részfeladatból állt, mindegyik esetben az ott szereplő állítás igazságértékét kellett meghatározni, az indoklás elvárt volt. A tanulóknak emlékezniük kellett a szimmetriák, transzformációk és sokszögek definícióira és alkalmazniuk is kellett a tanult ismereteket. Emellett alapindoklásokat kellett megadniuk a definíciók és a tanult tulajdonságok alapján. Fel kellett tudniuk használni a különböző típusú szimmetriák tulajdonságait és hatásait az alakzatok tulajdonságaira. Szükség volt annak megállapítására, hogy az egyes szimmetriákkal rendelkező alakzatokra milyen közös tulajdonságok igazak, vagy meg kellett tudniuk adni a szimmetriák és bizonyos egybevágósági transzformációk közötti kapcsolatot. Például a tengelyes tükrözésre igaz, hogy a tengely pontjai nem mozdulnak el (fixegyenes), és az is, hogy megőrzi tetszőleges két pont távolságát. Ehhez kapcsolódhat az a) részfeladat, amikor szakaszok egyenlősége alapján kell következtetnünk szimmetriára. A feladat megoldása során meg kell keresni az esetleges tengely helyét, és azzal ellenőrizni kell, hogy minden pont a megfelelő helyre kerül.

Az alábbiakban a kiválasztott hat diák megoldását mutatjuk be példaként (16. táblázat).

A hat választott tanuló első feladatban adott válaszai	
1. Az alábbi állításokról döntsd el, hogy igaz, vagy hamis! Válaszodat indokold!	Tanulók megoldásai
1a: Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus.	T1: „Igaz, mert az egyenlőszárú háromszögek tengelyesen szimmetrikusak. T2: „Igaz. Egy síkbeli alakzatnak akkor van szimmetriatengelye, ha az alakzat pontjait tengelyesen tükrözve a tengelyre, akkor az alakzatot magát kapjuk.”  *1. Kép. T2 tanuló rajza az 1a feldatrészhez* T3: „Igaz, mert ha két oldal egyenlő, akkor van szimmetritengely.” T4: “Igaz, mert egy háromszög akkor és csak akkor szimmetrikus, ha egyenlőszárú.” T5: “Igaz, mert a háromszög két oldala egyenlő, azaz a háromszög szabályos vagy egyenlőszárú háromszög és ezek mindig tengelyesen szimmetrikusak.” T6: “Igaz, mert az átfogón fekvő szögek egyenlőek.”
1b: A szabályos sokszög bármely szimmetriatengelye tartalmazza a sokszög legalább egy csúcsát.	T1: Hamis, mert van olyan szimmetriatengely, ami szakaszfelező merőleges. T2: “Igaz, mert a tükörtengelyt a csúcsokra helyezzük.” T3: “Igaz, mert a szabályos sokszögek szögei egyenlőek.” T4: “Igaz, mert minden szabályos sokszög köré írhatunk egy kört, ami átmegy a sokszög minden csúcsán.” T5: “Hamis, pl.:  *2. Kép: T5 tanuló rajza az 1b feladatrészhez* T6: “Hamis, mert a szimmetriatengely az oldalak felezőpontjait is összekötheti.”
1c: Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor	T1: ‘Igaz, mert ha például a szimmetriatengelyen félbehajtjuk, akkor látjuk, hogy jó. Azaz, ha egy négyszög átlói nem felezik egymást, akkor nem lehet szimmetrikus."

középpontosan szimmetrikus.	T2: “ Igaz, mivel egy alakzat középpontosan szimmetrikus, ha van egy olyan pont a síkon, amire vonatkozóan elvégezve a tükrözést, magát az alakzatot kapjuk vissza.”  *3. Kép: T2 tanuló rajza az 1c feladatrészhez* T3: "Hamis, mert a négyszögek közül csak a paralelogramma középpontosan szimmetrikus." T4: “Igaz, vegyünk például egy paralelogrammát.” T5: “Igaz, mert ha a csúcsokat az átlók metszéspontjára tükrözzük, akkor a szemközti csúcsok egymás tükörképei lesznek.” T6: “Hamis:”  *4. Kép: T6 tanuló rajza az 1c feladatrészhez*
1d: Nincs olyan trapéz, amely középpontosan szimmetrikus.	T1: “Igaz, hiszen nincs neki szimmetriatengelye.” T2: “Igaz, mert a trapéz tengelyesen szimmetrikus.”  *5. Kép: T2 tanuló rajza az 1d feladatrészhez* T3: “Igaz, mert a trapéz nem lehet középpontosan szimmetrikus.” T4: „Igaz, a trapéz nem lehet középpontosan szimmetrikus, mert az egyetlen középpontosan szimmetrikus alakzat a paralelogramma.” T5: “Hamis, mert minden négyzet trapéz, ami középpontosan szimmetrikus.” T6: “Hamis:”  *6. Kép: T6 tanuló rajza az 1d feladatrészhez.*
1e: Van olyan konkáv négyszög, amely forgásszimmetrikus.	T1: “Hamis, mert csak a konvex négyszögek szimmetrikusak”. T2: “Nincs ilyen négyszög, mert akkor 360°-kal kellene forgatnunk.”  *7. Kép: T2 tanuló rajza az 1e feladatrészhez.* T3: “Igaz, mert a téglalap forgásszimmetrikus.” T4: “Igaz, mert ha például elfogatunk egy konkáv deltoidot, akkor visszakapjuk az alakzatunkat.” T5: “Hamis, mert a konkáv négyszögeknek csak egy konkáv szöge van.” T6: “Hamis, mert ha az ábra forgásszimmetrikus, akkor legalább két egyenlő szöggel rendelkezik. De tudjuk, hogy egy négyszög belső szögeinek összege 360°, és a konkáv négyszögnek van olyan szöge, amely nagyobb, mint 180°, tehát lehetetlen, hogy legyen ilyen négyszög.”
1f: Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor minden szöge egyenlő.	T1: “Igaz, mert a forgatás után a sokszög képe önmaga lesz, és ez csak szabályos sokszög esetén lehetséges.” T2: “Hamis, mert a paralelogramma szögei nem egyenlőek.”

	T3: “Igaz, mert ha forgásszimmetrikus az alakzat, akkor középpontosan is szimmetrikusnak kell lennie. T4: “Igaz, mert ha középpontosan szimmetrikus, akkor egyenlők a szögei.” T5: “Hamis, mert a paralelogramma forgásszimetrikus, de a szögei nem feltétlenül egyenlőek.” T6: “Hamis, például ott van az a hatszög, aminek minden második szöge 150°-os, és a többi meg 90°. Így lesznek megfelelő szögek a forgatáshoz.”

16. táblázat

A 17. táblázat a kísérletben résztvevő összes tanuló első feladatra adott megoldásának elemzését mutatja (Dey, 1993). Bár a diákok megoldásai különböztek, az elemzés során a megoldások általánosítása és rendszerezése lehetséges volt. Ha egy hiba/jelenség a tanulók legalább 30 százalékának megoldásában előfordult, akkor "gyakori"-nak jelöljük, egy hiba/jelenség pedig akkor fordult elő "ritkán", ha a diákok megoldásainak kevesebb, mint 30 százalékában fordult elő.

A 14.-17. táblázatokat elemezve megállapítható, hogy a kvantitatív és a kvalitatív eredmények szoros kapcsolatot mutatnak. A kísérleti csoport megoldásai, több szempontot is megvizsgálva, jobbnak mondható, mint a kontrollcsoportban született megoldások. A kontrollcsoportban több hibatípus fordult elő, és a diákok gyakrabban hibáztak. (A 17. táblázatban például láthatjuk, hogy az "Állítás megfordítása", A „Definíciók hiányos ismerete" és az "Egyéb logikai hiba" hibatípusok ritkán fordulnak elő a kísérleti csoportban és gyakoriak szakgimnáziumi társaiknál. Észrevehetjük, hogy ahogy a kvantitatív eredmények mutatják, a kísérleti csoport válaszai sok esetben hasonlítanak az elit gimnáziumi tanulók választípusaihoz. Azonban az elit gimnáziumi diákok pontosabb és teljesebb megoldásokat adtak, mint a kísérleti csoport tanulói. A két csoport közötti különbség megjelent még abban, hogy a "Példákban gondolkodás " és "Az állítás megfordítása" gyakrabban fordult elő a kísérleti csoportban, mint az elit iskolába járó tanulóknál. Általában a szakgimnáziumi csoportok első feladatra adott válaszai tükrözték, hogy ritkán oldottak meg ilyen jellegű feladatot. Ugyanis amikor eldöntendő állításokkal találkoztak korábban, akkor nem várták el tőlük az indoklást. Ez általános iskolában érthető, de a kilencedik évfolyamos kerettantervek külön kitérnek az indoklási igény kifejlesztésére és fejlesztésére. (A „bizonyítás igénye”, „matematikai úton való indoklás” külön sorokat kapnak a kerettantervi táblázatokban).

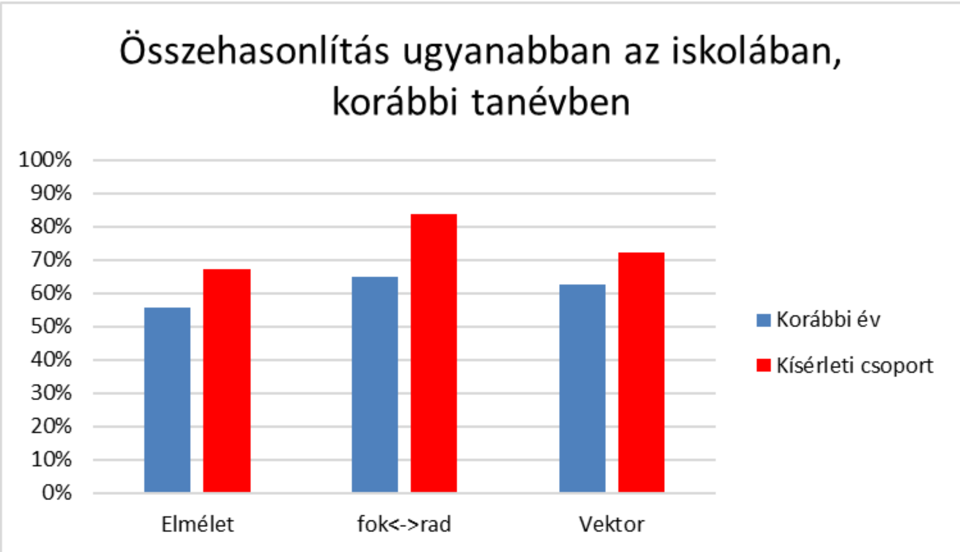
A második és harmadik feladatban a tanulóknak a fok és ívmérték közötti összefüggést kellett alkalmazni a tanult definíciók és szabályok alapján. A negyedik feladat megoldásához nem csak a derékszögű koordinátarendszerben kellett tájékozódniuk, hanem össze kellet tudniuk azt kapcsolni a vektorokkal kapcsolatos műveletekkel, ismerniük kellett a helyvektor fogalmát, két vektor egyenlőségét, és egy általuk választott tetszőleges módszerrel végre kellett hajtaniuk az eltolást. Például összeadhatták a koordinátákat; a vektor segítségével is lépkedhettek a koordinátarendszerben, majd a kapott pontokat algebrailag is értelmezniük kellett. A kísérleti csoport mindhárom feladatban elérte az elit gimnáziumi csoportok szintjét. Ismerték a szabályokat, és alkalmazni is tudták azokat. Ezzel szemben a szakgimnáziumi kontrollcsoportban gyakran fordult elő, hogy nem ismerték az alkalmazandó szabályokat, módszereket, vagy ha ismerték őket, akkor azokat nem tudták alkalmazni.

A témazáró dolgozat első feladatára érkezett megoldások rendszerezése					
Válszok típusai: Mennyire helytálló? Milyen hiba fordul elő?	Melyik feladat?	Melyik diák a 6 közül?	Általában, az egyes csoportokban, milyen gyakran fordult elő az adott választípus?		
			Kísérleti csoport	Szakgimnáziumi Kontroll	Elit-gimn. Kontroll
Tanult tétel használata	1a	T1, T4, T5	gyakori	gyakori	gyakori
Nem tanult tétel használata (bizonyítás nélkül)	1a, 1e	T2, T5	ritka	nem fordult elő	ritka
Példákban gondolkodás (nincs általános megoldás)	1a, 1b, 1c, 1f	T1, T2, T3, T4, T6	gyakori	gyakori	ritka
Állítás megfordítása (nem vették észre a megfordítást)	1a, 1b, 1d	T2, T3	ritka	gyakori	nem fordult elő
Hibátlan megoldás	1a, 1b, 1d, 1e, 1f	T1, T2, T4, T5, T6	ritka	ritka	gyakori
Jó, de nem teljes megoldás (pl.: hiányzik az ellenpélda, nem teljeskörű az érvelés, jó a megoldás, de nem elég részletes)	1b, 1c, 1e, 1f	T1, T2, T5, T6	gyakori	ritka	gyakori
Tartalmas gondolatok, de nincs kapcsolat a feladattal	1b	T4	nem fordult elő	ritka	nem fordult elő
Definíciók hiányos ismerete	1d, 1f	T1, T2, T3, T4, T6	ritka	gyakori	ritka
Üresen hagyott feladat	1e, 1f	-	nem fordult elő	gyakori	nem fordult elő
Egyéb logikai hiba	1b, 1d, 1e	T1, T4	ritka	gyakori	ritka
Alakzatok hierarchiájának hibás/hiányos ismerete	1c	T3	nem fordult elő	ritka	nem fordult elő

17. táblázat

A második legnagyobb különbség a gimnáziumi és a kísérleti csoportok között az ötödik feladatnál mutatkozott. Az ötödik feladat abban az értelemben összetett, hogy a háromszögekre és körökre vonatkozó ismeretek együttes alkalmazását igényli. A megoldáshoz látni kell, hogy egy szakasz betölthet egyszerre több szerepet is, azaz lehet például egy derékszögű háromszög átfogója és közben egy kör egy húrja is. Amikor ezt valaki észrevette, azután még alkalmazni kellett a Pitagorasz-tételt, tisztában kellett lenni a kerület és terület fogalmával és kiszámítási módjukkal. A hibatípusokat tekintve a három csoport egészen hasonlóan szerepelt, mindhárom csoportban megjelentek számolási, egyenletrendezési hibák, és megjelent az is, hogy a körszelet kerületéhez nem adták hozzá a húr hosszát, azaz a 90°-hoz tartozó ívvel azonosították a körszelet kerületét. A kísérleti és az elit gimnáziumi kontrollcsoport közötti fő különbség a megoldás algebra részében rejlett. A kísérleti csoportban minden tanuló tudta, hogyan kell elkezdeni a feladatot, azonban súlyos algebrai hibákat, például hogy $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$, valamint sok számítási és átrendezési hibát követtek el. Számukra a feladat túl összetett volt, vagy az algebra téma számukra nehezebben ment. Eközben az elitiskola diákjai ritkán követtek el súlyos algebrai hibákat. A szakgimnáziumi kontrollcsoport diákjai általában el sem jutottak a feladat számítási részéhez, az a néhány diák, aki eljutott, vagy az algebrába bonyolódott bele, vagy a mértékegységekkel kapcsolatban követett el hibákat.

Összehasonlítás a korábbi év évfolyamával



20. ábra

A kísérleti csoport tanárnője a kísérletet megelőző évben is tanított két kilencedikes csoportot a szakgimnáziumban, ezért összevetettük az ő eredményeiket is a kísérleti csoport eredményeivel. Ez a kísérlet előtti témazáró dolgozat az „Egybevágósági transzformációk” témaköréből megtalálható a függelékben C részében. A két dolgozat által átfogott témakörök nagyjából megegyeztek, de három fogalom-, illetve feladatkör az, amit összehasonlíthatónak tartunk: a szimmetriákkal kapcsolatos elméleti tudásról szóló feladatok, a fok és ívmérték közötti átváltások és a vektorműveletekkel kapcsolatos feladat. A dolgozat elméleti feladatai nem igényeltek indoklásokat, a vektorokkal való műveletekkel kapcsolatos feladatot egyszerűbb szerkesztéssel meg lehetett oldani, valamint a fok és ívmérték közötti átváltások esetén csak egész szögek, illetve a π egész számú többszöröseivel és egy nevezetes hányadával

($\pi/2$-vel) kellett dolgozni. Ez alapján azt gondoljuk, hogy ezt a dolgozatot akár egy felszínesebb tudással is meg lehetett írni ugyanolyan, vagy akár jobb eredménnyel is. Az eredmények összehasonlítását a 20. ábra szemlélteti. Látható, hogy mindhárom témakör esetén a kísérleti csoport több, mint 10%-kal jobban teljesített összetettebb feladatok esetén.

Felmerülő kérdések

Esettanulmányunk a kilencedik évfolyamon sok szempontból meggyőző volt, várakozáson felüli teljesítményt nyújtottak a kísérleti csoport tanulói.

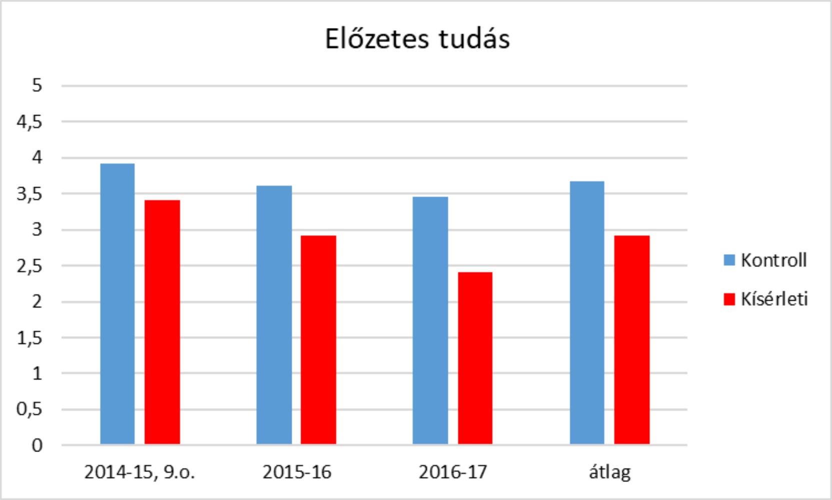
Felmerült bennünk egyrészt az a kérdés, hogy a teszteléses tanulás hatással van-e a tanulók általános előhívási képességére, azaz hogy talán a kísérleti csoport nem csak a geometria területén nyújt majd kiemelkedő teljesítményt. Elképzelhetőnek tartottuk, hogy maga a tesztelés gyakorlása esetleg pozitívan hat magára az előhívási folyamatra, és ezáltal a más tantárgyakban nyújtott teljesítményre is. Mint megtudtuk a szakgimnáziumi osztály néhány tanárától, ők nem éreztek fejlődést a kísérleti csoport diákjainál és a dolgozateredményeik alapján sem láttak teljesítménybeli különbséget a kísérleti csoport osztálytársaikoz képest, akiket nem tesztelve tanítottak. Ebből arra következtettünk, hogy a kísérleti csoport jó eredményei nem a dolgozatírás begyakorlásának, hanem a geometriatudásuk folyamatos tesztelésének és a tesztelés általi tudásmegerősítésnek volt köszönhető. Természetesen attól még, hogy más tantárgyak esetében nem volt érzékelhető a javulás, ezt az esetlegesen fellépő jelenséget érdemes lenne alaposabb vizsgálatnak alávetni.

Mivel kísérletünk nem laboratóriumi körülmények között zajlott, hanem sok esetben az ideálisnak képzelt helyzeteket megváltoztatták a való élet által diktál körülmények. Végső célunk az előhívásos tanulási módszer, matematika órára vonatkozó, minél tisztábban kimutatható hatása, ezért igyekeztünk a kísérlet megtervezésekor minimalizálni az előhívási hatás mellett megjelenhető egyéb hatásokat. Ennek ellenére bemutatott esettanulmányunknak több megkérdőjelezhető része is van, gyakorlati okokból kifolyólag nem állt módunkban kiegyensúlyozni minden esetleg zavaró körülményt. Egyik ilyen főbb különbségeknek tekintjük a tanulók száma közti eltérést, mert amíg az elit gimnáziumi kontrollcsoportban 34 diák volt, addig a kísérleti csoportban csak 9. Egy másik nagy eltérést a két csoport között az óraszámbeli különbség adta, mert amíg a kísérleti csoportnak csak 11 órája volt a témakörre, addig a gimnáziumi kontrollcsoportnak 24. Felléphettek még ezeken kívül iskolai hatások, évfolyamhatások és tanári hatások. Azaz hogy a módszer mennyiben függhet attól, hogy milyen iskolákban, milyen korosztállyal és tanárokkal végezzük el a kísérletet. Például nem lehet kizárni azt, hogy bizonyos csoportokban bizonyos tanárok nagyobb hatékonysággal képesek tanítani az anyagot. A kísérlet során is már igyekeztünk ezt a hatást finomítani a tanulási folyamatok minél szigorúbb szabályozásával, a csoportok közötti minél szorosabb összehangolással. Ennek ellenére szerettünk volna a lehető legtöbb kételyt kizárni, így ezen zavaró tényezők kisebbítése céljából elvégeztünk egy utókísérletet.

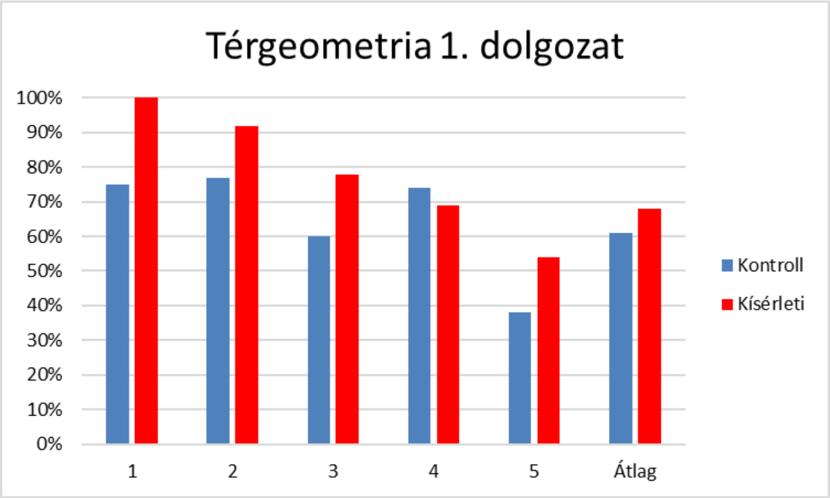
Utókísérlet

Az évfolyam-, a tanári-, a létszám és óraszám miatt esetlegesen fellépő torzító hatások kizárása érdekében elvégeztünk egy utókísérletet 2017. őszén. Ez az utókísérlet szintén egy esettanulmánynak tekinthető, melyben az előző kísérletünkben a kísérleti csoportot tanító kollégát választottuk ki az utókísérleti kontroll és kísérleti csoportok közös tanárának. A tanárnő abban az évben tanított két végzős csoportot ugyanabban a szakgimnáziumban, ahol az előző kísérlet is folyt. A két csoport a gimnáziumi évek során teljesen együtt haladt: ugyanaz a kolléga tanította nekik a matematikát, ugyanannyi órában és ugyanolyan sorrendben és mélységben tanította nekik a témaköröket. Ez alapján elmondható, hogy a két csoport ugyanolyan matematikai háttérrel rendelkezett a kísérlet kezdetekor. A csoportbontás még kilencedik év elején történt, a diákok matematika teljesítménye alapján, majd ezután osztják be a gyerekeket a nyelvi sávokba. Így a két csoport egyike a „németes", a másik csoport az „angolos" csoport. A két csoport előzetes matematika teljesítményének vizsgálatát szükségesnek tartottuk a kísérleti csoport kiválasztásához. A 21. ábrán láthatóak a csoportok átlagos év végi eredményei a 9., 10. és 11. évfolyamokon. Az utolsó két oszlop mutatja a három év átlagát. Az angolos csoport mindhárom korábbi évben szignifikánsan gyengébben teljesített a T-próba alapján, így ezt a csoportot választottuk kísérleti csoportnak és a németes, erősebb csoportot kontroll csoportnak. Az angolos csoportban 12, míg a kontroll csoportban 13 diák volt.

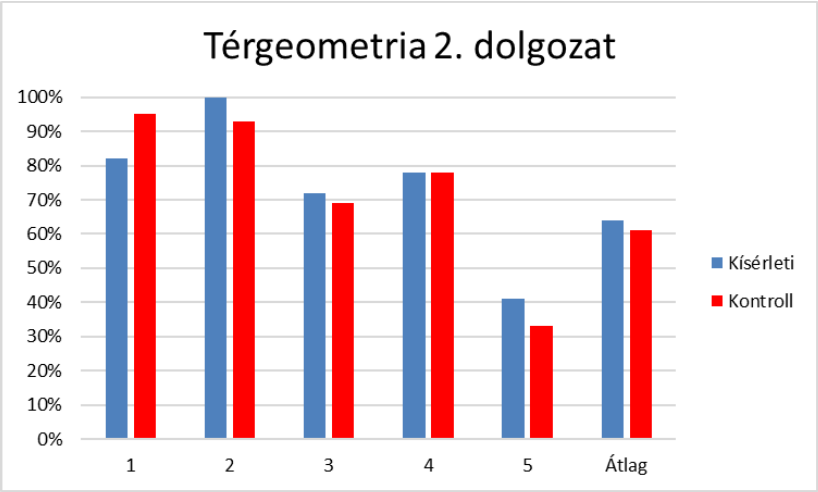
A kísérlet kezdetekor a két csoport már átismételte a sorozatok témakörét és a térgeometria témakör előtt álltak. A kísérlet során az előhívásos tanulás módszerén nem változtattunk, azaz a tesztelt tanítási módszer az előző kísérletben bemutatott módszerrel teljesen megegyezik. Azaz a kísérleti csoport minden óra végén írt egy bő öt perces emlékeztetőt az aznap tanult anyagrészből, míg a kontrollcsoportot nem tesztelték, őket hagyományos módszerrel tanították. A térgeometria témakörére mindkét csoportnak hat hét állt rendelkezésére, ami alatt kétszer írtak dolgozatot a diákok. A 22. és 23. ábrák mutatják ezen dolgozatok eredményeit.



21. ábra



22. ábra



23. ábra

A diagramok vízszintes tengelyén a számok jelölik a dolgozat feladatainak sorszámait, és a diagramok az egyes feladatokon elért átlagos pontszámokat mutatják százalékban. A kísérleti csoport az első dolgozatban kiemelkedően, a második dolgozat során a kontrollcsoporttól megkülönböztethetetlenül szerepelt.

Ezen esettanulmány erőssége, hogy a vizsgált csoportok közötti eltérést sikerült minimalizálni. Ezzel tehát megerősíthetjük azt az eredményünket, hogy a tesztelése tanulás matematika órán is hatékonyabb tanulási és tanítási módszernek bizonyul a hagyományos (ismétlést, újramagyarázást, diktálást, stb…) munkaformáknál.

Diszkusszió

Ezen kutatás első része egy budapesti szakgimnáziumban és elit gimnáziumban végzett esettanulmányt mutat be, melyben az előhívásos tanulás módszerének hosszútávú hatását vizsgáljuk matematika órán. A szakgimnázium egyértelműen a hátrányos helyzetű iskolák közé sorolható az évente megújuló kompetenciamérések alapján, míg az elit gimnázium évek óta Budapest legjobb 10 középiskolája közé tartozik. Az esettanulmány egyik fő célja annak kiderítése volt, vajon csökkenthető-e a szakgimnáziumok és a gimnáziumok közötti matematikai teljesítménykülönbség e speciális módszer alkalmazásával. A kísérlet során háromféle csoport eredményeit hasonlítottuk össze: a kísérleti szakgimnáziumi csoport, a kontroll szakgimnáziumi csoport és az elit gimnáziumi kontrollcsoportok eredményeit. A témazáró dolgozat kvantitatív és kvalitatív eredményei alapján az előhívásos tanulás hatással volt a hosszútávú geometria tudásra.

Válasz az 1. kérdésre

A kísérleti csoport az alkalmazott módszernek köszönhetően kiemelkedően teljesített. A teszteléssel tanított diákok a témazáró dolgozat feladataiban lényegesen magasabb pontszámot értek el, jobban megértették a dolgozatban szereplő definíciókat és kevesebb hibát követtek el érveléseik és problémamegoldó stratégiájuk során, mint szakgimnáziumi társaik, akiket nem teszteltek a témakör során.

Válasz a 2. kérdésre

A témazáró eredményeket megvizsgálva megállapítottuk, hogy a kísérleti szakgimnáziumi csoport és az elit gimnázium csoportjainak átlagpontszámai statisztikailag megegyeztek. A geometriai egybevágóság témakörében a kísérleti csoport közel olyan jól teljesített, mint az elit gimnázium tanulói. Bár statisztikailag megegyezett a két csoport eredménye, az első és az utolsó feladatban mégis észrevehető különbséget tapasztaltunk az elit gimnazisták javára.

Megállapítottuk, hogy ez a különbség a kísérleti csoport algebrai (számítási hibák, egyenletrendezési hibák) és formális logikai hiányosságainak tulajdonítható. Ezzel tehát elmondhatjuk, hogy az előhívásos tanulás módszerének segítségével sikerült csökkenteni egy elit gimnázium és hátrányos helyzetű szakgimnázium iskola tanulói közötti teljesítménykülönbséget a hosszú távú tudást tekintetében.

További megjegyzések és a kísérlet korlátai

Olvasva a kísérletet talán elgondolkodtató lehet, hogy a kísérleti csoportnak miért éppen egy szakgimnáziumi csoportot választottunk. A szakirodalmi áttekintés alapján mi erősen sejtettük, hogy a matematikatanulás során is fontos szerepet játszhat az előhívási hatás. A szakgimnáziumi csoport kiválasztása nem csak abból a szempontból tűnt jó választásnak, hogy ezáltal hátrányos helyzetű diákokon segíthettünk (akár igényelték ezt akár nem), hanem hogy a tanulási körülmények viszonylag tiszták maradtak és ezáltal az előhívás hatását viszonylag torzítalanul tudtuk vizsgálni. Ugyanis a választott szakgimnáziumi csoport diákjairól személyesen tudtuk, hogy motiválatlanok az iskolai órákkal kapcsolatban, ami főként a hátrányos helyzeteik halmozásából fakadt. Így a szakgimnáziumi diákokra ható előhívásos tanulási módszert nem zavarták olyan „zavaró" körülmények, mint otthoni önálló tanulás, házi feladat írás, vagy az órai feladatok barátokkal való megbeszélése, vagy az otthoni, matematikai tartalmú beszélgetések.

Felmerülhet az a gondolat is, hogy a kísérleti csoport jó eredménye nem vagy nem kizárólag a tesztelés közvetlen memóriára ható pozitív hatásával van kapcsolatban, hanem a kísérlet során egyre pozitívabb önbecsülés is hozzájárult a fejlődéshez. Hiszen a kísérleti csoport felé már több tanáruk is jelezte, hogy az évfolyamhoz képest gyengén teljesítenek. A kísérleti csoport az óravégi teszteken abszolút jól szerepelt, hiszen átlageredményük 80%-os volt. Ezzel tehát létrejöhetett bennük egy pozitív attitűd, elkezdhettek hinni abban, hogy képesek elsajátítani a tananyagot – csupán a tesztelés általi önismeretjavulás miatt (Bandura, 2008). Ez a hatás a kísérleti csoport tanárnője szerint érzékelhető volt, de a diákok az otthoni munka fogalmának megismeréséig egészen biztosan nem jutottak el. Ezzel tehát egyéb tanulási módok fellépésének zavaró hatását továbbra is kizárhatjuk.

A kutatási eredményeink pontosítása és az előhívás további hatásainak vizsgálata céljából előremutatónak látnánk egy hasonló kísérlet végrehajtását, melyben a résztvevők számát növelnénk. Érdemes lenne még vizsgálni az előhívási hatást különböző iskolai körülmények között, hogy elemezni lehessen a teszteléses tanulási módszer hatékonyságát a matematika tanítás és tanulás különböző témaköreiben és szintjein. Úgy gondoljuk, hogy a megfelelő körülmények között alkalmazott előhívásos tanulásnak fontos szerepe van a hosszútávú matematikai tudás és képességek létrejöttében, fejlesztésében. Így az előhívásos tanulási módszer segítségével a matematikaoktatás hatékonyabbá válhat.

Összefoglalás

Dolgozatom két cikken alapszik, az ezekben leírt eredményeket fejtem ki részletesen – ez alapján a dolgozat két részre tagolódik. Az első részben budapesti és miskolci középiskolások geometriai megértési szintjeinek elemzése olvasható. A megértési szintek elméletét a van Hiele házaspár dolgozta ki, majd Usiskin hozott létre egy tesztet, ami alapján a van Hiele szint mérhetővé is vált. Megvizsgálva a NAT elvárásait és ezeket összevetve a van Hiele szintekkel, megállapítottuk, hogy a NAT az általános iskola végénél járó diákoktól már a harmadik szintet, míg a középiskola végére már a negyedik szintet várja el. A kitöltött tesztek alapján azonban megállapítottuk, hogy a középiskolások se bemenetkor, se kimenetkor nem érik el a hármas szintet sem, azaz a középiskola végére sem fejlődik a geometriai megértésük a NAT szerint már a bemenethez szükséges szintre. A várt fejlődés elmaradásának okait vizsgálva eljutottunk az érettségi követelményekhez és a konkrét érettségi vizsgán szereplő geometria feladatokhoz. Azt tapasztaltuk, hogy az érettségi vizsgán szereplő feladatokban, bár szerepel a „bizonyítás", „mutasd meg" kifejezések, mégis ezen feladatok megoldásához nem szükséges eljutni a negyedik szintre. Még az emelt szintű érettségi geometria feladatainak megoldásai sem igénylik a negyedik szint meglétét. Mivel a középiskolák, a tanárok és a középiskolás diákok fő motivációját az érettségi vizsgákon való jó szereplés adja, ezért az ott szereplő feladatok nehézségi foka határozza meg az elérni kívánt célt és nem a NAT-ban megfogalmazott kompetenciákat próbálják meg elérni. Ez pedig oda vezet, hogy bár a középiskolások négy éven keresztül újabb és újabb geometriai ismeretekkel és feladat típusokkal találkoznak, geometriai szemléletük mégsem fejlődik a van Hiele értelemben. Összefoglalva tehát, a diákoktól elvárt szint és a diákok valódi geometriai tudása között nagy az eltérés a magyarországi középiskolákban. Véleményünk szerint, amíg az érettségi vizsga nem követeli meg a bizonyítás iránti igény meglétét, addig a diákok általában ezt a szintet nem is érik el, és így ezen irányba nem indul meg fejlődés. Azt, hogy milyen típusú feladatokkal és kérdésekkel lehetne fejleszteni a bizonyítási képességeket, már régóta vizsgálják, de a hazai oktatásban is érdemes lenne külön figyelmet fordítani rá.

A dolgozat második részében az előhívásos tanulási módszernek valós iskolai, matematika órákhoz kapcsolódó alkalmazását mutatom be. Munkánk során azt vizsgáltuk meg, hogy tapasztalható-e a tesztelési hatás nem laboratóriumi körülmények között is. Elvégzett esettanulmányunk abból a szempontból is újszerűnek számít, hogy a tesztelési hatást nem a már korábban vizsgált lexikális anyag tanulása során vizsgáltuk, hanem matematika órán. Azt pedig tudjuk, hogy a sikeres matematikai teljesítményhez nem elég az anyag lexikális ismerete, hanem érteni kell a fogalmakat, az összefüggéseket és következtetéseket kell létrehoznunk, azaz alkalmaznunk kell megfelelő logikai sorrendben a megtanult fogalmakat, tételeket. Esettanulmányunkat budapesti középiskolákban – egy szakgimnáziumban és egy elit gimnáziumban –, kilencedikes és tizenkettedikes tanulókkal végeztük. Fő kísérletünkben kilencedikes szakgimnáziumi csoport tanulóit tanítottuk aktív előhívással az egybevágósági transzformációk témakörére, míg a szakgimnáziumi társaik és az elit gimnáziumi tanulók hagyományos módszerrel tanultak. A csoportok ugyanazokkal a fogalmakkal, megoldási módszerekkel és feladattípusokkal ismerkedtek meg a kísérlet során, majd a témakör végén egy közös témazáró dolgozatot írtak. Statisztikailag megállapítható volt, hogy a kísérleti csoport kiemelkedően szerepelt a saját iskolatársaihoz képest és hogy az elit iskola diákjaival megegyeztek eredményeik.

Egyik célunk az előhívási hatás minél tisztább, zajoktól mentesebb vizsgálata matematika órán. Ezért létrehoztunk egy utókísérletet, melyben olyan végzős diákokat vizsgáltunk, akiknek addigi matematikából szerzett tapasztalatai teljesen megegyezett: közös tanárnő, közös dolgozatok, közös tanmenet. A kísérleti csoport előzetes tudása statisztikailag gyengébb volt. A két csoport az utókísérlet alatt a térgeometria témakörét tanulta hat héten keresztül, ezalatt két dolgozatot írtak meg. Ezen dolgozateredményeket vetettük össze a csoportok összehasonlítására. Megállapítható volt, hogy a kísérleti csoport matematikai teljesítménye statisztikailag nem különbözött a kontrollcsoport teljesítményétől. Azaz ellentétben az előzetesen mért gyengébb eredményeikkel, a tesztelési hatás segítségével felzárkóztak a kontrollcsoportbeli diákok teljesítményéhez.

A kapott eredményeink alátámasztják az előhívásos tanulási módszer középiskolában, matematika órán, a geometria különböző témakörei során való alkalmazásának eredményességét.

Hivatkozások

Adesope, O. O., Trevisan, D. A., & Sundarayan, N. (2017). Rethinking the use of tests: A meta-analysis of practice testing. *Review of Educational Research, 87*(3), 659–701. https://doi.org/10.3102/0034654316689306.

Agarwal, P. K., Bain, P. M., & Chamberlain, R. W. (2012). The value of applied research: Retrieval practice improves classroom learning and recommendations from a teacher, a principal, and a scientist. *Educational Psychology Review, 24(*3), 437–448. https://doi.org/10.1007/s10648-012-9210-2.

Astuti, R., Suryadi, D., Turmudi, T. (2018). Analysis on geometry skills of junior high school students on the concept congruence based on Van Hiele's geometric thinking level. *Journal of Physics Conference Series*, pp. 1–5, https://doi.org/10.1088/1742-6596/1132/1/012036.

Atkinson, R. C., Paulson, J. A. (1972). *An approach to the psychology of instruction. Psychological Bulletin, 78*(1), 49-61.

Auguste, B. G., Hancock, B., & Laboissière, M. (2009). *The economic impact of the achievement gap in America's schools.* McKinsey & Company.

Avvisati, F., & Borgonovi, F. (2020). Learning mathematics problem solving through test practice: A randomized feld experiment on a global scale. *Educational Psychology Review, 32*(3), 791–814. https://doi.org/10.1007/s10648-020-09520-6.

Bailey, M. J., & Dynarski, S. M. (2011). Inequality in postsecondary education. In G. J. Duncan, R. J. Murnane (Eds.), *Whither opportunity? Rising inequality, schools, and children's life chances* (pp. 117–132). Russell Sage Foundation & Spencer Foundation.

Bouwmeester, S., Verkoeijen, P. (2011). Why do some children benefit more from testing than others? Gist trace processing to explain the testing effect. *Journal of Memory and Language 65*(1):32-41.

Braun, I., Schröder, J. E. (2014). Cooperation schule hochschule, Baden-Württembergs: Hochschulen Baden-Württembergs.

Buchin Z. & Mulligan N. (2019). The testing efect under divided attention: Educational application. *Journal of Experimental Psychology: Applied. 25*(4), 558–575. https://doi.org/10.1037/xap0000230.

Burger, W.F., Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education 17*(1), pp. 31–48, https://doi.org/10.2307/749317.

Bursill-Hall, P. (2002). Why do we study geometry? Answers through the ages, Cambridge: Department of Pure Mathematics and Mathematical Statistics, University of Cambridge.

Butler, A. C., Karpicke, J. D., & Roediger, H. L. (2007). The efect of type and timing of feedback on learning from multiple-choice tests. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, *13*(4), 273–281. https://doi.org/10.1037/1076-898X.13.4.273.

Butler, A. C. (2010). Repeated testing produces superior transfer of learning relative to repeated studying. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, *36*(5), 1118–1133. https://doi.org/10.1037/a0019902.

Calderón, C. O., & Caterino, L. C. (2016). Mathematics learning development: The role of long-term retrieval. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(7), 1377–1385. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9655-0.

Carpenter, S., Pashler, H., Rohrer, D,, Cepeda N.,J. (2007). *Enhancing learning and retarding forgetting: Choices and consequences.* Psychonomic Bulletin & Review, 14 (2), 187-193.

Carpenter, S. (2009). Cue Strength as a Moderator of the Testing Effect: The Benefits of Elaborative Retrieval. *Journal of Experimental Psychology*, 1563-1569.

Clements, D., Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning, in: Jan. 1992, pp. 420–464.

Csapodi, Cs. Koncz, L. (2012-2015). The efficiency of written final exam questions in mathematics based on voluntary data reports. *Teaching Mathematics and Computer Science 14*.1 (2016), pp. 63–81, https://doi.org/10.5485/TMCS.2016.0417.

Dirkx, K., Kester, L., Kirschner, P. (2014). The Testing Effect for Learning Principles and Procedures from Texts. *The Journal of Educational Research*, 00:1–8.

Dobson, J. L., & Linderholm, T. (2015). Self-testing promotes superior retention of anatomy and physiology information. *Advances in Health Sciences Education*, *20*(1), 149–161. https://doi.org/10.1007/s10459-014-9514-8.

Donoghue, G. M., & Hattie, J. A. C. (2021). A meta-analysis of ten learning techniques. *Frontiers in Education*, *6*, 581216. https://doi.org/10.3389/feduc.2021.581216.

Dunlosky J, Rawson KA, Marsh EJ, Nathan MJ, Willingham DT. (2013). Improving Students' Learning With Effective Learning Techniques: Promising Directions From Cognitive and Educational Psychology. *Psychol Sci Public Interest*, *14*(1):4-58. https://doi.org/10.1177/1529100612453266.PMID:26173288.

Eglington, L. G., & Kang, S. H. K. (2018). Retrieval practice benefts deductive inference. *Educational Psychology Review*, *30(*1), 215–228. https://doi.org/10.1007/s10648-016-9386-y.

Erdélyi, É., Dukán, A., Szabó, Cs. (2019). The transition problem in Hungary: curricular approach, *Teaching Mathematics and Computer Science 17*(1), pp. 1–16, https://doi.org/10.5485/TMCS.2019.0454.

Erdogan, T., Durmus, S. (2009). The effect of the instruction based on Van Hiele model on the geometrical thinking levels of preservice elementary school teachers, *Procedia - Social and Behavioral Sciences 1*(1), pp. 154–159, https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2009.01.029.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, *3*, i–196. https://doi.org/10.2307/749957.

Fritz, C. O., Morris, P. E., Nolan, D., Singleton, J. (2007). Expanding retrieval practice: an effective aid to preschool children's learning. *The Quarterly Journal of Experimental Psichology, 60*(7), 991 – 1004.

Jensen, J. L., McDaniel, M. A., Woodard, S. M., & Kummer, T. A. (2014). Teaching to the test or testing to teach: Exams requiring higher order thinking skills encourage greater conceptual understanding. *Educational Psychology Review, 26*(2), 307–329. https://doi.org/10.1007/s10648-013-9248-9.

Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry, in: Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice. London, GB: Routledge, pp. 121–139. https://doi.org/10.4324/9780203165874.

Kang, S., McDermott, K., Roediger, H. (2007). Test format and corrective feedback modify the effect of testing on long-term retention. *European Journal of Cognitive Psychology*, 528-558.

Karpicke, J. D., & Roediger, H. L. III. (2007). Repeated retrieval during learning is the key to long-term retention. *Journal of Memory and Language*, *57*(2), 151–162. https://doi.org/10.1016/j.jml.2006.09.004.

Keresztes, A., Kaiser, D., Kovács, G., & Racsmány, M. (2014). Testing promotes long-term learning via stabilizing activation patterns in a large network of brain areas. *Cerebral Cortex, 24*(11), 3025– 3035. https://doi.org/10.1093/cercor/bht158.

Kospentaris, G., Spyrou, P. (2008). Assessing the development of geometrical thinking from the visual towards the analytic-descriptive level, *Annales de didactique et de sciences cognitives 13*(5), pp. 133–157.

Kovács, Veronika (2019). Gráfok modern bevezetése a középiskolában. *Képzés és Gyakorlat, 15(1-2.).* https://doi.org/10.17165/TP.2017.1-2.16.

Kratochwill, T. (1977). The Effects of Overlearning on Preschool Children's Retention of Sight Vocabulary Words. *Reading Improvement, 14*(4), 223-8.

Kromann, C. B., Jensen, M. L., & Ringsted, C. (2009). The effect of testing on skills learning. *Medical Education, 43*(1), 21–27.

Little J. L., Storm, B.C., Bjork E.L. (2011). The costs and benefits of testing text materials. *Memory*, *19*(4): 346-59.

Logan, JM[1], Balota, DA (2008). Expanded vs. equal interval spaced retrieval practice: exploring different schedules of spacing and retention interval in younger and older adults. *Neuropsychology and Cognition, 15*: 257–280.

Lyle, K. B., & Crawford, N. A. (2011). Retrieving essential material at the end of lectures improves performance on statistics exams. *Teaching of Psychology, 38*(2), 94–97. https://doi.org/10.1177/0098628311401587.

Lyle, K. B., Bego, C. R., Hopkins, R. F., Hieb, J. L., & Raltson, P. A. (2020). How the amount and spacing of retrieval practice afect the short- and long-term retention of mathematics knowledge. *Educational Psychology Review, 32,* 277–295. https://doi.org/10.1007/s10648019-09489-x.

Maddox, G., Balota, D., Coane, J. Duchek, J., 2011. The Role of Forgetting Rate in Producing a Benefit of Expanded Over Equal Spaced Retrieval in Young and Older Adults. *Psychology and Aging 26*(3):661-70.

Mammana, C., V., V.: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Dordrecht: Springer, 1998, https://doi.org/10.1007/978-94-011-5226-6.

Martínez-Sierra, G., García-García, J., Valle-Zequeida, M., & Dolores-Flores, C. (2020). High school mathematics teachers' beliefs about assessment in mathematics and the connections to their mathematical beliefs. *International Journal of Science and Mathematics Education, 18*, 485–507. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09967-2.

May, B. M. (2021). Effects of spaced, repeated retrieval practice and test-potentiated learning on mathematical knowledge and reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(1), 92–107. https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1961034.

McDaniel, M. A., Anderson, J. L., Derbish, M. H., & Morrisette, N. (2007). Testing the testing effect in the classroom. *European Journal of Cognitive Psychology, 19*(4-5), 494–513. https://doi.org/10.1080/09541440701326154.

McDaniel, M. A., Thomas, R. C., Agarwal, P. K., McDermott, K. B., & Roediger, H. L. (2013). Quizzing in middle-school science: Successful transfer performance on classroom exams. *Applied Cognitive Psychology, 27*(3), 360–372. https://doi.org/10.1002/acp.2914.

McDermott, K. B., Agarwal, P. K., D'Antonio, L., Roediger, H. L., III., & McDaniel, M. A. (2014). Both multiple-choice and short-answer quizzes enhance later exam performance in middle and high school classes. *Journal of Experimental Psychology: Applied, 20*(1), 3–21. https://doi.org/10.1037/xap0000004.

McDermott, K. B. & Roediger, H. L. (2023). Memory (encoding, storage, retrieval). In R. Biswas-Diener & E. Diener (Eds), Noba textbook series: Psychology. Champaign, IL: DEF publishers. Retrieved from http://noba.to/bdc4uger.

Metcalfe, J., Kornell, N. (2007). Principles of Cognitive Science in Education: The Effects of Generation, Errors, and Feedback. *Psychonomic Bulletin and Review, 14*, 225-229.

Metcalfe, J., Kornell, N. (2009). Delayed versus immediate feedback in children's and adults' vocabulary learning. *Memory & Cognition, 37*(8), 1077-1087.

Moyer, T.O. (2021). Raising the Van Hiele Level of College Students, *PRIMUS*, 1-15. https://doi.org/10.1080/10511970.2021.1978603.

Peterson, D., & Wissman, K. (2018). The testing efect and analogical problem-solving. *Memory, 26*(10), 1–7. https://doi.org/10.1080/09658211.2018.1491603.

Rawson, K. A., Pyc, M. (2010). Why Testing Improves Memory: Mediator Effectiveness Hypothesis. *Science, 330*(6002), pp. 335. https://doi.org/10.1126/science.1191465.

Rawson, K. A., Vaughn, K. E., Walsh, M., Dunlosky, J. 2018. Investigating and explaining the effects of successive relearning onlong-term retention. *Journal of Experimental Psychology: Applied.*

Rékasi, A., Szabó, Cs. (2021). Modification of the geometry curriculum in relation to the curriculum reform in the light of the Van Hiele levels, in: Münster: WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, 2021, pp. 93–110. https://doi.org/10.37626/GA9783959872003.0 .15.

Roediger, H. L., III., & Karpicke, J. D. (2006). Test-enhanced learning: Taking memory tests improves long-term retention. *Psychological Science*, *17*(3), 249–255. https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2006.01693.x.

Roediger, H. L., & Butler, A. C. (2011). The critical role of retrieval practice in long-term retention*. Trends in Cognitive Sciences, 15*(1), 20–27. https://doi.org/10.1016/j.tics.2010.09.003.

Roediger, H. L., III., Agarwal, P. K., McDaniel, M. A., & McDermott, K. B. (2011). Test-enhanced learning in the classroom: Long-term improvements from quizzing. *Journal of Experimental Psychology: Applied, 17(*4), 382–395. https://doi.org/10.1037/a0026252.

Rowland, C. A. (2014). The efect of testing versus restudy on retention: A meta-analytic review of the testing efect. *Psychological Bulletin, 140*(6), 1432–1463. https://doi.org/10.1037/a0037559.

Schmidmaier, R, Ebersbach, R, Schiller, M, Hege, I, Holzer, M, Fischer, MR (2011). Using electronic flashcards to promote learning in medical students: retesting versus restudying. *Medical Education, 45*(11):1101-10.

Senk, S. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs, *Journal for Research in Mathematics Education 20*(3), pp. 309–321, https://doi.org/10.2307/749519.

Smith, M. A., & Karpicke, J. D. (2014). Retrieval practice with short-answer, multiple-choice, and hybrid tests. *Journal of Applied Research in Memory & Cognition*, 784-802.

Sumowski, JF[1], Chiaravalloti, N, Deluca, J., (2010). Retrieval practice improves memory in multiple sclerosis: clinical application of the testing effect. *Neuropsychology*. *24*(2):267-272.

Szilágyi, B., Megyeri, K., Csuta, Á. K. (2021). A geometriai gondolkodás szintjeinek feltérképezése a van Hiele-elmélet segítségével. *Opus et Educatio, 8*(4), https://doi.org/10.3311/ope.483.

Tran, R., Rohrer, D., & Pashler, H. (2015). Retrieval practice: The lack of transfer to deductive inferences. *Psychonomic Bulletin & Review*, *22*(1), 135–140. https://doi.org/10.3758/s13423-014-0646-x.

Tse CS, Balota DA, Roediger HL (2010). The benefits and costs of repeated testing on the learning of face-name pairs in healthy older adults. *Psychol Aging*, *25*(4):833-45.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project. Chicago: Chicago Univ, IL.

Usiskin, Z., & Senk, S. (1990). Evaluating a Test of van Hiele Levels: A Response to Crowley and Wilson. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 242–245. https://doi.org/10.2307/749378.

Ural, A.: Investigating 11th Grade Students' Van-Hiele Level 2 Geometrical Thinking, Journal Of Humanities And Social Science 21.12 (2016), pp. 13–19, https://doi.org/10.9790/0837-2112061319.

Vygotsky, L. (1978). Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes, Cambridge: Harvard University Press, Cambridge. https://doi.org/10.2307/2955559.

Vojkuvkova, I., Haviger, J. (2015). The van Hiele Levels at Czech Secondary Schools, *Procedia - Social and Behavioral Sciences 171*, pp. 912–918, https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.209.

Yeo, D. J., & Fazio, L. K. (2019). The optimal learning strategy depends on learning goals and processes: Retrieval practice versus worked examples. *Journal of Educational Psychology*, *111*(1), 73–90. https://doi.org/10.1037/edu0000268.

Zachos, I. (1995). Register of Educational Research in the United Kingdom – Problem Solving in Euclidean Geometry in Greek Schools, in: vol. 10, 0615, London and New York: Routledge.

Wilson, M. (1990). Measuring a van Hiele Geometry Sequence: A Reanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 230–237. https://doi.org/10.2307/749376.

Wissman, K. T., Zamary, A., & Rawson, K. A. (2018). When does practice testing promote transfer on deductive reasoning tasks? *Journal of Applied Research in Memory and Cognition*, *7*(3), 398–411. https://doi.org/10.1016/j.jarmac.2018.03.002.

Mellékletek

A: Usiskin-féle geometriai teszt a van Hiele szintek mérésére

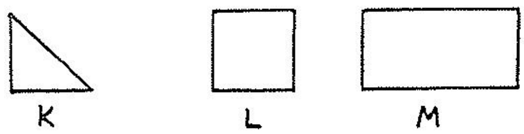
A: Van Hiele geometriai teszt[•]

Minden kérdésnél egyetlen válasz helyes.

Kidolgozási idő: 35 perc.

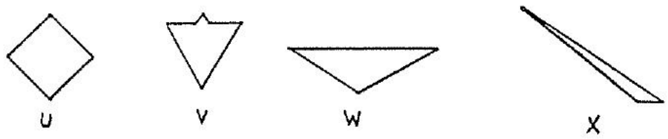
1. Melyik négyzet?

a. Csak K.
b. Csak L.
c. Csak M.
d. Csak L és M.
e. Mind az.



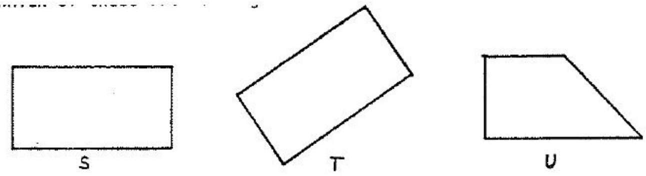
2. Melyik háromszög?

a. Egyik sem.
b. Csak V.
c. Csak W.
d. Csak W és X.
e. Csak V és W.



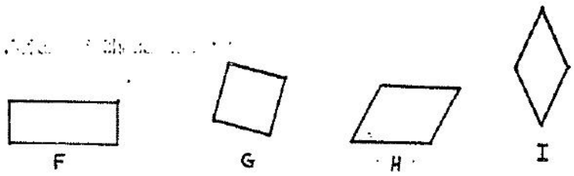
3. Melyik téglalap?

a. Csak S.
b. Csak T.
c. Csak S és T.
d. Csak S és U.
e. Mind az.



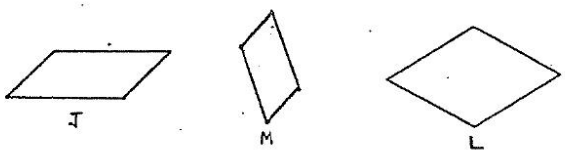
4. Melyik négyzet?

a. Egyik sem.
b. Csak G.
c. Csak F és G.
d. Csak G és I.
e. Mind az.

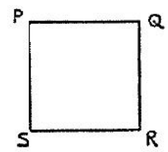


5. Melyik paralelogramma?

a. Csak J.
b. Csak L.
c. Csak J és M.
d. Egyik sem.
e. Mind az.

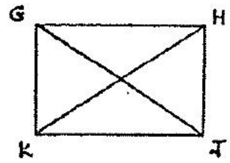


6. PQRS egy négyzet (lásd ábra). Melyik állítás igaz rá?



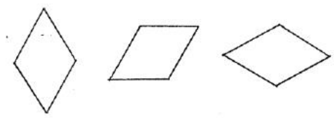
a. PR és RS ugyanolyan hosszúságú.
b. QS és PR merőlegesek egymásra.
c. PS és QR merőlegesek egymásra.
d. PS és QS ugyanolyan hosszúságú.
e. A Q-nál lévő szög nagyobb, mint az R-nél lévő szög.

7. GHJK egy téglalap, GJ és HK az átlói (lásd ábra). Melyik állítás nem igaz rá a-d közül?



a. Négy derékszöge van.
b. Négy oldala van.
c. Átlói egyenlő hosszúságúak.
d. Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak.
e. a-d közül mind igaz rá.

8. Melyik állítás nem igaz egy tetszőleges rombuszra (lásd ábra) a-d közül?

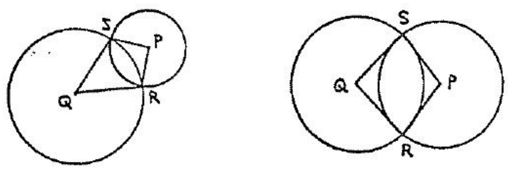


a. A két átlója egyenlő hosszúságú.
b. Mindkét átlója felezi a rombusz két-két szögét.
c. A két átlója merőleges egymásra.
d. Szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
e. a-d közül mind igaz.

9. Melyik állítás igaz egy egyenlő szárú háromszögre (lásd ábra) a-d közül?

a. Mindhárom oldala egyenlő hosszúságú kell, hogy legyen.
b. Az egyik oldalának kétszer akkorának kell lennie, mint egy másiknak.
c. Legalább két szöge egyenlő nagyságú kell, hogy legyen.
d. Három szögének egyenlő nagyságúnak kell lennie.
e. a-d közül egyik sem igaz.

10. Egy P és egy Q középpontú kör metszéspontjai R és S. Ezek a pontok meghatározzák a PQRS alakzatot. Két példát meg is adtunk (lásd ábra). a-d közül melyik állítás nem mindig igaz?



a. PQRS-nek van két egyenlő hosszúságú oldalpárja.
b. PQRS-nek legalább két szöge egyenlő nagyságú.
c. A PQ és RS egyenesek merőlegesek egymásra.
d. A P-nél és Q-nál lévő szögek egyenlő nagyságúak.
e. a-d közül mind igaz.

11. Tekintsük a következő két állítást:

i. Az F alakzat téglalap.
ii. Az F alakzat háromszög.

Melyik igaz az alábbiak közül?

a. Ha i igaz, akkor ii is az.
b. Ha i hamis, akkor ii igaz.
c. i és ii egyszerre nem lehet igaz.
d. i és ii nem lehet egyszerre hamis.
e. a-d közül egyik sem igaz.

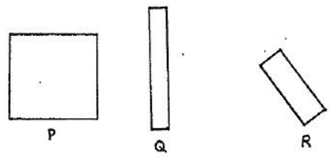
12. Tekintsük a következő két állítást:

i. Az ABC háromszögnek van három egyenlő hosszúságú oldala.
ii. Az ABC háromszögben a B-nél, illetve a C-nél lévő szögek egyenlő nagyságúak.

Melyik igaz az alábbiak közül?

a. i és ii egyszerre nem lehet igaz.
b. Ha i igaz, akkor ii is az.
c. Ha ii igaz, akkor i is az.
d. Ha i hamis, akkor ii is hamis.
e. a-d közül egyik sem igaz.

13. Az alábbiak közül melyik téglalap?



a. Mind az.
b. Csak Q.
c. Csak R.
d. Csak P és Q.
e. Csak Q és R.

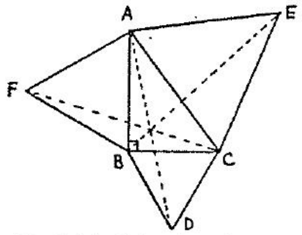
14. Melyik igaz?

a. A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes négyzetnek is.
b. A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes téglalapnak is.
c. A téglalapok összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.
d. A négyzetek összes tulajdonsága tulajdonsága az összes paralelogrammának is.
e. a-d közül egyik sem igaz.

15. Az alábbiak közül melyik az, ami minden téglalapra igaz, de bizonyos paralelogrammákra nem?

a. Szemközti oldalai egyenlő hosszúságúak.
b. Átlói egyenlő hosszúságúak.
c. Szemközti oldalai párhuzamosak.
d. Szemközti szögei egyenlő nagyságúak.
e. a-d közül egyik sem igaz.

16. Az alábbi ábrán az ABC háromszög derékszögű (a B-nél lévő szöge a derékszög), míg a CBD, ACE és BAF háromszögek szabályosak:



Meg lehet mutatni, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át. Mit mondana számodra ez a bizonyítás?

a. Csak a fent megrajzolt háromszög esetén lehetünk biztosak abban, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
b. Néhány, de nem mindegyik derékszögű háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak á.
c. Bármelyik derékszögű háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
d. Bármelyik háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.
e. Bármelyik szabályos háromszögre igaz, hogy az AD, BE és CF szakaszok egy ponton haladnak át.

17. Adott három tulajdonság egy alakzatról:

i. Vannak egyenlő hosszúságú átlói.
ii. Az alakzat négyzet.
iii. Az alakzat téglalap.

Melyik igaz?

a. i-ből következik ii, amiből pedig iii.
b. i-ből következik iii, amiből pedig ii.
c. ii-ből következik iii, amiből pedig i.
d. iii-ből következik i, amiből pedig ii.
e. iii-ből következik ii, amiből pedig i.

18. Van két állításunk:

i. Ha egy alakzat téglalap, akkor átlói felezik egymást.
ii. Ha egy alakzat átlói felezik egymást, akkor téglalap.

Melyik igaz?

a. i helyességének bizonyításához elég belátni, hogy ii igaz.
b. ii helyességének bizonyításához elég belátni, hogy i igaz.
c. ii helyességének bizonyításához elég találni egy téglalapot, melynek átlói felezik egymást.
d. ii hamisságának bizonyításához elég találni egy olyan alakzatot, amely nem téglalap és átlói felezik egymást.
e. a-d közül egyik sem igaz.

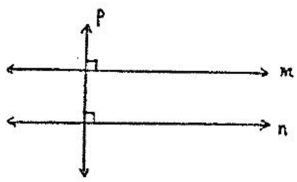
19. A geometriában:

a. minden fogalom definiálható, és minden igaz állításról bizonyítható helyességük.
b. minden fogalom definiálható, de bizonyos állításokról szükségszerű feltenni, hogy igazak.
c. bizonyos fogalmaknak definiálatlanoknak kell lenniük, de minden igaz állításról bizonyítható annak helyessége.
d. bizonyos fogalmaknak definiálatlanoknak kell lenniük, de szükségszerűen vannak olyan állítások, melyekről fel van téve, hogy igazak.
e. a-d közül egyik sem igaz.

20. Tekintsük a következő síkban megfogalmazott állításokat:

i. Két, ugyanarra az egyenesre merőleges egyenes párhuzamos.
ii. Egy egyenes, amelyik merőleges két párhuzamos egyenes egyikére, merőleges a másikára is.
iii. Ha egy egyenes minden pontja egyenlő távolságra van egy másik egyenestől, akkor a két egyenes párhuzamos.

Az alábbi ábrán az m és a p egyenesek merőlegesek egymásra, az n és a p egyenesek is merőlegesek egymásra.



A fenti állítások közül melyikből következhet, hogy m és n párhuzamosak?

a. Csak i-ből.
b. Csak ii-ből.
c. Csak iii-ből.
d. i-ből vagy ii-ből.
e. ii-ből vagy iii-ből.

21. Egy F-geometriában (ami különbözik attól, amihez hozzá vagy szokva) pontosan négy pont van és hat egyenes. Minden egyenesnek pontosan két pontja van. Ha a pontok P, Q, R, S, akkor az egyenesek {P; Q}, {P; R}, {P; S}, {Q; R}, {Q; S}, {R, S}.

Ebben a geometriában a metszi és a párhuzamos a következőt jelenti: például {P; Q} és {P; R} metszik egymást, hiszen P közös pontjuk, míg például {P; Q} és {R; S} párhuzamosak, mivel nincs közös pontjuk.

Az alábbiak közül melyik helyes?

a. {P; R} és {Q; S} metszik egymást.
b. {P; R} és {Q; S} párhuzamosak.
c. {Q; R} és {R; S} párhuzamosak.
d. {P; S} és {Q; R} metszik egymást.
e. a-d közül egyik sem igaz.

22. 1847-ben P. L. Wantzel általánosan bebizonyította, hogy csak körzővel és jelöletlen (azaz távolságmérésre alkalmatlan) vonalzóval nem lehet szöget harmadolni. Milyen következtetéseket tudsz ebből leszűrni?

a. Általánosan igaz, hogy csak körzővel és jelöletlen vonalzóval nem lehet szöget felezni.
b. Általánosan igaz, hogy csak körzővel és jelölt (azaz távolságmérésre alkalmas) vonalzóval nem lehet szöget harmadolni.
c. Általánosan igaz, hogy semmilyen rajzolási eljárással nem lehet szöget harmadolni.
d. Még lehetséges, hogy a jövőben valaki talál egy általános eljárást arra, hogy hogyan lehet csak körzővel és jelöletlen vonalzóval szöget harmadolni.
e. Soha senki nem fog tudni általános eljárást adni arra, hogy hogyan lehet csak körzővel és jelöletlen vonalzóval szöget harmadolni.

23. Létezik olyan J által felfedezett geometria, melyben érvényes az alábbi állítás:
A háromszögek belső szögeinek összege kisebb, mint 180°.
Melyik helyes az alábbiak közül?

a. J hibát követett el a háromszögek szögeinek mérése során.
b. J hibázott a logikai érvelése során.
c. J-nek rossz képzete volt a „helyes” fogalmát illetően.
d. J a szokásos geometria feltevéseitől különböző feltételekből indult ki.
e. a-d közül egyik sem igaz.

24. Két geometriakönyv különböző módon definiálja a téglalap szót. Melyik helyes az alábbiak közül?

a. A könyvek egyikében hiba van.
b. Az egyik definíció hibás, hiszen a téglalapnak nincs két definíciója.
c. Az egyik könyvbeli téglalapoknak más tulajdonságai kell, hogy legyenek, mint a másik könyvbelinek.
d. Az egyik könyvbeli téglalapoknak ugyanazon tulajdonságai vannak, mint a másik könyvbelinek.
e. Elképzelhető, hogy a különböző könyvekben a téglalapoknak más tulajdonságaik vannak.

25. Tegyük fel, hogy az i és ii állítás be van bizonyítva.
i. Ha p, akkor q.
ii. Ha s, akkor nem q.

Melyik állítás következik i-ből és ii-ből?

a. Ha p, akkor s.
b. Ha nem p, akkor nem q.
c. Ha p vagy q, akkor s.
d. Ha s, akkor nem p.
e. Ha nem s, akkor p.

B: A kísérleti csoport szociális hátteréről

A kísérleti csoport tanárnőjével rengeteg hangfelvételt tudtunk készíteni, tőle az alábbiakat tudtuk meg.

„A csoport létszáma kilenc fő. A gyerekeknek iskolán kívüli problémáik vannak, ezért az osztályfőnökkel rengeteget kell konzultálni, hogy megfelelőbben tudjam kezelni az esetlegesen megszokottól eltérő viselkedésüket. A kilenc tanuló közül három él teljes családban, édes szülőkkel, ahol mindkét fél dolgozik. A hat elvált szülős család közül három anyukának már van élettársa, amit az osztályfőnök elmondása szerint a diákok rosszul viselnek. Három család esetén a diák nem is beszél az egyik szülőjével. Van közöttük egy olyan fiú, akit az anyukája hagyott egyedül az apukával, ami eléggé különleges szituáció. Az egyik fiú patchwork családban él. Az édesanyja leányanyaként szülte, ő a legidősebb gyerek, a legfiatalabb még totyogó korú. Vele együtt hatan vannak testvérek. Az édesanya fogadó órán megkért minket, szaktanárokat, hogy amennyiben lehetőségünk van, segítsünk a diák nevelésében, mert otthon a kisebbek több időt igényelnek, így rá nem jut megfelelő mértékű figyelem. Több családnál is előfordul, hogy a gyámságot élvező szülő nem nézi jó szemmel azt, ha a másik szülővel jó kapcsolatot ápol a gyermek, amit hangoztat is. Ez sokuknak hatalmas teher, ami tanulmányi eredményeiken is látszik.”

C: Az elit gimnáziumi kontrollcsoportok szociális hátteréről

A budapesti elit gimnázium 9. évfolyamos kontrollcsoportjainak szociális helyzetéről olvashatjuk a matematika tanárnőjük által írtakat:

Általában az iskoláról: Diákjaink jellemzően értelmiségi, rendezett családból kerülnek ki, szinte kivétel nélkül továbbtanulásra és legalább egy tárgyból emeltszintű érettségire készülnek. A tanulók a tanórákon kívül rengeteg különórán vesznek részt, sokan érnek el komoly sport- és zenei eredményeket is.

9.c osztály: 16 fő (4 fiú + 12 lány)

4 osztályos képzésben vesznek részt, ének és humán tagozaton. A csoportbontás névsor alapján jött létre. Nagyon különböző általános iskolákból, eltérő felkészültségi szinttel érkeztek. Ezt a különbséget próbáljuk folyamatosan csökkenteni, azonban továbbra is nagy a szakadék, van néhány (4-5) kiemelkedő és több gyengébb képességű diák (jellemzően az énekesek). Az énekeseknek rengeteg fellépésük és próbájuk van, többször tanítási időben is, így nagyon nehéz néha együtt haladnia a csoportnak. Egy felmentett lány is van a csoportunkban, ő diszkalkuliás. A matematika órákon aktívan részt vesz, nagyon becsületesen és szorgalmasan készül az órákra, és minden dolgozatot megír, mindig próbálja a lehető legtöbbet kihozni magából. A munkáit mindig jegy nélkül, szövegesen, személyre szabottan értékelem.

9.e osztály: 18 fő (6 fiú + 12 lány)

5 osztályos képzésben vesznek részt, egy nulladik, nyelvi előkészítős évvel. A csoportbontás az első idegennyelv alapján történik, hozzám a németül tanulók járnak. Az első gimnáziumi évükben heti 1,5 óra matematika volt, amelynek célja az általános iskolai tananyag átismétlése, szinten tartása, valamint az esetleges hiányok pótlása. Ennek köszönhetően a hagyományos 9. évfolyamot nagyon erős és stabil alapokkal kezdték, amikre könnyen lehet építkezni. 2-3 gyengébb képességű diák van a csoportunkban.

D: Témazáró dolgozat, Egybevágósági transzformációk

1. feladat:
   Az alábbi állításokról döntsd el, hogy igaz, vagy hamis! Válaszodat indokold!

   a) Ha egy háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus. ___
      Indoklás:____

   b) A szabályos sokszög bármely szimmetriatengelye tartalmazza a sokszög legalább egy csúcsát.______
      Indoklás:____

   c) Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor középpontosan szimmetrikus. ___
      Indoklás:____

   d) Nincs olyan trapéz, amely középpontosan szimmetrikus.______
      Indoklás:____

   e) Van olyan konkáv négyszög, amely forgásszimmetrikus.______
      Indoklás:____

   f) Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor minden szöge egyenlő.___
      Indoklás:____

2. feladat:
   Add meg a következő, fokokban megadott szögek mértékét radiánban!

   a) 60° =
   b) 210° =
   c) 22°30’ =

3. feladat:
   Add meg a következő, radiánban megadott szögek mértékét fokban!

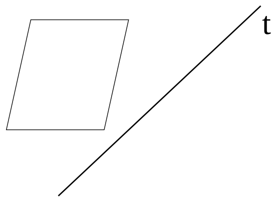
   a) $2 =$
   b) $\frac{2\pi}{9} =$
   c) $\frac{-\pi}{6} =$

4. feladat:
   A derékszögű koordináta-rendszerben $\vec{a}$ az A $(-2;\ 5)$ pont helyvektora. Add meg azon $\vec{a}$ -ral egyenlő vektor kezdőpontjának koordinátáit, amelynek végpontja $(-3;\ 3)$!

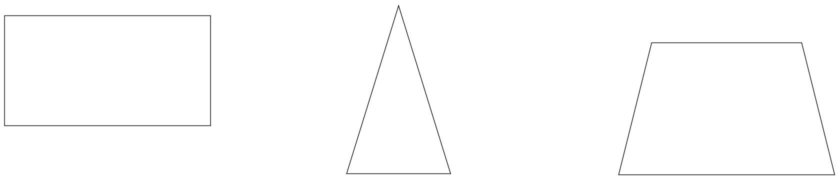
5. feladat:
   Határozd meg a 15 cm sugarú kör 90°-os középponti szögéhez tartozó kisebb körszelet területét és kerületét!

E: Összehasonlítás a szakgimnáziumban, korábbi évben

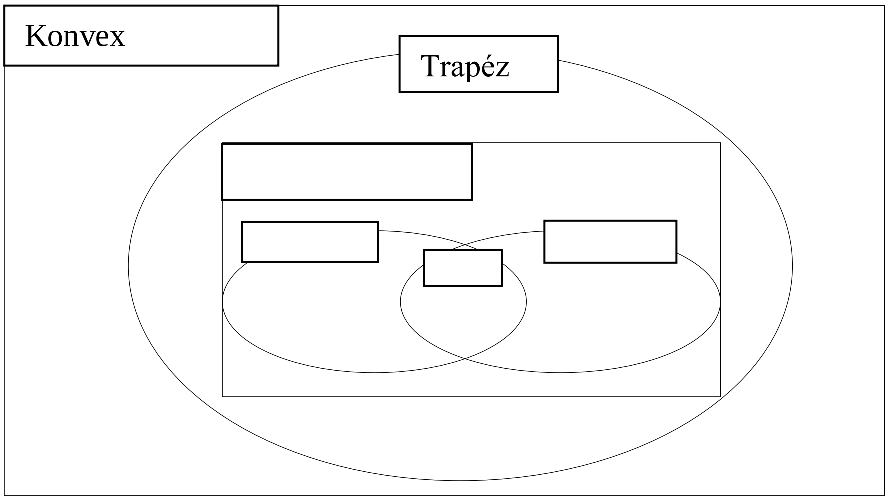
1. Szerkeszd meg az alábbi alakzat t tengelyre vonatkozó tükörképét!



2. Írd le a háromszögek egybevágóságának 4 alapesetét!
3. Vizsgáld a következő alakzatokat tengelyes és középpontos szimmetria szempontjából!



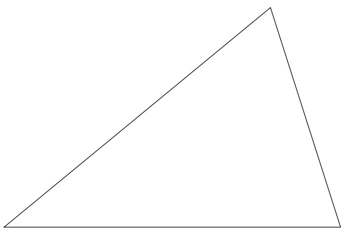
4. Töltsd ki a halmazábrát! A névtelen halmazoknak adj nevet, majd minden halmazba rajzolj egy megfelelő konvex négyszöget!



5. Igaz, vagy hamis?

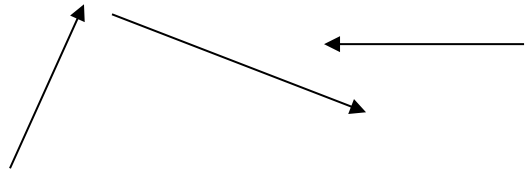
Állítás	Igaz/hamis
Minden trapéz rombusz.	
Minden négyzet téglalap.	
Minden parallelogramma trapéz	

6. Rajzold be az alábbi háromszögbe a magasságvonalakat!



7. Végezd el az alábbi vektorműveleteket!

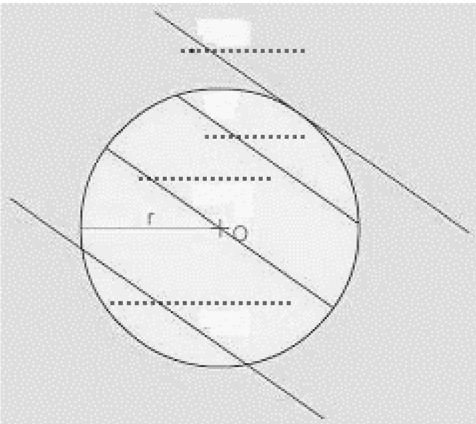
<u>abc</u>



a; $\underline{a} + \underline{b} =$

b; $2\underline{a} - 2\underline{b} + \frac{3}{2}\underline{c} =$

8. Egészítsd ki az ábrát a megfelelő szavakkal! 4 p/



9. Adott a síkon egy K pont. Színezzük be a sík azon pontjait, amelyek a K-tól legalább 3 cm-re, de nem távolabb, mint 5 cm találhatók!

10. Add meg a kifejezések értékét!

$\pi = \qquad ^\circ$

$2\pi = \qquad ^\circ$

$\frac{\pi}{2} = \qquad ^\circ$

$180° =$

$90° =$

$60° =$